

## SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES DE NAVIER STOKES POR EL MÉTODO DE VOLÚMENES FINITOS APLICADO A MALLAS NO ORTOGONALES

Carlos A. Bustamante<sup>a</sup>, Cesar Nieto<sup>a</sup> y Mauricio Giraldo<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Instituto de Energía y Termodinámica, Universidad Pontificia Bolivariana, Circular 1, 73-24 Medellín, Colombia, [iet@upb.edu.co](mailto:iet@upb.edu.co), <http://www.upb.edu.co/iet>

**Palabras clave:** Volúmenes finitos, Navier Stokes, SIMPLE, mallas estructuradas no ortogonales, mallas desplazadas.

**Resumen.** Se solucionan las ecuaciones de Navier Stokes en dominios de fronteras curvas para fluidos isotérmicos, incompresibles y Newtonianos en régimen laminar y en un espacio bidimensional. La división del dominio en volúmenes se hace mediante mallas estructuradas no ortogonales con el fin de adaptarse de la mejor manera a las geometrías analizadas. Se realiza la aproximación del término difusivo por medio del esquema de diferencias centradas, y se utiliza un esquema de diferencias desplazadas de segundo orden, llamado *Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinetics (QUICK)* para interpolar los valores de velocidad que componen el término convectivo. Los términos que aparecen en la ecuación de conservación discretizada, al ser aplicada a volúmenes de caras no ortogonales, se aproximan realizando un promedio simple entre los valores vecinos, para el caso del gradiente de presiones y el término convectivo adicional. El nuevo término difusivo se calcula empleando el teorema de la divergencia aplicado a la derivada de una cantidad escalar. Para lograr un enlace entre la presión y la velocidad se utiliza el algoritmo de solución *Semi-Implicit Method for Pressure-Linked Equations (SIMPLE)* aplicado a mallas desplazadas. El código creado (*2D-SIMPLENS*) es evaluado mediante el análisis de flujo en una cavidad rectangular para un número de Reynolds 1000. Posteriormente se encuentra solución a la situación de flujo alrededor de un cilindro circular para números de Reynolds menores que 40.

## 1. INTRODUCCIÓN

La utilidad de los métodos de solución de sistemas de ecuaciones diferenciales radica en la aplicabilidad a situaciones generales. Entre las cualidades que propician la generalidad del método la capacidad de resolver las ecuaciones gobernantes en todo tipo de geometrías es un aspecto primordial. La ortogonalidad es la condición que permite expresar las ecuaciones gobernantes discretizadas de una forma simple, pero que puede restringir la capacidad de hallar solución en geometrías curvas. Se plantea la necesidad de ampliar la capacidad de modelación para poder adaptar la malla a curvas presentes en la geometría que interviene en los fenómenos a resolver relacionados con la dinámica de fluidos o, más específicamente, con la solución de la ecuación de Navier Stokes aplicada a un fluido con un comportamiento laminar en estado estacionario, y que se considera incompresible, isotérmico y Newtoniano. Los volúmenes finitos se deformarán de acuerdo a la geometría, y por lo tanto sus caras serán no ortogonales entre sí, por lo que las ecuaciones discretizadas en cada uno de dichos volúmenes tiene que valerse de aproximaciones adicionales con el fin de no perder la precisión con respecto al caso ortogonal.

Las estrategias comúnmente utilizadas para adaptar el mallado a geometrías curvas se pueden agrupar en tres diferentes grupos: mallas no estructuradas, mallas de frontera inmersa y mallas adaptadas al cuerpo. Las mallas no estructuradas parecen la mejor opción en cuanto a geometría se trata, pues en estas no es necesario que los volúmenes conserven una orientación definida con respecto a sus vecinos y por lo tanto sus lados son completamente libres para aproximar las curvas presentes en el dominio. En el caso de la solución de las ecuaciones de Navier Stokes se encuentran algunas desventajas relacionadas con la complejidad adicional del algoritmo de solución. Como primera complicación se hace necesario usar mallas desplazadas, estrategia utilizada por Vidovic et al. (2004); o en su defecto esquemas de interpolación que garanticen un buen acoplamiento entre las variables primitivas velocidad y presión, tal como lo implementan Perron et al. (2004). Además, los esquemas de interpolación tales como las diferencias desplazadas deben ser retroalimentados con los valores de la velocidad para así elegir las cantidades nodales más adecuadas, que para el caso no estructurado resulta en una labor compleja, pues es probable que los nodos no formen un patrón consecutivo en ninguna de las direcciones de los ejes del sistema de referencia.

