

## **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA RADIACIÓN TÉRMICA CON DISPERSIÓN ANISOTRÓPICA DE MIE MEDIANTE EL MÉTODO DE LOS VOLÚMENES FINITOS**

**Daniel Rebollo**

*Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional de San Juan, Libertador 1109 Oeste,  
5400, San Juan, Argentina, drebollo@unsj.edu.ar*

**Palabras Claves:** Radiación, Dispersión anisotrópica, Teoría de Mie, Volúmenes Finitos

**Resumen.** En este trabajo se ha simulado numéricamente un proceso de transferencia de calor por radiación térmica en una placa plana rellena con un medio de partículas que absorbe, emite y dispersa anisotrópicamente la radiación térmica. Se ha desarrollado un modelo y un código computacional basado en el acople del método de los volúmenes finitos y la teoría de la dispersión de Mie, para evaluar la función de dispersión. Se han utilizado cuatro funciones de dispersión, las cuales fueron calculadas usando (i) la expansión en serie de los polinomios de Legendre y (ii) resolviendo las ecuaciones de Mie. Los resultados fueron comparados con los únicos resultados disponibles, donde se analizaron dos situaciones radiantes utilizando el método de las ordenadas discretas para resolver la ecuación de la transferencia radiante y la expansión en serie de los polinomios de Legendre para calcular la función de dispersión. En este trabajo se estudian estas dos configuraciones, se analiza la influencia de los parámetros térmicos y de las diferentes funciones de dispersión en el flujo de calor, se calculan los errores absolutos y relativos, y se efectúan las comparaciones respectivas.

## INTRODUCCIÓN

En muchas aplicaciones prácticas de conversión de energía, la conducción y la convección de calor ocurren simultáneamente con una cantidad significativa de radiación térmica. Ejemplos concretos de estos sistemas son los motores de combustión interna, turbinas térmicas y hornos industriales. Por ejemplo, en hornos que queman combustibles fósiles, el dióxido de carbono y el vapor de agua, formados como productos de la combustión, absorben y emiten cantidades significativas de radiación térmica. La importancia de la radiación térmica también puede ser apreciable en las cámaras de combustión de los motores, en los hornos de fundición de vidrio, explosiones nucleares, propulsión de cohetes, fenómenos ambientales y procesos de enfriamiento en dispositivos electrónicos. En todos estos fenómenos la radiación térmica juega un rol muy importante por lo que existe un gran interés en desarrollar modelos de análisis que permitan obtener resultados en forma rápida, precisa y económica. Además de la absorción y la emisión, la dispersión también es importante en la radiación térmica, como en el caso de la luz solar absorbida por una nube de polvo o dispersada por la atmósfera, la dispersión de la luz de las estrellas por el polvo interestelar, la propagación de las ondas de radio en la atmósfera y como herramientas de diagnóstico de gases.

La transferencia radiante en un medio plano unidimensional ha sido frecuentemente considerada por los investigadores en el campo de la astronomía y las ciencias atmosféricas y muchas técnicas de solución han sido usadas para resolver este tipo de problema. Recientes publicaciones en el campo de la transferencia radiante incluyen dispersión anisotrópica de Mie. La mayoría de los nuevos esquemas de solución son testeados en una situación unidimensional antes de ser extendidos a situaciones de mayor dimensionalidad debido a que esta es mucho más simple y existen muchos resultados precisos. Debido a que el análisis unidimensional resulta la base para el análisis en otras geometrías más complejas, es importante conseguir un entendimiento claro del fenómeno analizado.

Existe una gran cantidad de trabajos relacionados al estudio de la radiación térmica en cavidades, la mayoría de ellos son simulaciones numéricas donde se aplica una gran variedad de métodos numéricos. Estos métodos se caracterizan por su capacidad de manejar geometrías multidimensionales de forma irregular; buena precisión para la mayoría de las condiciones físicas de medio participante, dispersión isotrópica o anisotrópica, medio gris o espectral, medio isotérmico o no isotérmico; facilidad de aplicación, de generalización y flexibilidad en la elección de los diferentes órdenes de aproximación; compatibilidad con métodos numéricos aplicados a la resolución de otros modos de transferencia de calor y facilidad de programación y bajo costo de computación. El método de los volúmenes finitos cumple con todas las condiciones detalladas anteriormente por lo que se ha transformado en uno de los métodos más usados y con mayor futuro. En el método de los volúmenes finitos la ecuación integral de conservación de la intensidad de radiación térmica se obtiene integrando la ecuación gobernante de la transferencia radiante sobre volúmenes de control y ángulos sólidos discretos. Se usan varios tipos de funciones de interpolación para la intensidad. La formulación captura la aproximación de difusión para medios fuertemente atenuantes y no esta tan afectada por el efecto de los rayos como el método de las ordenadas discretas. Este método es totalmente compatible con el método de los volúmenes finitos usado para resolver problemas de dinámica de fluidos computacional y transferencia de calor por conducción y convección.

El método de los volúmenes finitos fue desarrollado por Raithby y Chui (1990) aplicándolo a grillas ortogonales, Chui y Raithby (1993) lo extendieron a mallas no ortogonales. Chai et al. (1994 y 1995) presentaron una nueva versión del método de los

volúmenes finitos para grillas ortogonales e irregulares, Kim y Beak (1997) analizaron el método de los volúmenes finitos en cavidades cilíndricas con un medio con dispersión anisotrópica. Mathur y Murthy (1999) aplicaron el método de los volúmenes finitos a geometrías periódicas. Gonçalves y Coelho (1997) desarrollaron una versión paralelizada el método de los volúmenes finitos. En todos los trabajos citados anteriormente el método de los volúmenes finitos ha sido usado en problemas de absorción y emisión con dispersión isotrópica o funciones de dispersión anisotrópicas muy sencillas.

Los primeros trabajos donde se consideran funciones de dispersión mas complejas fueron publicados por Kim y Lee (1988) y por Kim (1990). Kim utilizo las funciones de dispersión F1, F2, B1 y B2 calculadas usando expansiones en serie de los polinomios de Legendre, utilizando el método de las ordenadas discretas y el método de las diferencias finitas. Recientemente Hao et al. (2003) utilizaron el método de los volúmenes finitos para estudiar la dispersión anisotrópica en cavidades bidimensionales utilizando las mismas funciones de dispersión, calculadas de la misma manera que Kim (1990). Byun et al. (2004) utilizaron una combinación del método de los volúmenes finitos - método de Monte Carlo para analizar la dispersión anisotrópica en cavidades bidimensionales de forma irregular. An et al. (2005) usaron el método de los elementos finitos para analizar la radiación difusa en una cavidad cuadrada con dispersión anisotrópica utilizando las mismas funciones de dispersión que en los trabajos anteriormente citados, calculadas de la misma manera.

Trivic (2004) utilizo el método de los volúmenes finitos con las mismas funciones de dispersión anisotrópicas utilizadas en los trabajos citados, pero obtenidas resolviendo las ecuaciones de Mie, con datos proporcionados por Kim (1988). Además, Trivic (2004) utilizo datos proporcionados por Modest (1993) y obtuvo funciones de dispersión para diferentes carbones y cenizas.

Existen varios códigos computacionales de acceso libre en Internet que permiten calcular las funciones de dispersión anisotrópicas con gran seguridad. Algunos de estos códigos pertenecen a Wiscombe (1980, 1996), Bohren y Huffman (1983) y Lentz quien modifico el código original de Dave (1969). Estos códigos de libre disponibilidad fueron usados para testear los resultados obtenidos con el código desarrollado en este trabajo.

Este trabajo muestra resultados de la transferencia radiante en un medio absorbente, emisor y dispersante siguiendo la teoría de Mie en una geometría plana unidimensional para emisión difusa desde las fronteras y emisión desde un medio isotérmico. Se han simulado las mismas configuraciones térmicas que estudio Kim (1990) en su Tesis Doctoral la cual dispone de gran cantidad de información que no ha sido utilizada por los trabajos publicados posteriormente.

