

## APROXIMACIÓN A LA TRANSFORMADA WAVELET CONTINUA MEDIANTE FUNCIONES SPLINE DE SOPORTE COMPACTO

Eduardo P. Serrano<sup>a</sup>, M. Alejandra Figliola<sup>b</sup> y Carlos E. D'Attellis<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Centro de Matemática Aplicada, Universidad Nacional de San Martín, Irigoyen 3100, San Martín,  
Pcia. de Buenos Aires, Argentina, eserrano@unsam.edu.ar

<sup>b</sup>Instituto del Desarrollo Humano, Universidad Nacional de General Sarmiento, J. M. Gutiérrez 1150,  
Los Polvorines, Pcia. de Buenos Aires, Argentina, afigliol@ungs.edu.ar

**Palabras clave:** Transformada Wavelet Continua, Littlewood-Paley, Funciones Splines

**Resumen.** Es sabido que muchas aplicaciones de procesamiento de señales e imágenes requieren de eficientes herramientas capaces de caracterizar fenómenos locales oscilantes, autosimilares o que realizan un patrón determinado. La Transformada Wavelet posee ventajosas capacidades para este tipo de aplicaciones. Su empleo está abierto a una variada gama de opciones y no se restringe al procesamiento de señales. La apropiada elección de la wavelet u ondita básica y de la transformada depende del problema por resolver y de su contexto. Cuando el método por aplicar privilegia la invariancia respecto de los operadores de traslación y de escala por sobre la descomposición atómica de la señal, es preferible el empleo de la transformada continua al del esquema de multirresolución basado en una ondita ortogonal. Entonces cobra particular importancia la elección de la ondita y de la red de los parámetros de traslación y de escala que posibiliten una eficiente aproximación de la transformada continua. Entonces, las ventajas del esquema de multirresolución se pierden y, en general, no se disponen de filtros discretos para calcularla.

En este trabajo se presenta una familia de onditas en la clase de funciones spline, de soporte compacto y oscilantes, con buenas propiedades de localización en tiempo y frecuencia. Tales onditas no generan un análisis multirresolución, pero permiten, eventualmente, descomponer la señal en sub-escalas. El cálculo a partir de los datos iniciales también puede realizarse en forma eficiente utilizando apropiados filtros finitos. En el esquema de cálculo se explotan las propiedades de escala de las funciones spline.

## 1. INTRODUCCIÓN

El análisis mediante *wavelets* u *onditas*, juega un significativo papel tanto en matemática pura como aplicada. Es considerado como una técnica tiempo-escala, es decir, un esquema que organiza la información de la señal en un espacio de fases, bien adaptado para caracterizar fenómenos locales oscilantes, autosimilares o que realizan un patrón determinado. Por esta razón, para este tipo de aplicaciones resulta más eficiente que el clásico análisis de Fourier (Daubechies, 1995; Mallat, 1998; Meyer, 1998).

La metodología wavelet es multifacética y abierta a una variada gama de opciones. La apropiada elección de la wavelet u ondita básica y de la transformada depende del problema por resolver y de su contexto. No puede hablarse de la mejor alternativa, pero sí pueden elegirse buenas opciones para encarar en forma eficiente un problema determinado.

La *Transformada Wavelet discreta* (DWT) está asociada con la descomposición atómica de la señal en términos de una base de wavelets en el contexto de un esquema de multirresolución. Los valores de la transformada discreta son los coeficientes de la representación y distribuyen la información de la señal en forma no redundante en una grilla bidimensional en el espacio de fases, manteniendo la precisión tiempo-frecuencia en proporción inversa. Alternativamente, en el caso de que sea necesario contar con la invariancia de la transformada por traslaciones y por dilataciones, es preferible emplear la *Transformada Wavelet continua* (CWT). Este requerimiento es imprescindible para la detección y caracterización de singularidades puntuales, el reconocimiento de patrones, el procesamiento de señales moduladas en frecuencia o en el análisis de turbulencia. La CWT se define como las sucesivas convoluciones:

$$W_{\nu} s(x) = (2^{\nu} \psi(2^{\nu} \cdot) * s)(x) \quad (1)$$

para  $\nu, x \in \mathcal{R}$  y donde  $\psi(x)$  es una apropiada wavelet. Para esta transformación cobra particular importancia la elección de la función  $\psi$  y de la red de parámetros  $(\nu_j, x_k)$ , de escala y traslación, ya que se espera que posibiliten la eficiente aproximación numérica de la transformada. En el caso continuo no se cuenta, en general, con un esquema de multirresolución propio de la transformación discreta ni con los filtros discretos asociados. Respecto de  $\psi$  se pretende que la función cuente con equilibradas propiedades: localización en el tiempo, suavidad o localización en frecuencia, oscilación ó número de momentos nulos y eficiencia numérica. Dependiendo de la aplicación pueden requerirse, además, condiciones de simetría, adecuado perfil o particulares características de filtrado.