Las mallas de frontera inmersa preservan la ortogonalidad en todo el dominio, excepto en la fronteras. Por lo tanto la malla se sobrepone al dominio real del problema, teniendo en cuenta los interceptos con la frontera real para crear volúmenes de caras no ortogonales. Dichas caras unen estos puntos para crear la frontera aproximada. Es así como el volumen que queda dividido por la frontera se une con el vecino adyacente en la dirección normal a la frontera para formar un volumen donde solo una de sus caras se encuentra inclinada. En esta superficie unitaria la función se aproxima por medio de un polinomio cuyos coeficientes serán parte de la solución de acuerdo con el método explicado y planteado por Ye and Mittal (1999). Desde este enfoque es posible conservar la simplicidad que supone el algoritmo para mallas ortogonales pero aún así existen algunas desventajas relacionadas con los datos de entrada algoritmo. Los programas de preprocesamiento disponibles tales como *GID* y *Gambit*, no tienen la capacidad de diseñar mallas ortogonales en geometrías curvas de acuerdo con lo que plantea esta metodología, por lo tanto se convierte en un paso adicional crear los datos de entrada que contengan la información sobre los interceptos de los elementos y la curva real del dominio.

En el presente estudio se utilizan mallas estructuradas que se adaptan a la forma de la frontera, importadas desde el programa comercial *GID*, con el propósito de solucionar las ecuaciones de Navier Stokes en dominios bidimensionales. Para su aplicación se utilizan diver-

Los esquemas de interpolación tales como diferencias centradas y diferencias desplazadas de segundo orden *QUICK* revisadas en [Versteeg and Malalasekera \(1995\)](#). Las componentes del gradiente de presión al igual que del término convectivo que aparece en la discretización de la ecuación aplicada a caras no ortogonales, son evaluados a partir de un promedio simple. El algoritmo de solución *SIMPLE* introducido en [Patankar \(1980\)](#) se implementa con el fin de acoplar la ecuación de continuidad con la ecuación de momentum por medio de las correcciones a las variables primitivas, que se obtienen al solucionar una ecuación de corrección de presiones. Los procedimientos mencionados se sintetizan en el código de solución *2D-SIMPLENS*, implementado mediante *Fortran*. Este es aplicado al análisis de situaciones de flujo en cavidades rectangulares y flujo externo alrededor de un cilindro circular hasta un número de Reynolds característico donde el régimen de flujo sea laminar y se garantice estado estacionario. La combinación de esquemas de interpolación así como el tratamiento de mallas desplazadas en divisiones no ortogonales y la adecuación del algoritmo de solución, permiten el uso del método de volúmenes finitos en geometrías curvas sin perder la relativa simplicidad que en arreglos ortogonales existe.

## 2. ECUACIONES DE NAVIER STOKES

El movimiento de los fluidos incompresibles y Newtonianos está descrito por las ecuaciones de Navier Stokes. Un análisis detallado del movimiento de un fluido con dichas características se logra a partir de la solución de este sistema de ecuaciones, constituido por expresiones que describen la conservación de la masa y del momentum lineal. Masa y momentum se expresan en su forma intensiva, es decir, unidad y velocidad, respectivamente, para formar ecuaciones que establecen relaciones entre los mecanismos de transporte, la acumulación y las fuentes.

Considerando un análisis de flujo bidimensional en estado estacionario, en ausencia de fuerzas de cuerpo, y de acuerdo a las características planteadas para el fluido de trabajo, se simplifican las ecuaciones de conservación para llegar a su forma reducida tanto para la conservación de la masa (1) como para la ecuación del momentum (2), donde  $\vec{u}$ ,  $p$ ,  $\mu$  y  $\rho$  corresponden al vector velocidad ( $u, v$ ), presión, viscosidad dinámica y densidad, respectivamente.

$$\nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (1)$$

$$\rho \vec{u} \cdot \nabla \vec{u} - \mu \nabla^2 \vec{u} = -\nabla p \quad (2)$$

Por lo tanto la ecuación de conservación del momentum (2) balancea flujos convectivos (término no lineal), flujos difusivos (laplaciano de la velocidad) y término fuente (gradiente de presión). Este conjunto de ecuaciones corresponde al modelo que describe la dinámica del fluido incompresible y Newtoniano, y cuya solución se obtiene a partir del Método de Volúmenes Finitos para régimen laminar.

## 3. MALLADO ESTRUCTURADO NO ORTOGONAL

Las mallas estructuradas mantienen un patrón fijo que se acomoda a las variaciones del dominio. Por esta misma naturaleza la orientación de los elementos con respecto a los vecinos se mantendrá constante, es decir, cada volumen está rodeado por cuatro vecinos ubicados genéricamente con respecto a este. Por lo tanto es válido referirse a los vecinos según las posiciones norte ( $I, J + 1$ ), sur ( $I, J - 1$ ), este ( $I + 1, J$ ) y oeste ( $I - 1, J$ ).