## FORMULACIÓN MATEMÁTICA

### Ecuación de la transferencia radiante

La ecuación de la transferencia radiante para un medio gris absorbente, emisor y dispersante es (Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992; Brewster, 1992; Kim, 1990; Chui, 1990; Chai, 1994)

$$\mathbf{s} \cdot \nabla i = -\beta i + S \quad (1)$$

donde  $i$  es la intensidad de radiación térmica,  $\mathbf{s}$  se el vector de dirección,

$$\beta = \kappa + \sigma \quad (2)$$

es el coeficiente de extinción y  $S$  el término fuente

$$S = \kappa i_b + \frac{\sigma}{4\pi} \int_{\omega=0}^{4\pi} i \Phi d\omega \quad (3)$$

donde  $\kappa$  coeficiente de absorción,  $\sigma$  es el coeficiente de dispersión,  $i_b$  es la intensidad de radiación térmica perteneciente al cuerpo negro,  $\Phi$  es la función de dispersión y  $\omega$  es el ángulo sólido.

### Función de dispersión

La función de dispersión, para una placa plana unidimensional, independiente del ángulo azimutal, expresada como una serie de polinomios de Legendre, es (Kim, 1990; Dombrosky, 1996; Modest, 1993)

$$\Phi(\theta^l, \theta^k) = 1 + \sum_{m=1}^M A_m P_m(\cos \theta^l) P_m(\cos \theta^k) \quad (4)$$

donde  $\theta$  es el ángulo polar,  $k$  representa la dirección incidente,  $l$  representa la dirección emitida,  $A_m$  son los coeficientes de la serie de Legendre y  $P_m$  son los polinomios de Legendre.

Para poder calcular la función de dispersión es necesario conocer los coeficientes  $A_m$ , los cuales están relacionados a los coeficientes de dispersión de Mie  $a_n$  y  $b_n$  por medio de un conjunto de ecuaciones (Modest, 1993), y se encuentran tabulados en los trabajos de Kim (1990); An et al. (2005); Byun et al. (2004); Hao et al. (2003).

Según la teoría de Mie, la función de dispersión en una dirección dada, para una esfera simple, definida por el ángulo de dispersión  $\Theta$ , esta dada por (Modest, 1993; Brewster, 1992; Trivic, 2004)

$$\Phi(\Theta) = 2 \frac{i_1 + i_2}{x^2 Q_{sca}} \quad (5)$$

las cantidades  $i_1$  y  $i_2$  son las intensidades polarizadas adimensionales, calculadas como

$$i_1(x, m, \Theta) = |S_1(\Theta)|^2 \quad i_2(x, m, \Theta) = |S_2(\Theta)|^2 \quad (6)$$

los  $S_1(\Theta)$  y  $S_2(\Theta)$  son las funciones de amplitud complejas, expresadas como

$$S_1(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [a_n \pi_n(\cos \Theta) + b_n \tau_n(\cos \Theta)] \quad (7)$$

$$S_2(\Theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} [b_n \pi_n(\cos \Theta) + a_n \tau_n(\cos \Theta)] \quad (8)$$

Las funciones dependientes de la dirección, también llamadas funciones angulares,  $\pi_n$  y  $\tau_n$  están relacionados a los polinomios de Legendre  $P_n(\cos \Theta)$  como

$$\pi_n(\cos \Theta) = \frac{dP_n(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta)} \quad (9)$$

$$\tau_n(\cos \Theta) = \cos \Theta \pi_n(\cos \Theta) - \sin^2 \Theta \frac{d\pi_n(\cos \Theta)}{d(\cos \Theta)} \quad (10)$$

los coeficientes de dispersión de Mie  $a_n$  y  $b_n$  son funciones complejas de  $x$  y  $z$

$$a_n = \frac{\psi'_n(z)\psi_n(x) - m\psi_n(z)\psi'_n(x)}{\psi'_n(z)\xi_n(x) - m\psi_n(z)\xi'_n(x)} \quad (11)$$

$$b_n = \frac{m\psi'_n(z)\psi_n(x) - \psi_n(z)\psi'_n(x)}{m\psi'_n(z)\xi_n(x) - \psi_n(z)\xi'_n(x)} \quad (12)$$

donde  $m = n - ik$  es el índice de refracción complejo,  $x = 2\pi r/\lambda$  es el parámetro de tamaño de la partícula y  $z = mx$ , además

$$\psi'_n(z) = \frac{d\psi_n(z)}{dz} \quad (13)$$

$$\xi'_n(z) = \frac{d\xi_n(z)}{dz} \quad (14)$$

donde las funciones  $\psi_n(z)$  y  $\xi_n(z)$  son las funciones de Ricatti-Bessel y Ricatti-Hankel respectivamente. Ellas se pueden escribir como

$$\psi_n(z) = zj_n(z) \quad (15)$$

$$\xi_n(x) = zj_n(z) - izy_n(z) \quad (16)$$

donde  $j_n(z)$  y  $y_n(z)$  son las funciones esféricas de Bessel de primera y segunda clase respectivamente. Los factores de eficiencia para la extinción, dispersión y absorción  $Q_{ext}$ ,  $Q_{sca}$  y  $Q_{abs}$  están dados por

$$Q_{ext} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) \operatorname{Re}\{a_n + b_n\} \quad (17)$$

$$Q_{sca} = \frac{2}{x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (2n+1) (|a_n|^2 + |b_n|^2) \quad (18)$$

$$Q_{abs} = Q_{ext} - Q_{sca} \quad (19)$$

El programa de computadora desarrollado en este estudio calcula todas las cantidades para partículas esféricas dado el radio de la partícula  $r$ , el índice de refracción complejo del material de la partícula  $m$  y el valor de la longitud de onda de la radiación incidente  $\lambda$ .

### Divergencia de la energía radiante

El flujo de calor en la dirección  $\mathbf{s}$  se relaciona con la intensidad  $i$  de la siguiente manera (Brewster, 1992; Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990; Modest, 1993; Siegel y Howell, 1992)

$$\mathbf{q}_r = \int_{\omega=0}^{4\pi} i \mathbf{s} d\omega \quad (20)$$

así, la divergencia de la energía radiante se puede escribir como

$$\nabla \cdot \mathbf{q}_r = \kappa \left( 4\gamma T^4 - \int_{\omega=0}^{4\pi} i d\omega \right) \quad (21)$$

donde  $\gamma$  es la constante de Stefan–Boltzmann y  $T$  es la temperatura absoluta.

### Discretización de la ecuación de la transferencia radiante

La ecuación de la transferencia radiante (1) se debe integrar tanto en el volumen espacial como en el angular (Chai, 1994; Chui, 1990), es decir:

$$\int_{V_p} \int_{\omega'} (\mathbf{s}^l \cdot \nabla i_p^l) d\omega dV = \int_{V_p} \int_{\omega'} (-\beta i_p^l + S_p^l) d\omega dV \quad (22)$$

aplicando el teorema de Gauss se obtiene:

$$\int_S \int_{\omega'} i_s^l (\mathbf{s}^l \cdot d\mathbf{S}) d\omega = \int_{V_p} \int_{\omega'} (-\beta i_p^l + S_p^l) d\omega dV \quad (23)$$

El lado izquierdo de la ecuación (23) se puede reemplazar por una sumatoria de integrales a lo largo de las caras del volumen de control  $P$ . El lado derecho de la ecuación (23) corresponde a una doble integral de una función escalar, por lo que se puede escribir que:

$$\sum_f \int_f \int_{\omega'} i_f^l (\mathbf{s}^l \cdot d\mathbf{S}_f) d\omega = (-\beta i_p^l + S_p^l) \omega' V_p \quad (24)$$

Recordando que el valor de  $i_f^l$  prevalece a lo largo de toda la cara del volumen de control, se puede escribir que:

$$\sum_f i_f^l \int_{\omega'} (\mathbf{s}^l \cdot \mathbf{S}_f) d\omega = (-\beta i_p^l + S_p^l) \omega' V_p \quad (25)$$

donde la función fuente se calcula como

$$S_p^l = \kappa i_{bp} + \frac{\sigma}{4\pi} \sum_{k=1}^{n_d} i_p^k \bar{\Phi}^{lk} \omega^k \quad (26)$$

donde  $\bar{\Phi}^{lk}$  es la energía promedio dispersada desde el ángulo de control  $k$  hacia el ángulo de control  $l$ , la cual se calcula como:

$$\bar{\Phi}^{lk} = \frac{\int_{\omega_k} \int_{\omega_l} \Phi(\mathbf{s}^k, \mathbf{s}^l) d\omega^k d\omega^l}{\omega^k \omega^l} \quad (27)$$