Múltiples alternativas son conocidas y pueden encontrarse en la literatura. Citemos, por ejemplo, las gaussianas moduladas, las derivadas gaussianas moduladas o el clásico sombrero mejicano. Sin embargo, muchas de estas alternativas suelen implicar un considerable esfuerzo computacional que no siempre la aplicación justifica. Por otra parte, la interpretación u organización de la información proporcionada por la aproximación numérica puede ser muy compleja.

En este trabajo proponemos el empleo de wavelets simples: funciones spline de mínimo soporte y oscilantes, cuyas transformadas pueden calcularse sencillamente a partir de los datos de la señal. Poseen una excelente localización en un entorno de una frecuencia principal o característica, análoga a la de una gaussiana, y la transformada wavelet con estas wavelets puede encuadrarse en un esquema del tipo Littlewood-Paley. Otra de sus interesantes propiedades proviene de la autosimilaridad propia de las funciones spline que posibilitan una eficiente estructura del dominio tiempo-frecuencia y la utilización de un esquema recursivo que reduce el tiempo computacional para su cálculo.

## 2. WAVELETS TIPO LITTLEWOOD-PALEY

El denominado análisis de Littlewood-Paley se originó en una especial organización de los coeficientes de las series de Fourier con vistas a caracterizar ciertas propiedades en las funciones periódicas. Posteriormente el esquema fue generalizado al espacio de funciones de energía finita  $L^2(\mathcal{R})$  y puede considerarse como una especial y simple forma de análisis mediante wavelets, (Meyer, 2001). Tiene importantes aplicaciones, especialmente para la caracterización de espacios y clases funcionales. Exponemos en breve síntesis este esquema:

Sea  $\phi(x)$  una función de prueba suave y con rápido decaimiento. Su transformada de Fourier  $\widehat{\phi}(\omega)$  es suave y está soportada en la banda  $|\omega| \leq 2\pi$  y es idénticamente uno en el intervalo  $|\omega| \leq \pi$ . Definimos ahora la familia de funciones escaladas, para cada  $j \in \mathcal{Z}$ ,

$$\phi_j(x) = 2^j \phi(2^j x) \quad (2)$$

Esta familia constituye una aproximación a la identidad, para  $j \leq J$ , cualquiera sea  $J$ . Dada  $s$  una función en  $L^2(\mathcal{R})$ , para cada  $j \in \mathcal{Z}$  se definen los operadores pasa- bajo:

$$L_j s(x) = \phi_j * s(x) \quad (3)$$

y los operadores pasa- banda:

$$W_j s(x) = (L_j - L_{j-1})s(x) \quad (4)$$

Claramente, tenemos que  $\widehat{(L_j s)}(\omega)$  retiene las bajas frecuencias de la función, coincidiendo con  $\widehat{s}(\omega)$  en  $|\omega| \leq 2^j \pi$ , mientras que  $\widehat{(W_j s)}(\omega)$ , retiene las frecuencias de la función en la banda  $2^j \pi \leq |\omega| \leq 2^{j+1} \pi$ , siendo idénticamente nula en la banda infra-roja  $|\omega| \leq 2^j \pi$ .

Extendiendo el dominio de la transformada a las distribuciones, podemos verificar que  $W_j x^k = 0$ , para cualquier entero  $k$ , no negativo. En consecuencia, vale la siguiente identidad:

$$s(x) = \lim_{J \rightarrow \infty} \sum_{j \leq J} W_j s(x) \quad (5)$$

en el sentido de la norma cuadrática.

Tenemos pues, un esquema de análisis - síntesis, por escalas o bandas de frecuencias diádicas, que denominamos de Littlewood - Paley.