Luego de dividirse el dominio en una malla estructurada no ortogonal, la discretización de las ecuaciones gobernantes en los volúmenes resultantes puede realizarse de dos formas bási-

cas según la adaptabilidad del sistema de coordenadas utilizado. El primer caso es aquel en que el sistema de coordenadas es único para todo el dominio, es decir, los parámetros que lo definen (vectores unitarios, escalas y transformaciones con respecto a un sistema de coordenadas ortogonal) son constantes para todos los volúmenes finitos que conforman el dominio. Dependiendo de la geometría del problema y de la complejidad en cuanto a implementación del código, se elige la mejor opción: rectangular, cilíndrico, esférico, entre otros. Otra alternativa es generar un sistema de coordenadas con parámetros variables que se adapte a cada uno de los volúmenes, según la orientación de las caras que lo conforman. A la luz de este nuevo sistema de coordenadas las ecuaciones gobernantes también cambian su forma de acuerdo con las transformaciones y vectores unitarios variables, convirtiéndose así en las ecuaciones de conservación de las cantidades o propiedades de interés en la dirección ortogonal a las caras de los volúmenes que conforman el dominio. [Wesseling et al. \(1999\)](#) plantea las estrategias y los modelos de cálculo necesarios para aplicar tal metodología en problemas de dinámica de fluidos utilizando mallas escalonadas. La primera opción, aunque supone mayor número de aproximaciones que disminuyen la eficiencia de la solución, establece un marco de aplicación casi intuitiva del método desde su concepción matemática básica. Es así como las aplicaciones, ejemplos y el enfoque de la programación de los códigos se hace con base en un sistema de coordenadas rectangular fijo, que proporciona una idea general de la discretización de las ecuaciones de transporte de acuerdo su formulación integral.

Las mallas desplazadas o *staggered grids* en arreglos estructurados no ortogonales se construyen de forma similar que en el caso ortogonal, pues aún se puede diferenciar una dirección predominante en la malla, a diferencia de las mallas no estructuradas. Por otro lado la formación de los volúmenes correspondientes a las variables  $u$  y  $v$  (velocidad del fluido en  $x$  y en  $y$ , respectivamente), se realiza sin recurrir a transformaciones del sistema de coordenadas base. Se establece que los vértices de los volúmenes desplazados corresponden a los puntos medios de las superficies del volumen central y su vecino, paralelas al desplazamiento en esa misma dirección, tal como se muestra en la [Figura 1](#). Los volúmenes desplazados resultantes son análogos a los obtenidos en una malla estructurada ortogonal. Sin embargo, se debe tener en cuenta que la dirección en la que la malla principal se desplaza para crear las mallas secundarias, no corresponde exactamente a la dirección de la variable dependiente velocidad. La dirección de desplazamiento está dada por la curvatura de las fronteras y la componente de la velocidad que geoméricamente predomina, por ejemplo, el volumen correspondiente a la velocidad  $u$  se desplaza siguiendo la malla principal en la dirección  $x$ .

#### 4. DISCRETIZACIÓN EN VOLÚMENES FINITOS

A continuación se realizan las aproximaciones necesarias para obtener las ecuaciones de Navier Stokes discretizadas, según el método de volúmenes finitos, aplicadas a un fluido incompresible, isotérmico, bidimensional y Newtoniano cuyo movimiento se da en régimen laminar y estado estacionario. El primer paso es llevar el sistema a su forma integral, realizando la integración de cada uno de los términos que conforman las ecuaciones sobre volúmenes de la forma mostrada en la [Figura 2](#), donde cada cara recibe un número que corresponde al subíndice de los parámetros que la definen.