Llamando a la integral sobre el ángulo sólido de la ecuación (25) como:

$$\int_{\omega'} (\mathbf{s}^l \cdot \mathbf{S}_f) d\omega = D_f^l A_f \quad (28)$$

donde  $A_f$  es el valor del área de la cara y  $D_f^l$  es la integral en el ángulo sólido del producto escalar entre la dirección del haz y la normal unitaria exterior a la cara. Finalmente, se obtiene la ecuación discreta de la transferencia radiante:

$$\sum_f i_f^l D_f^l A_f = (-\beta i_p^l + S_p^l) \omega' V_p \quad (29)$$

Para resolver la vinculación entre los valores de la intensidad radiante en el centro del volumen de control  $i_p^l$  y sus valores en las caras del volumen de control  $i_f^l$  se utiliza el esquema Step, idéntico al esquema UpWind usado en convección. Para la determinación de la intensidad en la cara del volumen de control es necesario analizar el producto escalar entre la

dirección del haz y la normal exterior a la cara, el cual esta representado por el coeficiente  $D_f^l$ , resultando:

$$i_f^l = \begin{cases} = i_p^l & \text{para } D_f^l \geq 0 \\ = i_N^l & \text{para } D_f^l < 0 \end{cases} \quad (30)$$

este será el esquema de diferenciación usado en este trabajo.

Finalmente, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas para cada dirección, que al ser resuelta, proporciona el campo de intensidades de radiación:

$$a_p^l i_p^l + \sum_N a_N^l i_N^l = R_p^l \quad (31)$$

### Condición de frontera radiante

En este trabajo solo se consideran superficies radiantes sólidas, grises, opacas, difusas e isotérmicas. La condición de borde para esta situación se puede escribir como (Chai, 1994; Chui, 1990; Kim, 1990):

$$i_w^l = \varepsilon_w i_{bw} + \frac{\rho_w H_w}{\pi} \quad (32)$$

donde el subíndice  $w$  representa la pared,  $\varepsilon$  es la emisividad,  $\rho$  la reflectividad,  $i_b$  es la intensidad de radiación del cuerpo negro, la cual depende de la cuarta potencia de la temperatura absoluta de la pared, y  $H$  es la irradiación hemisférica, es decir, el flujo de calor radiante incidente en la pared. Estos últimos se calculan como:

$$i_{bw} = \frac{\gamma T_w^4}{\pi} \quad (33)$$

$$H_w = \int_{\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w < 0} i_w^k |\mathbf{s}^k \cdot \mathbf{n}_w| d\omega^k \quad (34)$$

donde  $\mathbf{n}$  es la normal unitaria a la pared. Esta ecuación muestra que la radiación que abandona la superficie radiante tiene dos componentes, la emisión debida al estado térmico de la superficie y la parte reflejada de la intensidad incidente sobre la superficie.

En todos los problemas analizados en este trabajo, se supone que las superficies de la cavidad son opacas, grises y difusas. La rugosidad de la superficie y la deposición de productos de la combustión hacen que esta suposición sea valida en muchas aplicaciones de la ingeniería.

### Detalles numéricos

Kim (1990) utilizo el método de las ordenadas discretas y el método de las diferencias finitas para resolver la ecuación de la transferencia radiante (1). Utilizo una cuadratura de Lobatto de 42 direcciones y una grilla espacial irregular de 26 puntos. En este trabajo, para la grilla angular, se utilizo la misma cantidad de direcciones que las utilizadas por Kim pero distribuidas uniformemente en el rango de 0 a  $\pi$ . Con respecto a la grilla espacial, debido a que no es posible hacer coincidir las coordenadas de Kim (1990) con las coordenadas de los centros de los volúmenes de control, estas se usaron como coordenadas de las fronteras. Todas las cantidades se calculan en los centros del volumen de control y los valores del flujo de calor presentados se obtienen por interpolación lineal en las coordenadas dadas por Kim (1990).

El proceso iterativo de cálculo de la intensidad radiante se detiene cuando se alcanza un error absoluto menor a  $10^{-6}$  en todas las direcciones angulares y en todos los volúmenes de control. Para terminar el cálculo de las series infinitas se ha utilizado el criterio dado por Wiscombe (1980):

$$n_{\max} = \begin{cases} x + 4x^{1/3} + 1 & 0.02 \leq x \leq 8 \\ x + 4.05x^{1/3} + 2 & 8 \leq x \leq 4200 \\ x + 4x^{1/3} + 2 & 4200 \leq x \leq 20000 \end{cases} \quad (35)$$

Para el cálculo de las funciones de dispersión utilizando la teoría de Mie se han usado los valores del parámetro de tamaño de la partícula y el índice de refracción dados por Trivic (2004).

## CONFIGURACIONES TÉRMICAS ESTUDIADAS

Se estudia una cavidad unidimensional de placas planas infinitas separadas una longitud  $L_x$ , rellena con un medio gris absorbente, emisor y anisotrópicamente dispersante. Las superficies de la cavidad son opacas, grises y difusas. Se ha tomado una coordenada local  $l$  en la dirección normal a las caras, la cual está adimensionalizada con la longitud de la cavidad  $L_x$ . Todas las magnitudes usadas están expresadas en el sistema internacional de medidas. Los resultados correspondientes al flujo de calor han sido adimensionalizados con el poder emisor de la placa caliente o del medio para facilitar la comparación con los resultados de Kim (1990). La descripción detallada de las configuraciones estudiadas y reproducidas en este trabajo se puede encontrar en el trabajo de Kim (1990).

## RESULTADOS Y DISCUSIONES

Como Kim (1990) publicó sus resultados tanto en forma gráfica como tabular, y debido a que los resultados obtenidos en este trabajo son muy próximos, se ha preferido hacer toda la presentación de resultados en forma tabular, para una comparación más precisa.

Se estudian los efectos de la anisotropía de la función de dispersión, el albedo de dispersión y la separación entre placas sobre la distribución del flujo de calor entre las placas.

En primer lugar se presentan los resultados de las funciones de dispersión consideradas en este trabajo. Estas fueron calculadas en el rango de  $0^\circ$  a  $180^\circ$  variando cada  $1^\circ$  usando la expansión en serie de los polinomios de Legendre y resolviendo las ecuaciones de Mie. Por razones de espacio solo se muestran resultados cada  $10^\circ$ . Representaciones gráficas de estas funciones se pueden encontrar en los trabajos de Kim (1990), Hao et al. (2003) y An et al. (2005).

En la tabla 1a se pueden observar los valores que toman las cuatro funciones de dispersión anisotrópicas consideradas en este estudio. Las funciones de dispersión F1 y F2 corresponden a una dispersión hacia adelante, mientras que B1 y B2 representan dispersión hacia atrás. Comparando con el caso de dispersión isotrópica, las funciones de dispersión F1 y F2 toman sus valores máximos para  $0^\circ$  y se mantienen mayores que uno hasta los  $37^\circ$  y  $68^\circ$  respectivamente, siendo menores que uno para ángulos mayores. Se comprueba que los mayores valores se encuentran para un ángulo de dispersión de  $0^\circ$  y los menores próximos a  $180^\circ$ . Para las funciones B1 y B2 ocurre lo contrario, son menores que uno hasta los  $100^\circ$  y mayores que uno para ángulos mayores, alcanzando sus máximos en la proximidad de los  $180^\circ$ . Además, se puede advertir que F1 toma valores mayores que F2 hasta un ángulo de dispersión de  $28^\circ$ , mientras que B2 es menor que B1 hasta los  $100^\circ$  invirtiéndose para ángulos mayores.

La tabla 1b muestra los errores absolutos y relativos, máximos y medios, obtenidos al hacer la comparación entre los valores de Kim (1990) y los calculados en este trabajo por medio de los polinomios de Legendre y las ecuaciones de Mie. Para el cálculo de los errores relativos se han tomado los valores de Kim (1990) y los de Legendre como valores de referencia.