Definiendo:

$$\psi(x) = \phi(x) - \frac{1}{2}\phi(x/2) \quad (6)$$

obtenemos una wavelet admisible, que se denomina *wavelet tipo Littlewood - Paley*. Denotando,

$$\psi_j(x) = 2^j \psi(2^j x) \quad (7)$$

resulta que los operadores pasa banda definen una transformada wavelet:

$$W_j s(x) = \psi_j * s(x) \quad (8)$$

Queremos remarcar en este punto que muchos teoremas de caracterización de clases funcionales se enuncian en términos de las componentes  $W_j s(x)$ , por lo que resultan válidos (Meyer, 2001). Las wavelets precedentes poseen importantes propiedades teóricas, principalmente en

cuanto a la regularidad y la infinita oscilación. Sin embargo, observemos que la función  $\phi(x)$  no puede ser de soporte compacto y en general, o bien no verifica una relación de doble escala o bien no está asociada a un conveniente espacio de representación. Esto es un inconveniente desde el punto de vista numérico. La alternativa elegida consiste en preservar el esquema, relajando algunas propiedades, en beneficio de eficientes métodos para la aproximación y el cálculo. Para ello diseñaremos apropiadas análogas wavelets spline, además de refinarlas escalas, de modo de lograr una muy buena aproximación al esquema continuo.

### 3. FUNCIONES SPLINE

Las wavelets que pretendemos construir, teniendo en cuenta las particularidades mencionadas en el anterior inciso, serán definidas en términos de las denominadas funciones  $Q$ -spline, centradas y de orden impar. Demos una breve reseña acerca de estas funciones y de sus especiales propiedades, (Schonberg, 1993).

Para cada entero no negativo  $m$  impar, las funciones  $Q$ -spline de orden  $m$  se definen a partir de:

$$\widehat{Q}_m(\omega) = \left( \frac{\sin \omega/2}{\omega/2} \right)^{m+1} \quad (9)$$

o, en el dominio del tiempo:

$$Q_m(x) = \underbrace{Q_0 * \dots * Q_0}_{m+1 \text{ times}}(x) \quad (10)$$

siendo  $Q_0$  la función característica del intervalo  $[-1/2, 1/2]$ . La mismas pueden ser evaluadas mediante fórmulas explícitas:

$$Q_m(x) = \frac{1}{2m!} \sum_{|k| \leq (m+1)/2} sg(k) \binom{m+1}{k + (m+1)/2} |x - k|^{m+1} \quad (11)$$

donde  $sg(k) = (-1)^{k+(m+1)/2}$ . Las funciones  $Q_m(x)$  son simétricas y soportadas en el intervalo  $[-(m+1)/2, (m+1)/2]$ . Sus correspondientes transformadas de Fourier,  $\widehat{Q}_m(\omega)$ , están bien localizadas en la banda  $[-\pi, \pi]$  y decaen como  $|\omega|^{-(m+1)}$ . Además, estas funciones constituyen una base de Riesz del subespacio  $V_0^m \subset L^2(\mathcal{R})$ , generado por sus traslaciones enteras. Si  $s \in V_0^m$ :

$$s(x) = \sum_k s[k] Q_m(x - k) \quad (12)$$

con únicos coeficientes  $(s[k]) \in l^2(\mathcal{Z})$  de representación.

Las funciones  $Q$ -spline realizan una relación de escala finita, consecuencia directa de su definición (9):

$$\widehat{Q}_m(2\omega) = h_m(\omega) \widehat{Q}_m(\omega) \quad (13)$$

donde  $h_m(\omega)$  son polinomios trigonométricos  $2\pi$  periódicos. Esto nos dice que las funciones  $Q_m$  son *funciones de escala*, oblicuas, generadoras de un análisis de multirresolución (Mallat, 1998).

Por otra parte, remarquemos que las relaciones de escala diádicas son particulares expresiones del simple hecho de que una spline con nodos en cierta red de paso  $\delta x$  puede ser representada en término de splines con nodos en una red refinada, de paso  $\delta x/N$ .

#### 4. WAVELETS SPLINE

(Por simplicidad omitiremos el índice  $m$ , suponiendo que es un entero impar).  
Para cada  $n$  entero positivo definimos las funciones spline  $\phi_n(x) \in V_0$  a partir de:

$$\widehat{\phi}_n(\omega) = \widehat{Q}(\omega)q_n(\omega) \quad (14)$$

donde  $q_n(\omega)$  es un polinomio trigonométrico, de cosenos, de grado  $n$ . Resulta entonces que:

$$\phi_n(x) = \sum_{|k| \leq n} q_n[k]Q(x - k) \quad (15)$$

Estas funciones básicas son funciones spline de soporte compacto y sus transformadas  $\widehat{\phi}_n(\omega)$  operan como filtros analógicos pasa-bajo en la banda  $[-\pi, \pi]$ , casi ideales.

Por otra parte, la wavelet asociada  $\psi(x) = 2\phi_n(2x) - \phi_n(x)$  puede escribirse como:

$$\psi(x) = \sum_{|k| \leq K} g_n[k]Q(2x - k) \quad (16)$$

para un filtro finito  $(g_n[k])$ , producto de los filtros  $(q_n[k])$  y del de doble escala  $(h[k])$ .

La clave del diseño consiste en elegir los  $q_n$  de modo que:

$$\widehat{\phi}_n^{(i)}(0) = 0 \quad (17)$$

para todas las derivadas de orden  $1 \leq i \leq 2n$ . Esta propiedad asegura que la wavelet  $\psi$  tiene  $2n + 1$  momentos nulos. De esta forma, aproximamos este conjunto de funciones wavelet spline al esquema de Littlewood - Paley.

Entre sus características más relevantes, destaquemos que la wavelet  $\psi$  es una función spline con nodos en  $\mathcal{Z}/2$ , está centrada en  $x = 0$ , es simétrica y soportada en el intervalo  $I = [-(2n + m + 1), (2n + m + 1)]$  y tiene  $2n + 1$  momentos nulos.

Consecuentemente, la transformada  $\widehat{\psi}(\omega)$  está bien localizada en la banda  $\pi \leq |\omega| \leq 2\pi$  y decae como  $1/|\omega|^{m+1}$ . Más aún, podemos señalar que posee un máximo en una frecuencia central  $\omega_0 \approx 1,35\pi$ .

En este punto, vale la pena aclarar que los polinomios  $q_n$  deben diseñarse para cada valor de  $n$ . Sin embargo, para cada orden  $m$  fijo, evidencian una estructura recursiva. Una cómoda elección para las aplicaciones es  $m = 3$  y  $n = 2$  lo que resulta una wavelet spline cúbica con cinco momentos nulos. La formulación explícita de estas funciones se expone en la sección 7.

#### 5. ESQUEMA REFINADO DE LITTLEWOOD-PALEY

Supondremos que la señal  $s$ , por analizar, está muestreada en los puntos  $x_k = k/R$ , donde  $R$  es un entero positivo. Una vez seleccionada la wavelet analizante, definimos las sub-escalas racionales como sigue: Para cada  $j = -1, -2, \dots$  y para cada  $r = 0, \dots, R - 1$  consideramos el rango de parámetros  $\nu = (j, r) = j - \log_2(1/R + (R + r))$  y la correspondiente familia de wavelets asociada: Resulta entonces,

$$\psi_{(j,r)}(x) = \frac{2^j}{(R + r)/R} \psi\left(\frac{2^j x}{(R + r)/R}\right) \quad (18)$$

que constituyen un conjunto de funciones spline con nodos en la red de muestreo  $\mathcal{Z}/R$ . Sus soportes están escalados con el factor  $2^j R/(R+r)$ , esto es, en el intervalo  $|x| \leq (R+r)I/2^j R$ .

En el dominio de las frecuencias, cada sub-escala  $(j, r)$  se corresponde con una frecuencia característica  $\omega_{(j,r)} = 2^j \omega_0 R/(R+r)$ .

Análogamente, contamos con las funciones spline básicas:

$$\phi_{(j,r)}(x) = \frac{2^j}{(R+r)/R} \phi\left(\frac{2^j x}{(R+r)/R}\right) \quad (19)$$

De esta forma, el esquema organiza la información de la señal sobre la red  $(x_k, \omega_{(j,r)})$ , en el espacio tiempo-frecuencia.

Tal información está representada por los valores de la transformada

$$W_{(j,r)}(x_k) = (\psi_{(j,r)} * s)(x_k) \quad (20)$$

Éstos pueden calcularse a partir de los datos  $s(x_k)$ , mediante convoluciones discretas, utilizando un eficiente algoritmo que describimos en la próxima sección.