$\Theta$	KIM				LEG				MIE			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
0	26.1020	5.5230	0.8290	0.3000	26.1015	5.5235	0.8290	0.3000	26.1049	5.5235	0.8308	0.2986
10	21.2990	5.3170	0.8150	0.2960	21.2985	5.3169	0.8148	0.2956	21.2986	5.3169	0.8166	0.2942
20	11.2200	4.7440	0.7760	0.2850	11.2198	4.7440	0.7763	0.2846	11.2189	4.7440	0.7781	0.2833
30	3.4170	3.9280	0.7250	0.2730	3.4167	3.9279	0.7246	0.2733	3.4177	3.9279	0.7261	0.2721
40	0.5870	3.0240	0.6750	0.2710	0.5874	3.0236	0.6746	0.2709	0.5869	3.0236	0.6759	0.2698
50	0.4210	2.1700	0.6420	0.2890	0.4209	2.1699	0.6422	0.2885	0.4208	2.1699	0.6431	0.2876
60	0.4550	1.4570	0.6400	0.3370	0.4555	1.4566	0.6398	0.3375	0.4560	1.4566	0.6403	0.3368
70	0.2180	0.9170	0.6750	0.4270	0.2177	0.9174	0.6748	0.4273	0.2171	0.9174	0.6748	0.4268
80	0.0660	0.5420	0.7480	0.5640	0.0659	0.5424	0.7480	0.5642	0.0662	0.5424	0.7476	0.5640
90	0.0850	0.3000	0.8550	0.7500	0.0849	0.2995	0.8548	0.7500	0.0851	0.2995	0.8541	0.7500
100	0.1070	0.1520	0.9860	0.9810	0.1068	0.1520	0.9864	0.9810	0.1065	0.1520	0.9855	0.9812
110	0.0600	0.0690	1.1320	1.2480	0.0600	0.0690	1.1318	1.2482	0.0603	0.0690	1.1309	1.2486
120	0.0260	0.0280	1.2800	1.5370	0.0263	0.0285	1.2799	1.5375	0.0261	0.0285	1.2792	1.5382
130	0.0580	0.0150	1.4210	1.8310	0.0581	0.0154	1.4206	1.8312	0.0580	0.0154	1.4201	1.8321
140	0.0990	0.0190	1.5450	2.1090	0.0987	0.0192	1.5455	2.1094	0.0990	0.0192	1.5453	2.1104
150	0.0920	0.0320	1.6480	2.3520	0.0924	0.0317	1.6482	2.3517	0.0920	0.0317	1.6483	2.3529
160	0.0710	0.0460	1.7240	2.5400	0.0708	0.0461	1.7243	2.5399	0.0710	0.0461	1.7248	2.5412
170	0.0810	0.0570	1.7710	2.6590	0.0815	0.0571	1.7710	2.6592	0.0815	0.0571	1.7717	2.6605
180	0.0970	0.0610	1.7870	2.7000	0.0970	0.0611	1.7868	2.7000	0.0961	0.0611	1.7875	2.7014

Tabla 1a: Función de dispersión.

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
KIM-LEG	0.0002	0.0002	0.0002	0.0003	0.0005	0.0005	0.0005	0.0005
KIM-MIE	0.0006	0.0002	0.0009	0.0009	0.0036	0.0005	0.0022	0.0018
LEG-MIE	0.0005	0.0000	0.0008	0.0009	0.0034	0.0001	0.0019	0.0014
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
KIM-LEG	0.23	0.36	0.03	0.05	1.72	2.78	0.08	0.18
KIM-MIE	0.35	0.36	0.10	0.17	2.07	2.78	0.28	0.62
LEG-MIE	0.28	0.00	0.10	0.17	1.23	0.00	0.23	0.48

Tabla 1b: Error absoluto y relativo medio y máximo entre las funciones de dispersión dadas en la tabla 1a.

Se observa que el error absoluto medio es del mismo orden que el error de redondeo,  $10^{-4}$ , para todas las funciones de dispersión en las tres comparaciones efectuadas. El error absoluto máximo se mantiene en el mismo orden que el medio en F2 y en la comparación Kim-Leg, mientras que aumenta un orden en el resto de las funciones y comparaciones.

Se aprecia que el mayor error relativo medio es del 0.36%, mientras que el mayor error relativo máximo, 2.78%, corresponde a F2 en la comparación Kim-Leg. Además, F2 también muestra el menor error relativo máximo y medio, y el menor error absoluto máximo y medio. Para F1 se obtiene un error relativo máximo del 2.07 % y del 1.72 % y un error relativo medio del 0.35 % y del 0.23 % en la comparación Kim-Mie y Kim-Leg respectivamente. Para las funciones B1 y B2 los mayores errores relativos máximos y medios, 0.28% y 0.10% para B1, y 0.62 % y 0.17 % para B2, son menores que los correspondientes a F1 y F2.

## Emisión desde la frontera difusa

La tabla 2a muestra la distribución de los flujos de calor adimensional entre las placas para las diferentes funciones de dispersión. Se puede comprobar los efectos de la anisotropía comparando los flujos de calor de cada función de dispersión. Se observa como el flujo de calor disminuye desde la función F1 hasta la función B1 en cada una de las coordenadas espaciales. Además, el flujo de calor disminuye con la coordenada espacial, como es de esperar, debido a que la única fuente de emisión radiante se encuentra en la coordenada  $l = 0$ .

$l$	KIM				LEG				MIE			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
0.0000	0.9749	0.9495	0.8457	0.8246	0.9753	0.9506	0.8501	0.8297	0.9850	0.9456	0.8617	0.7854
0.0056	0.9691	0.9434	0.8392	0.8179	0.9650	0.9397	0.8374	0.8167	0.9750	0.9347	0.8494	0.7718
0.0188	0.9556	0.9296	0.8242	0.8027	0.9476	0.9215	0.8165	0.7952	0.9578	0.9161	0.8289	0.7500
0.0393	0.9356	0.9089	0.8019	0.7801	0.9247	0.8976	0.7898	0.7680	0.9351	0.8918	0.8028	0.7230
0.0667	0.9100	0.8827	0.7736	0.7515	0.8971	0.8690	0.7584	0.7360	0.9077	0.8626	0.7719	0.6917
0.1008	0.8801	0.8519	0.7407	0.7182	0.8658	0.8368	0.7235	0.7006	0.8765	0.8297	0.7375	0.6576
0.1408	0.8469	0.8179	0.7045	0.6817	0.8319	0.8019	0.6863	0.6630	0.8427	0.7940	0.7008	0.6217
0.1864	0.8115	0.7816	0.6664	0.6433	0.7963	0.7655	0.6479	0.6245	0.8071	0.7567	0.6629	0.5852
0.2366	0.7748	0.7441	0.6274	0.6041	0.7600	0.7285	0.6095	0.5859	0.7707	0.7188	0.6248	0.5490
0.2909	0.7378	0.7064	0.5887	0.5654	0.7236	0.6916	0.5719	0.5483	0.7342	0.6809	0.5874	0.5140
0.3483	0.7012	0.6693	0.5511	0.5279	0.6880	0.6555	0.5357	0.5123	0.6984	0.6440	0.5514	0.4807
0.4081	0.6656	0.6333	0.5153	0.4923	0.6537	0.6208	0.5016	0.4785	0.6637	0.6085	0.5173	0.4496
0.4692	0.6316	0.5990	0.4818	0.4591	0.6210	0.5880	0.4699	0.4472	0.6307	0.5749	0.4856	0.4210
0.5308	0.5996	0.5668	0.4509	0.4287	0.5904	0.5573	0.4409	0.4187	0.5997	0.5435	0.4565	0.3951
0.5919	0.5699	0.5370	0.4230	0.4012	0.5621	0.5291	0.4147	0.3931	0.5709	0.5147	0.4302	0.3719
0.6517	0.5425	0.5098	0.3979	0.3768	0.5362	0.5034	0.3915	0.3704	0.5446	0.4885	0.4067	0.3516
0.7091	0.5178	0.4853	0.3759	0.3553	0.5128	0.4803	0.3711	0.3507	0.5208	0.4651	0.3860	0.3340
0.7634	0.4957	0.4635	0.3567	0.3368	0.4921	0.4600	0.3536	0.3339	0.4996	0.4445	0.3682	0.3189
0.8136	0.4763	0.4445	0.3404	0.3210	0.4740	0.4423	0.3388	0.3197	0.4811	0.4266	0.3531	0.3064
0.8592	0.4596	0.4281	0.3266	0.3079	0.4586	0.4273	0.3266	0.3082	0.4652	0.4115	0.3406	0.2962
0.8992	0.4454	0.4144	0.3154	0.2972	0.4457	0.4149	0.3169	0.2990	0.4519	0.3991	0.3306	0.2882
0.9333	0.4339	0.4033	0.3065	0.2888	0.4354	0.4050	0.3094	0.2921	0.4413	0.3892	0.3229	0.2823
0.9607	0.4249	0.3946	0.2997	0.2823	0.4276	0.3977	0.3042	0.2872	0.4332	0.3819	0.3174	0.2782
0.9812	0.4183	0.3884	0.2948	0.2778	0.4223	0.3928	0.3010	0.2844	0.4277	0.3771	0.3140	0.2759
0.9944	0.4142	0.3845	0.2919	0.2750	0.4196	0.3904	0.2999	0.2835	0.4249	0.3748	0.3127	0.2754
1.0000	0.4125	0.3828	0.2906	0.2738	0.4187	0.3897	0.3000	0.2837	0.4238	0.3741	0.3127	0.2757