## 6. ALGORITMO DE CÁLCULO

Para la implementación de las transformadas continuas, normalmente se utiliza un *Algorithm à Trous* (Mallat, 1998), que esencialmente consiste en convolucionar los datos de la señal con valores muestrales de las wavelet.

El esquema de cálculo puede ser mejorado en el caso particular de nuestro diseño, explotando las particulares propiedades de las funciones spline.

Partimos de la representación discreta y finita de la señal:

$$s(x) = \sum_{|k| \leq K} s[k/R] \delta(x - k/R) \quad (21)$$

Una vez elegidos los parámetros  $m$  y  $n$ , vamos a omitir estos subíndices en las fórmulas siguientes, por simplicidad.

Primeramente, para cada  $j \leq 0$  y  $r = 0, \dots, R-1$ , definimos:

$$S_{(j,r)}(x) = Q\left(\frac{2^j \cdot}{(R+r)/R}\right) * s(x) \quad (22)$$

Observemos que estas funciones son splines de orden  $m$  con nodos en la red de muestreo y de soporte finito. Quedan entonces caracterizadas por finitos valores  $S_{(j,r)}(p/R)$ , con  $p \in \mathcal{Z}$ .

En primer lugar, para  $j = 0$ , resulta:

$$S_{(0,r)}(p/R) = \sum_{|k| \leq K} s[k/R] Q\left(\frac{p-k}{R+r}\right) \quad (23)$$

para todo entero  $p$ . Los finitos valores requeridos  $Q((k-p)/(R+r))$  pueden ser calculados sencillamente recurriendo a la fórmula dada en (11).

Ahora, utilizando las relaciones de doble escala, para cada  $j = -1, -2, \dots$  obtenemos la fórmula recursiva:

$$S_{(j,r)}(p/R) = \sum_k h[k] S_{(j+1,r)}\left(\frac{p - 2^{-(j+1)}(R+r)k}{R}\right) \quad (24)$$

Como sabemos, el cómputo de estas convoluciones discretas se realiza a partir de los datos  $(S_{(j+1,r)}(p/R))$  intercalando ceros en el filtro  $h$ . Notemos que como este filtro es finito, los conjuntos de valores  $S_{(j,r)}(p/R)$  también se mantienen finitos.

Prosiguiendo con el algoritmo, para  $j = 0, -1, \dots$  podemos evaluar las convoluciones:

$$L_{(j,r)}s(x) = \phi_{(j,r)} * s(x) \quad (25)$$

en los nodos utilizando el filtro finito  $q$  de la ecuación (15):

$$L_{(j,r)}s(p/R) = \frac{2^j}{(R+r)/R} \sum_k q[k] S_{(j,r)} \left( \frac{p - 2^{-j}(R+r)k}{R} \right) \quad (26)$$

Finalmente, completamos el esquema de cálculo, evaluando las transformadas mediante las diferencias dadas en (4)

$$W_{(j,r)}s(p/R) = (L_{(j,r)} - L_{(j-1,r)}) s(p/R) \quad (27)$$

para cada  $j = -1, -2, \dots$  y para cada entero  $p$ . Se entiende que, de acuerdo a lo señalado, el valor de la transformada es no nulo sólo para finitos  $p$

Resumiendo, el procedimiento implica los siguientes decisiones y pasos:

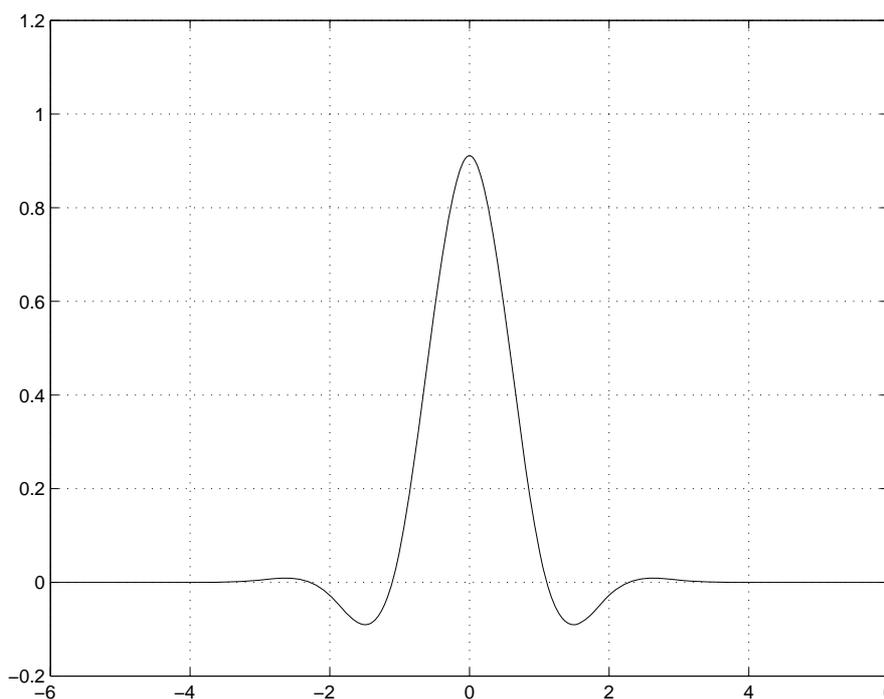


Figura 1: Función básica  $\phi_{3,2}(x)$

Dada la señal  $s$  por sus datos muestrales  $s[k/R]$ ,  
Decidir un nivel mínimo  $J_{min} < 0$  y luego proceder a:

- Para  $j = 0$  y  $0 \leq r < R$ ,  
     Calcular  $S_{(0,r)}[p/R]$   
     Calcular  $L_{(0,r)}[p/R]$

- Para  $j = -1, -2, \dots, J_{min}$ , y  $0 \leq r < R$ ,
  - Calcular  $L_{(j,r)}[p/R]$
  - Calcular  $W_{(j,r)}[p/R]$
  - Calcular  $S_{(j-1,r)}[p/R]$
  - $j \rightarrow j - 1$

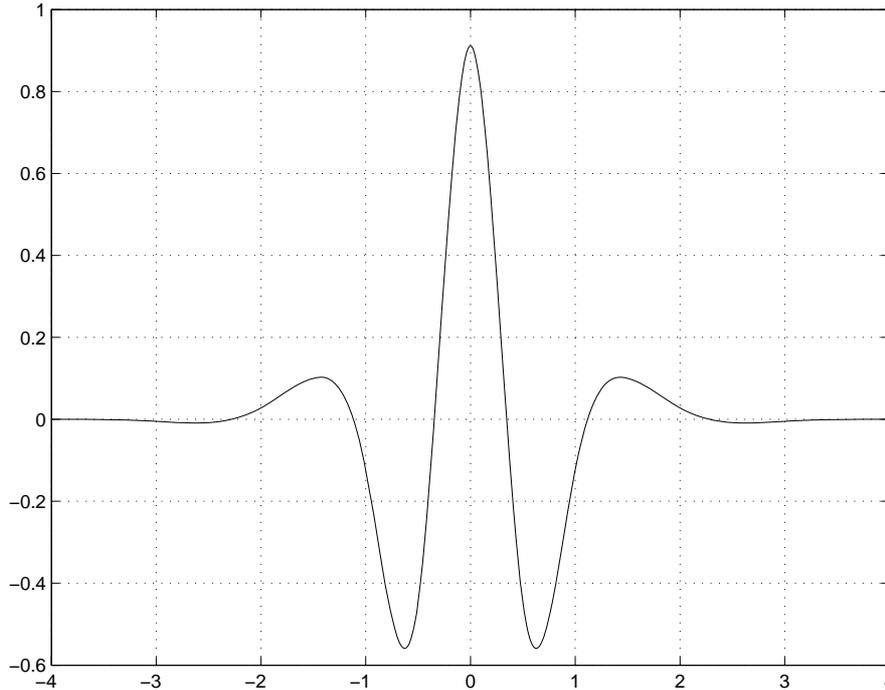


Figura 2: Función básica  $\psi_{3,2}(x)$

De este modo calculamos la transformada en la red finita  $(p/R, 2^j \omega_0 R / (R + r))$ , en el dominio tiempo-frecuencia.

Es importante observar que la banda de frecuencia es  $|\omega| \leq 2\pi$ , independientemente del paso  $1/R$ , simple consecuencia de la representación formal (21). En este sentido,  $R$  representa el parámetro que define la precisión relativa de frecuencia. El esquema formal puede adaptarse perfectamente a otras frecuencias de muestreo mediante un simple cambio de escala.

Otra observación importante es el hecho que, para cada  $r$  fijo, digamos para  $r = 0$ , las transformadas  $W_{(j,0)}(x)$  son funciones spline. Se plantea, entonces, si es posible reconstruir la señal, o una buena aproximación de la misma, a partir de un conjunto de valores  $W_{(j,0)}(2^{-j} p/2)$ , en forma análoga a la reconstrucción en un esquema de análisis de multirresolución. No podemos en el momento actual dar la respuesta precisa a esta cuestión. Referimos a Serrano and Fabio (1996) para un antecedente del problema.

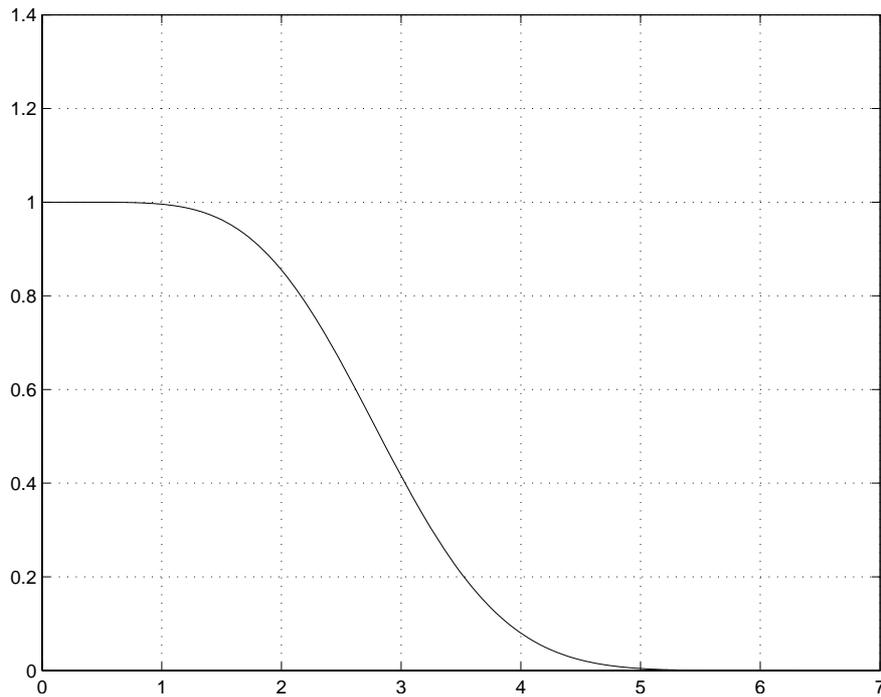


Figura 3: Transformada de Fourier  $\hat{\phi}_{3,2}(\omega)$

## 7. EJEMPLO

Consideremos el caso  $m = 3$  y  $n = 2$ . Las fórmulas explícitas para el caso de la spline cúbica son:

$$Q_3(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|x|^3 - |x|^2 + \frac{2}{3} & |x| \leq 1 \\ -\frac{1}{6}|x|^3 + |x|^2 - 2|x| + \frac{4}{3} & 1 \leq |x| \leq 2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

que está soportada en  $[-2, 2]$ . Los coeficientes de doble escala son:

$$\begin{aligned} h_3[0] &= 6/8 \\ h_3[-1] &= h_3[1] = 1/2 \\ h_3[-2] &= h_3[2] = 1/8 \end{aligned}$$

Esto conduce a la función básica:

$$\phi_{3,2}(x) = \sum_{|k| \leq 2} q_{3,2}[k] Q_3(x - k)$$

donde

$$\begin{aligned} q_{3,2}[0] &= 181/120 \\ q_{3,2}[-1] &= q_{3,2}[1] = -17/60 \\ q_{3,2}[-2] &= q_{3,2}[2] = 21/720 \end{aligned}$$