Tabla 2a: Flujo de calor neto adimensional  $q_A(l)$  para  $\rho = 0.0$ ,  $\omega = 0.5$  y  $L_x = 1.0$

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
KIM-LEG	0.0077	0.0081	0.0091	0.0093	0.0152	0.0161	0.0185	0.0188
KIM-MIE	0.0046	0.0181	0.0090	0.0325	0.0113	0.0255	0.0221	0.0606
LEG-MIE	0.0086	0.0119	0.0141	0.0262	0.0108	0.0158	0.0157	0.0452
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	F1	F2	B1	B2	F1	F2	B1	B2
KIM-LEG	1.14	1.26	1.76	1.89	1.92	2.10	3.23	3.62
KIM-MIE	0.86	3.12	2.45	5.86	2.74	4.18	7.60	9.12
LEG-MIE	1.36	2.33	3.17	4.99	1.58	4.00	4.36	6.30

Tabla 2b: Error absoluto y relativo, medio y máximo, de los flujos de calor neto dados en la tabla 2a.

En la tabla 2b se muestran los errores absolutos máximos y medios y los errores relativos máximos y medios obtenidos en la comparación de los resultados de Kim (1990) y los

obtenidos en este trabajo. Se observa que el mayor error absoluto medio y máximo corresponde a la función B2, y el menor error absoluto medio y máximo corresponde a F1. Los errores relativos máximos también crecen desde F1 hasta B2 en todas las comparaciones hechas. Los errores relativos medios presentan el mismo comportamiento excepto en la comparación Kim-Mie donde B1 altera el crecimiento constante. También es posible advertir que los mayores errores relativos máximos se obtienen en la comparación Kim-Mie para todas las funciones de dispersión.

$l$	KIM				LEG				MIE			
	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$
0.0000	0.7663	0.8283	0.9940	1.0005	0.7685	0.8306	0.9938	1.0000	0.7367	0.8098	0.9932	1.0000
0.0056	0.7663	0.8269	0.9838	0.9894	0.7669	0.8268	0.9769	0.9817	0.7351	0.8059	0.9763	0.9817
0.0188	0.7663	0.8236	0.9610	0.9643	0.7648	0.8209	0.9483	0.9506	0.7331	0.7999	0.9476	0.9506
0.0393	0.7663	0.8187	0.9275	0.9279	0.7630	0.8138	0.9110	0.9103	0.7313	0.7924	0.9102	0.9103
0.0667	0.7663	0.8122	0.8857	0.8827	0.7615	0.8056	0.8670	0.8629	0.7296	0.7837	0.8661	0.8629
0.1008	0.7663	0.8044	0.8381	0.8314	0.7601	0.7963	0.8184	0.8108	0.7281	0.7738	0.8173	0.8108
0.1408	0.7663	0.7955	0.7868	0.7764	0.7590	0.7862	0.7671	0.7561	0.7266	0.7629	0.7659	0.7561
0.1864	0.7663	0.7857	0.7336	0.7198	0.7580	0.7755	0.7149	0.7008	0.7254	0.7513	0.7135	0.7008
0.2366	0.7663	0.7753	0.6802	0.6634	0.7572	0.7644	0.6632	0.6464	0.7243	0.7393	0.6616	0.6464
0.2909	0.7663	0.7644	0.6281	0.6087	0.7565	0.7531	0.6130	0.5940	0.7233	0.7270	0.6113	0.5940
0.3483	0.7663	0.7533	0.5782	0.5568	0.7560	0.7418	0.5654	0.5445	0.7225	0.7148	0.5635	0.5445
0.4081	0.7663	0.7422	0.5314	0.5083	0.7557	0.7307	0.5209	0.4986	0.7219	0.7027	0.5188	0.4986
0.4692	0.7663	0.7313	0.4881	0.4639	0.7555	0.7199	0.4799	0.4565	0.7215	0.6911	0.4777	0.4565
0.5308	0.7663	0.7208	0.4486	0.4236	0.7555	0.7097	0.4425	0.4185	0.7214	0.6800	0.4403	0.4185
0.5919	0.7663	0.7107	0.4131	0.3876	0.7557	0.7002	0.4090	0.3845	0.7214	0.6697	0.4067	0.3845
0.6517	0.7663	0.7013	0.3814	0.3557	0.7560	0.6914	0.3791	0.3544	0.7217	0.6602	0.3768	0.3544
0.7091	0.7663	0.6926	0.3536	0.3279	0.7565	0.6834	0.3529	0.3282	0.7221	0.6518	0.3505	0.3282
0.7634	0.7663	0.6847	0.3294	0.3038	0.7572	0.6764	0.3302	0.3055	0.7228	0.6443	0.3278	0.3055
0.8136	0.7663	0.6777	0.3086	0.2832	0.7580	0.6704	0.3107	0.2862	0.7238	0.6380	0.3083	0.2862
0.8592	0.7663	0.6716	0.2911	0.2659	0.7590	0.6654	0.2944	0.2700	0.7249	0.6329	0.2919	0.2700
0.8992	0.7663	0.6665	0.2766	0.2517	0.7601	0.6614	0.2810	0.2567	0.7263	0.6288	0.2785	0.2567
0.9333	0.7663	0.6622	0.2649	0.2402	0.7615	0.6586	0.2703	0.2462	0.7279	0.6260	0.2679	0.2462
0.9607	0.7663	0.6589	0.2559	0.2314	0.7630	0.6568	0.2623	0.2383	0.7297	0.6243	0.2599	0.2383
0.9812	0.7663	0.6566	0.2494	0.2251	0.7648	0.6561	0.2569	0.2330	0.7319	0.6238	0.2545	0.2330
0.9944	0.7663	0.6551	0.2454	0.2211	0.7669	0.6565	0.2540	0.2301	0.7344	0.6245	0.2516	0.2301
1.0000	0.7663	0.6544	0.2436	0.2194	0.7685	0.6573	0.2529	0.2290	0.7365	0.6256	0.2506	0.2290

Tabla 3a: Flujo de calor neto adimensional  $q_r(l)$  para F2,  $\rho = 0.0$ ,  $L_x = 1.0$  y diferentes albedo de dispersión  $\omega$ .

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$
KIM-LEG	0.0065	0.0069	0.0091	0.0094	0.0108	0.0115	0.0197	0.0206
KIM-MIE	0.0392	0.0342	0.0095	0.0094	0.0449	0.0411	0.0209	0.0206
LEG-MIE	0.0331	0.0279	0.0018	0.0000	0.0344	0.0326	0.0025	0.0000
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$	$\omega = 1.0$	$\omega = 0.9$	$\omega = 0.1$	$\omega = 0.0$
KIM-LEG	0.85	0.94	1.76	1.92	1.41	1.56	3.82	4.38
KIM-MIE	5.12	4.74	1.69	1.92	5.86	5.90	2.87	4.38
LEG-MIE	4.36	3.91	0.49	0.00	4.55	4.95	0.94	0.00

Tabla 3b: Error absoluto y relativo, medio y máximo, de los flujos de calor neto dados en la tabla 3a.

La tabla 3a muestra la distribución del flujo de calor neto adimensional entre las placas paralelas negras,  $\rho = 0.0$ , separadas una distancia  $L_x = 1.0$  y rellenas de un medio con una función de dispersión F2, para diferentes albedo de dispersión  $\omega$ . Un albedo de dispersión  $\omega =$

1, representan un medio puramente dispersante, y  $\omega = 0$ , un medio puramente absorbente. Para  $\omega = 1$  el flujo neto debería ser constante a lo largo de la coordenada  $l$ . Al disminuir el albedo de dispersión, disminuye la componente de dispersión y aumenta la componente de absorción, aumentando el flujo en la coordenada  $l = 0$  y disminuyendo en la coordenada  $l = 1$ .

$l$	KIM				LEG				MIE			
	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$
0.0000	0.9836	0.9456	0.9450	0.9454	0.9833	0.9473	0.9478	0.9490	0.9816	0.9424	0.9432	0.9445
0.0056	0.9830	0.9334	0.9154	0.8882	0.9822	0.9262	0.8984	0.8581	0.9805	0.9210	0.8929	0.8518
0.0188	0.9816	0.9065	0.8530	0.7756	0.9802	0.8917	0.8230	0.7309	0.9786	0.8859	0.8159	0.7216
0.0393	0.9795	0.8675	0.7686	0.6367	0.9776	0.8481	0.7343	0.5950	0.9759	0.8413	0.7250	0.5825
0.0667	0.9767	0.8195	0.6725	0.4953	0.9744	0.7975	0.6396	0.4650	0.9726	0.7895	0.6279	0.4499
0.1008	0.9732	0.7653	0.5735	0.3675	0.9705	0.7425	0.5456	0.3507	0.9688	0.7332	0.5317	0.3344
0.1408	0.9692	0.7075	0.4783	0.2615	0.9661	0.6854	0.4571	0.2565	0.9644	0.6746	0.4415	0.2404
0.1864	0.9647	0.6486	0.3913	0.1793	0.9613	0.6283	0.3772	0.1827	0.9595	0.6160	0.3606	0.1680
0.2366	0.9598	0.5905	0.3151	0.1190	0.9562	0.5725	0.3074	0.1274	0.9543	0.5589	0.2905	0.1146
0.2909	0.9545	0.5347	0.2504	0.0770	0.9508	0.5195	0.2481	0.0873	0.9489	0.5047	0.2315	0.0768
0.3483	0.9491	0.4823	0.1970	0.0487	0.9453	0.4699	0.1989	0.0591	0.9433	0.4541	0.1830	0.0507
0.4081	0.9435	0.4340	0.1540	0.0304	0.9396	0.4244	0.1587	0.0397	0.9376	0.4079	0.1440	0.0332
0.4692	0.9379	0.3901	0.1199	0.0188	0.9340	0.3833	0.1265	0.0265	0.9319	0.3662	0.1131	0.0216
0.5308	0.9323	0.3509	0.0934	0.0116	0.9285	0.3465	0.1010	0.0178	0.9263	0.3292	0.0890	0.0141
0.5919	0.9268	0.3163	0.0730	0.0072	0.9231	0.3141	0.0810	0.0120	0.9209	0.2966	0.0702	0.0093
0.6517	0.9216	0.2862	0.0575	0.0045	0.9180	0.2858	0.0654	0.0082	0.9158	0.2683	0.0559	0.0061
0.7091	0.9166	0.2602	0.0457	0.0029	0.9133	0.2615	0.0533	0.0056	0.9110	0.2441	0.0449	0.0041
0.7634	0.9119	0.2380	0.0369	0.0019	0.9088	0.2407	0.0440	0.0040	0.9065	0.2236	0.0366	0.0029
0.8136	0.9077	0.2194	0.0302	0.0013	0.9049	0.2233	0.0370	0.0029	0.9025	0.2065	0.0304	0.0020
0.8592	0.9039	0.2040	0.0253	0.0009	0.9014	0.2089	0.0316	0.0021	0.8990	0.1924	0.0257	0.0015
0.8992	0.9006	0.1915	0.0217	0.0007	0.8984	0.1974	0.0276	0.0017	0.8960	0.1812	0.0222	0.0011
0.9333	0.8977	0.1817	0.0190	0.0005	0.8960	0.1884	0.0247	0.0013	0.8936	0.1725	0.0197	0.0009
0.9607	0.8955	0.1742	0.0171	0.0004	0.8942	0.1819	0.0226	0.0011	0.8918	0.1662	0.0180	0.0007
0.9812	0.8939	0.1689	0.0159	0.0004	0.8929	0.1775	0.0213	0.0010	0.8905	0.1621	0.0169	0.0007
0.9944	0.8928	0.1657	0.0151	0.0003	0.8923	0.1754	0.0207	0.0009	0.8900	0.1601	0.0163	0.0006
1.0000	0.8924	0.1643	0.0148	0.0003	0.8922	0.1747	0.0205	0.0009	0.8898	0.1595	0.0162	0.0006

Tabla 4a: Flujo de calor neto adimensional  $q_r(l)$  para F2,  $\rho = 0.0$ ,  $\omega = 0.5$  y diferentes distancias entre placas  $L_x$ .

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$
KIM-LEG	0.0025	0.0100	0.0111	0.0096	0.0039	0.0228	0.0343	0.0447
KIM-MIE	0.0046	0.0188	0.0134	0.0108	0.0060	0.0329	0.0446	0.0542
LEG-MIE	0.0021	0.0136	0.0096	0.0059	0.0024	0.0175	0.0169	0.0163
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$	$L_x = 0.1$	$L_x = 2$	$L_x = 5$	$L_x = 10$
KIM-LEG	0.26	2.52	13.69	70.54	0.42	6.33	38.51	200.00
KIM-MIE	0.49	4.66	4.92	33.55	0.64	6.25	9.46	100.00
LEG-MIE	0.22	4.71	11.05	18.46	0.27	8.72	21.26	36.36

Tabla 4b: Error absoluto y relativo, medio y máximo, de los flujos de calor neto dados en la tabla 4a.

La tabla 3b muestra los errores absolutos y relativos, medios y máximos, respectivamente. Se advierte como los errores absolutos, medios y máximos, crecen con la disminución del albedo de dispersión en la comparación Kim-Leg, y disminuyen en la comparación Kim-Mie y Leg-Mie. Con la disminución del albedo de dispersión se reducen los efectos de la dispersión anisotrópica, en el caso del medio puramente absorbente  $\omega = 0$ , los errores

absolutos de la comparación Kim-Leg y Kim-Mie coinciden, y los correspondientes a la comparación Leg-Mie son nulos.

Los errores relativos, medios y máximos, crecen con la disminución del albedo de dispersión en la comparación Kim-Leg. En la comparación Kim-Leg, el mayor error relativo máximo es del 4.38%, correspondiente a la coordenada  $l = 1$  donde el flujo de calor toma los valores mínimos.

$l$	LEG				MIE			
	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$
0.0000	0.9453	0.9442	0.9443	0.9443	0.9407	0.9394	0.9395	0.9395
0.0056	0.8499	0.8439	0.8441	0.8442	0.8433	0.8371	0.8373	0.8374
0.0188	0.7211	0.7453	0.7454	0.7455	0.7114	0.7361	0.7363	0.7363
0.0393	0.6038	0.6182	0.6183	0.6184	0.5914	0.6058	0.6060	0.6061
0.0667	0.4787	0.4856	0.4858	0.4858	0.4636	0.4703	0.4705	0.4705
0.1008	0.3633	0.3641	0.3642	0.3643	0.3467	0.3470	0.3471	0.3472
0.1408	0.2641	0.2616	0.2618	0.2618	0.2474	0.2443	0.2444	0.2445
0.1864	0.1850	0.1811	0.1812	0.1813	0.1694	0.1650	0.1651	0.1652
0.2366	0.1259	0.1216	0.1216	0.1217	0.1124	0.1077	0.1078	0.1078
0.2909	0.0833	0.0795	0.0795	0.0795	0.0722	0.0683	0.0683	0.0683
0.3483	0.0541	0.0509	0.0509	0.0509	0.0455	0.0423	0.0423	0.0423
0.4081	0.0347	0.0321	0.0321	0.0321	0.0282	0.0258	0.0258	0.0258
0.4692	0.0220	0.0201	0.0201	0.0201	0.0174	0.0156	0.0156	0.0156
0.5308	0.0140	0.0126	0.0126	0.0126	0.0106	0.0094	0.0094	0.0094
0.5919	0.0089	0.0079	0.0079	0.0079	0.0066	0.0057	0.0057	0.0057
0.6517	0.0058	0.0050	0.0050	0.0050	0.0041	0.0035	0.0035	0.0035
0.7091	0.0038	0.0032	0.0032	0.0032	0.0026	0.0022	0.0022	0.0022
0.7634	0.0025	0.0021	0.0021	0.0021	0.0017	0.0014	0.0014	0.0014
0.8136	0.0018	0.0015	0.0015	0.0015	0.0011	0.0009	0.0009	0.0009
0.8592	0.0013	0.0010	0.0010	0.0010	0.0008	0.0006	0.0006	0.0006
0.8992	0.0009	0.0008	0.0008	0.0008	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005
0.9333	0.0007	0.0006	0.0006	0.0006	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004
0.9607	0.0006	0.0005	0.0005	0.0005	0.0004	0.0003	0.0003	0.0003
0.9812	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002
0.9944	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002
1.0000	0.0005	0.0004	0.0004	0.0004	0.0003	0.0002	0.0002	0.0002

Tabla 5a: Flujo de calor neto adimensional  $q_r(l)$  para F2,  $\rho = 0.0$ ,  $\omega = 0.5$ ,  $L_x = 10$  y grilla uniforme.