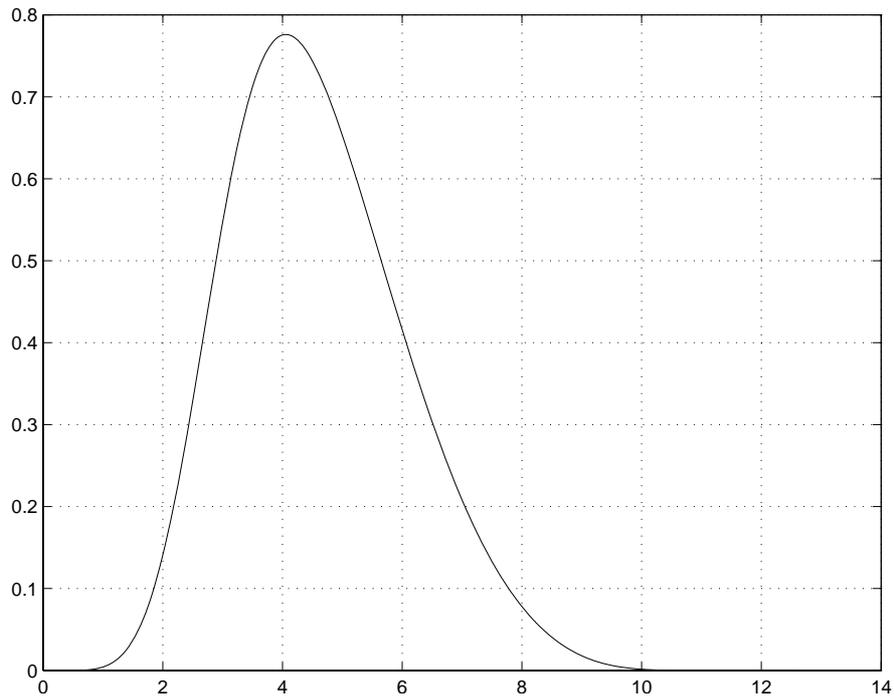


Figura 4: Transformada de Fourier  $\hat{\psi}_{3,2}(\omega)$

Finalmente la wavelet se calcula:

$$\psi_{3,2}(x) = \sum_{|k| \leq 6} g_{3,2}[k] Q_3(2x - k)$$

donde

$$\begin{aligned} g_{3,2}[0] &= 313/160 \\ g_{3,2}[-1] &= g_{3,2}[1] = -283/240 \\ g_{3,2}[-2] &= g_{3,2}[2] = 151/1920 \\ g_{3,2}[-3] &= g_{3,2}[3] = 61/480 \\ g_{3,2}[-4] &= g_{3,2}[4] = 13/960 \\ g_{3,2}[-5] &= g_{3,2}[5] = -7/480 \\ g_{3,2}[-6] &= g_{3,2}[6] = -7/1920 \end{aligned}$$

Exponemos la función básica y la wavelet en las figuras 1 y 2. Las respectivas transformadas de Fourier se exponen en las figuras 3 y 4.

## 8. CONCLUSIONES

Hemos presentado familias de wavelets u onditas en la clase de las funciones spline, con soporte compacto y momentos nulos. Las mismas constituyen una aproximación a las wavelets del tipo de Littlewood-Paley que proporcionan una simple y eficiente decomposición de una señal en tiempo y escala o rangos de frecuencia.

Por otra parte, explotando las propiedades de tales funciones spline es posible refinar el esquema, obteniéndose un reticulado en el tiempo-frecuencia, que permite organizar eficientemente la información de la señal.

Los métodos de cálculo pueden implementarse en forma recursiva a partir de la natural relación de autosimilaridad de las funciones spline.

Se exponen las fórmulas explícitas para la usual y cómoda elección de onditas cúbicas con cinco momentos nulos. El diseño precedente puede extenderse al dominio bi-dimensional.

En suma, proponemos una simple herramienta y una eficiente estrategia para implementar una variante del procesamiento de señales mediante wavelets.

## REFERENCIAS

Blu T. Splines: a perfect fit for signal and image processing. *IEEE Signal and Image Processing Magazine*, volume 16, 6, 1999.

Daubechies I. *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1995.

Mallat S. *A Wavelet Tour of Signal Processing*, Academic Press, Philadelphia, 1998.

Meyer Y. *Wavelets, Algorithms and Applications*, SIAM, Philadelphia, 1998.

Meyer Y. *Oscillating Patterns in Image Processing and Nonlinear Evolutions Equations*, University Lecture Series, AMS, 2001.

Serrano E. and Fabio, M. Undecimated Wavelet Transform from Orthogonal Spline Wavelets. *Wavelets Theory and Harmonic Analysis in Applied Sciences*, Birkhauser Ed., 1996.

Schonberg I. *Cardinal Spline Interpolation*, SIAM, Philadelphia, 1993.