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$
KIM-LEG	0.0073	0.0047	0.0047	0.0047	0.0545	0.0443	0.0441	0.0440
KIM-MIE	0.0099	0.0095	0.0094	0.0094	0.0642	0.0511	0.0509	0.0508
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$	$n_x = 50$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 42$	$n_x = 100$ $n_d = 60$	$n_x = 100$ $n_d = 90$
KIM-LEG	22.19	9.27	9.27	9.28	66.67	33.33	33.33	33.33
KIM-MIE	7.29	18.25	18.23	18.23	25.00	50.00	50.00	50.00

Tabla 5b: Error absoluto y relativo, medio y máximo, de los flujos de calor neto dados en la tabla 5a.

La tabla 4a muestra la distribución del flujo de calor neto adimensional para la función de dispersión F2, paredes negras,  $\rho = 0.0$ , un albedo de dispersión  $\omega = 0.5$  y diferentes distancias entre placas  $L_x$ . Se puede observar como se reduce el flujo de calor con la coordenada  $l$ ,

siendo mayor esta reducción a medida que aumente la distancia entre las placas. Para  $L_x = 1$  el medio absorbe solo un 10 % de la radiación emitida desde la pared caliente. Para  $L_x = 10$  el medio absorbe prácticamente toda la radiación emitida desde la pared caliente.

$l$	KIM				LEG				MIE			
	$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$		$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$		$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$	
	F2	B2										
0.0000	-0.5667	-0.5508	-0.9302	-0.8079	-0.5609	-0.5460	-0.9273	-0.8172	-0.5519	-0.5607	-0.8796	-0.8715
0.0056	-0.5589	-0.5429	-0.9003	-0.7752	-0.5493	-0.5331	-0.8777	-0.7580	-0.5403	-0.5479	-0.8293	-0.8121
0.0188	-0.5412	-0.5249	-0.8371	-0.7067	-0.5287	-0.5108	-0.8017	-0.6716	-0.5196	-0.5255	-0.7530	-0.7245
0.0393	-0.5143	-0.4978	-0.7515	-0.6156	-0.4999	-0.4808	-0.7117	-0.5752	-0.4910	-0.4952	-0.6634	-0.6259
0.0667	-0.4794	-0.4627	-0.6535	-0.5147	-0.4640	-0.4440	-0.6150	-0.4771	-0.4553	-0.4580	-0.5682	-0.5243
0.1008	-0.4375	-0.4210	-0.5519	-0.4147	-0.4219	-0.4017	-0.5180	-0.3844	-0.4136	-0.4149	-0.4739	-0.4270
0.1408	-0.3897	-0.3738	-0.4530	-0.3229	-0.3747	-0.3549	-0.4255	-0.3013	-0.3670	-0.3672	-0.3852	-0.3385
0.1864	-0.3371	-0.3222	-0.3611	-0.2434	-0.3233	-0.3047	-0.3402	-0.2299	-0.3163	-0.3157	-0.3047	-0.2612
0.2366	-0.2806	-0.2674	-0.2782	-0.1773	-0.2685	-0.2520	-0.2634	-0.1701	-0.2626	-0.2615	-0.2334	-0.1954
0.2909	-0.2211	-0.2101	-0.2047	-0.1237	-0.2113	-0.1975	-0.1948	-0.1208	-0.2064	-0.2052	-0.1711	-0.1401
0.3483	-0.1594	-0.1511	-0.1395	-0.0806	-0.1521	-0.1418	-0.1335	-0.0801	-0.1486	-0.1474	-0.1164	-0.0936
0.4081	-0.0962	-0.0911	-0.0809	-0.0453	-0.0918	-0.0854	-0.0778	-0.0455	-0.0896	-0.0888	-0.0674	-0.0535
0.4692	-0.0322	-0.0304	-0.0265	-0.0146	-0.0307	-0.0285	-0.0255	-0.0148	-0.0299	-0.0297	-0.0221	-0.0174
0.5308	0.0322	0.0304	0.0265	0.0146	0.0307	0.0285	0.0255	0.0148	0.0299	0.0297	0.0221	0.0174
0.5919	0.0962	0.0911	0.0809	0.0453	0.0918	0.0854	0.0778	0.0455	0.0896	0.0888	0.0674	0.0535
0.6517	0.1594	0.1511	0.1395	0.0806	0.1521	0.1418	0.1335	0.0801	0.1486	0.1474	0.1164	0.0936
0.7091	0.2211	0.2101	0.2047	0.1237	0.2113	0.1975	0.1948	0.1208	0.2064	0.2052	0.1711	0.1401
0.7634	0.2806	0.2674	0.2782	0.1773	0.2685	0.2520	0.2634	0.1701	0.2626	0.2615	0.2334	0.1954
0.8136	0.3371	0.3222	0.3611	0.2434	0.3233	0.3047	0.3402	0.2299	0.3163	0.3157	0.3047	0.2612
0.8592	0.3897	0.3738	0.4530	0.3229	0.3747	0.3549	0.4255	0.3013	0.3670	0.3672	0.3852	0.3385
0.8992	0.4375	0.4210	0.5519	0.4147	0.4219	0.4017	0.5180	0.3844	0.4136	0.4149	0.4739	0.4270
0.9333	0.4794	0.4627	0.6535	0.5147	0.4640	0.4440	0.6150	0.4771	0.4553	0.4580	0.5682	0.5243
0.9607	0.5143	0.4978	0.7515	0.6156	0.4999	0.4808	0.7117	0.5752	0.4910	0.4952	0.6634	0.6259
0.9812	0.5412	0.5249	0.8371	0.7067	0.5287	0.5108	0.8017	0.6716	0.5196	0.5255	0.7530	0.7245
0.9944	0.5589	0.5429	0.9003	0.7752	0.5493	0.5331	0.8777	0.7580	0.5403	0.5479	0.8293	0.8121
1.0000	0.5667	0.5508	0.9302	0.8079	0.5609	0.5460	0.9273	0.8172	0.5519	0.5607	0.8796	0.8715

Tabla 6a: Flujo de calor neto adimensional  $q_r(l)$  para F2, B2,  $\omega = 0.5$ ,  $\rho = 0.0$  y diferentes distancias entre placas  $L_x$ .

Comparación	error absoluto medio				error absoluto máximo			
	$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$		$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$	
	F2	B2	F2	B2	F2	B2	F2	B2
KIM-LEG	0.0106	0.0127	0.0197	0.0166	0.0156	0.0193	0.0398	0.0404
KIM-MIE	0.0171	0.0046	0.0539	0.0186	0.0241	0.0099	0.0881	0.0636
LEG-MIE	0.0065	0.0105	0.0342	0.0338	0.0091	0.0148	0.0487	0.0543
Comparación	error relativo medio				error relativo máximo			
	$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$		$L_x = 1.0$		$L_x = 5.0$	
	F2	B2	F2	B2	F2	B2	F2	B2
KIM-LEG	3.47	4.49	4.48	3.89	4.66	6.26	6.14	7.31
KIM-MIE	5.45	1.65	13.48	8.51	7.14	2.52	16.69	19.18
LEG-MIE	2.05	3.44	9.43	12.33	2.61	4.21	13.37	17.58

Tabla 6b: Error absoluto y relativo, medio y máximo, de los flujos de calor neto dados en la tabla 6a.

La tabla 4b muestra los errores absolutos y relativos, medios y máximos, respectivamente. Se puede advertir como los errores absolutos máximos crecen con la distancia entre las placas en la comparación Kim-Leg y Kim-Mie. Respecto a los errores relativos medios y máximos,

estos crecen con la distancia entre placas en todas las comparaciones. El mayor error relativo máximo, para  $L_x = 10$ , alcanza al 200 % en la comparación Kim-Leg, y el 100% en la comparación Kim-Mie, en la coordenada  $l = 1.0$ , donde el flujo de calor esta en el orden del error absoluto. Con el objeto de reducir estos elevados errores relativos se han repetido los cálculos con 50 y 100 volúmenes de control con malla regular, y 42, 60 y 90 direcciones angulares, cuyos resultados, interpolados linealmente en las coordenadas dadas por Kim, son mostrados en la tabla 5a. Se advierte como, en general, se reducen los errores absolutos y relativos, medios y máximos, con el incremento del número de volúmenes de control. El incremento del número de direcciones no tiene ningún efecto en la reducción de los errores relativos máximos. Los errores relativos máximos del 200% y del 100% se reducen al 33.33% y 50% respectivamente.

### **Emisión desde el medio isotérmico**

En este caso el medio participante esta caliente y las paredes frías. La intensidad emitida por el medio es difusa y no hay emisión desde las paredes. La única fuente de energía entrante esta uniformemente distribuida en el medio.

En la tabla 6a se muestra la distribución del flujo de calor neto adimensional para dos funciones de dispersión, F2 y B2, un albedo de dispersión  $\omega = 0.5$ , placas negras y difusas,  $\rho = 0.0$ , y diferentes distancias entre placas  $L_x$ . Se advierte la simetría respecto del punto medio de la separación entre placas. Debido a esta simetría se puede observar que, para  $L_x = 1$ , los valores del flujo de calor son muy próximos para las dos funciones de dispersión consideradas. Con el incremento de  $L_x$  se advierten diferencias entre los flujos de calor para las diferentes funciones de dispersión consideradas. Esto es consecuencia de la disminución del efecto de simetría.

La tabla 6b muestra los errores absolutos y relativos, medios y máximos, de los flujos de calor para las diferentes comparaciones efectuadas. Se advierte como los errores absolutos crecen con el incremento de la distancia entre las placas,  $L_x$ , para cada una de las funciones de dispersión anisotrópica consideradas. Para los errores relativos sucede algo similar excepto para los errores relativos medios de la función B2 en la comparación Kim-Leg. Se observa que los mayores errores relativos máximos corresponden a la función de dispersión B2 para  $L_x = 5$ .

### **CONCLUSIONES**

Se ha desarrollado un modelo matemático y un código computacional para radiación térmica con dispersión anisotrópica entre placas planas infinitas paralelas, acoplado el método de los volúmenes finitos y la teoría de Mie. Se han discutido las características del modelo matemático y del método numérico.

Los resultados obtenidos fueron comparados con los únicos resultados existentes en la literatura, donde se ha usado un método numérico diferente para resolver la ecuación de la transferencia radiante y generar las funciones de dispersión anisotrópica.

De esta comparación se puede concluir que los resultados obtenidos en este trabajo son muy buenos.

Los mayores errores relativos máximos, obtenidos en la comparación de las distintas funciones de dispersión (2.78% para F2), generan errores relativos máximos del 5.86 % para el caso de dispersión pura ( $\omega = 1$ , tabla 3b), y del 4.38 % para absorción pura ( $\omega = 0$ , tabla 3b). Este último error se puede atribuir a las particularidades propias de los diferentes métodos numéricos y condiciones de borde utilizadas para generar los resultados.

La separación de las placas muestra una influencia decisiva en los resultados, por lo que el método de los volúmenes finitos requiere una grilla espacial mas fina para reproducir los resultados de referencia.

Se ha verificado la precisión de la versión unidimensional del método de los volúmenes finitos para resolver problemas de radiación térmica. El método de los volúmenes finitos, extensivamente usado en dinámica de fluidos computacional, se ha mostrado totalmente confiable y seguro para resolver las configuraciones térmicas analizadas en este trabajo.

## REFERENCIAS

- An W., Ruan L. M., Qi H., Liu L. H., *Finite element method for radiative heat transfer in absorbing and anisotropic scattering media*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 96, 409-422, 2005.
- Bohren C., Huffman D., *Absorption and scattering of light by small particles*, Willey, New York, 1983.
- Brewster M. Q., *Thermal radiative transfer and properties*, John Wiley & Sons, 1992.
- Byun D., Lee C., Beak S. W., *Radiative heat transfer in discretely heated irregular geometry with an absorbing, emitting, and anisotropically scattering medium using combined Monte-Carlo and finite volume method*, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 47, 4195-4203, 2004.
- Chai J. C. K., *A finite volume method for radiation heat transfer*, PhD Thesis, 1994.
- Chai J. C., Lee H. S., Patankar S. V., *Finite Volume Method for Radiation Heat Transfer*, Journal of Thermophysics and Heat Transfer, vol. 8, no. 3, pp. 419-425, 1994.
- Chai J. C., Parthasarathy G., Lee H. S., Patankar S. V., *Finite Volume Radiative Heat Transfer Procedure for Irregular Geometries*, Journal of Thermophysics and Heat Mass Transfer, vol. 9, no. 3, pp. 410-415, 1995.
- Chui E. H. K., *Modeling of radiative heat transfer in participating media by the finite volume method*, PhD Thesis, 1990.
- Chui E. H., Raithby G. D., *Computation of radiant heat transfer on a non-orthogonal mesh using the finite-volume method*, Numerical Heat Transfer, Part B, vol. 23, no. 3, pp. 269-288, 1993.
- Dave J. V., *Scattering of electromagnetic radiation by a large, absorbing sphere*, IBM Scientific center, Palo Alto, California, 1969.
- Dombrowsky L. A., *Radiation heat transfer in disperse system*, Begell House, 1996.
- Gonçalves J., Coelho P., *Parallelization of the finite volume method*, Second international symposium on radiation transfer, Turkey, 1997.
- Hao J., Ruan L., Tan H., *Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional rectangular media*, Journal of Quantitative Spectroscopy & Radiative Transfer, 78, 151-161, 2003.
- Kim M. Y., Beak S. W., *Analysis of radiative transfer in cylindrical enclosures using the finite volume method*, Journal of Thermophysics and heat transfer, vol. 11, No. 2, pp. 246-252, 1997.
- Kim T. K., Lee H., *Effect of anisotropic scattering on radiative heat transfer in two-dimensional enclosures*, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, vol.31, no. 8, pp. 1711-1721, 1988.
- Kim T. K., *Radiation and combined mode heat transfer analysis in absorbing, emitting, and Mie-anisotropic scattering media using the s-n discrete ordinates method*, Ph. D. Thesis, University of Minnesota, 1990.
- Mathur S. R., Murthy J. Y., *Radiative Heat Transfer in Periodic Geometries Using a Finite Volume Scheme*, ASME Journal of Heat Transfer, vol. 121, n. 2, pp. 357-364, 1999.

- Modest M. F., *Radiative heat transfer*, Mc Graw-Hill, 1993.
- Raithby G. D., Chui E. H., *A Finite-Volume Method for Predicting Radiant Heat Transfer in Enclosures with Participating Media*, ASME Journal of Heat Transfer, vol. 112, no. 2, pp. 415-423, 1990.
- Siegel R., Howell J. R., *Thermal Radiation Heat Transfer*, Taylor & Francis, 1992.
- Trive D. N., O'Brien T. J., Amon C. H., *Modeling the radiation of anisotropically scattering media by coupling Mie theory with finite volume method*, Int. Journal of Heat and Mass Transfer, 47, 5765-5780, 2004.
- Wiscombe W. J., *Improved Mie scattering algorithms*, Applied optics, vol. 9, pp. 1505-1509, 1980.
- Wiscombe W. J., *Mie scattering calculations: advances in technique and fast, vector-speed computer codes*, NCAR technical note, National center for atmospheric research, 1979 (edited/revised 1996).