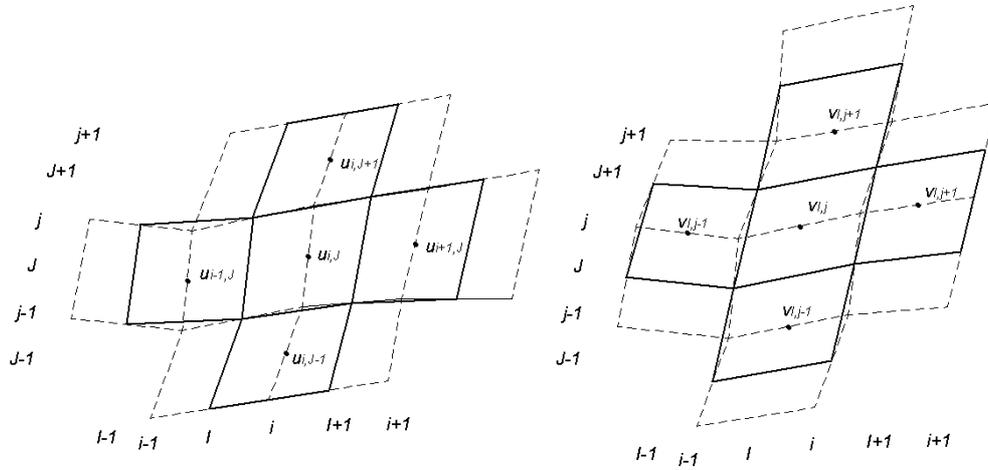


Figura 1: Mallas desplazadas en las direcciones predominantes  $u$  y  $v$ .

#### 4.1. Ecuación de conservación de la masa

Al integrar la expresión (1) sobre un volumen genérico de la malla principal (no desplazada) y aplicar el teorema de la divergencia, se llega a la siguiente expresión.

$$\oint_S (\rho \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = 0 \tag{3}$$

Teniendo en cuenta que el producto del vector normal  $\vec{n}$  por el diferencial de superficie bidimensional está dado por la expresión (4), el valor de la integral se puede aproximar según (5), que representa la ecuación de continuidad discretizada en volúmenes de caras no ortogonales.  $N$  representa el número de caras del volumen, que para este caso (paralelogramo) equivale a 4,  $dx$  y  $dy$  representan la diferencia entre dos puntos (vértices) que definen la superficie, para el caso bidimensional, en las coordenadas  $x$  y  $y$  respectivamente. Los vectores  $\hat{i}$  y  $\hat{j}$  corresponden a los vectores unitarios ortogonales del sistema de coordenadas  $x y$ .

$$\vec{n} dS = dy \hat{i} - dx \hat{j} \tag{4}$$

$$\oint_S (\rho \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = \sum_{l=1}^N (\rho \vec{u} \cdot \vec{n} \Delta S)_l = 0 \tag{5}$$

El componente del vector velocidad  $u$  en los puntos  $I, j$  e  $I, j - 1$ , y  $v$  en  $i, J$  e  $i - 1, J$  no se conocen directamente, por lo tanto es necesario hacer un segundo grupo de aproximaciones para relacionar tales cantidades con los valores nodales de la variable según las mallas escalonadas ilustradas en la Figura 1. La ecuación (6) expresa la componente de la velocidad desconocida  $u$  en el punto  $I, j$ .

$$u_{I,j} = \frac{1}{4} (u_{i,J} + u_{i,J+1} + u_{i-1,J+1}^* + u_{i-1,J}^*) \tag{6}$$

Estos promedios suponen una predominancia de los valores elegidos de velocidades en las zonas descritas en la Figura 3 para las velocidades en  $x$ . También puede observarse como la no

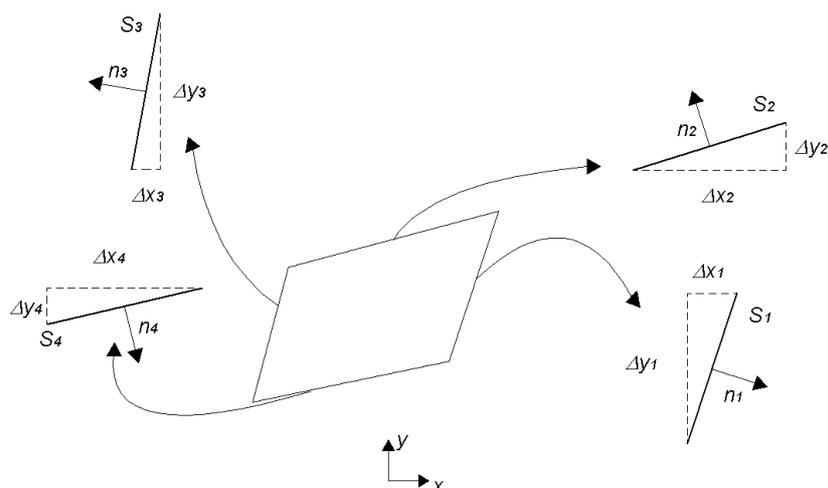


Figura 2: Volumen limitado por la superficie de integración.

ortogonalidad de las caras con respecto al sistema de coordenadas hace necesaria la inclusión de términos en la ecuación discretizada, que involucran además de los vecinos norte ( $i, J + 1$ ), sur ( $i, J - 1$ ), oeste ( $i - 1, J$ ) y este ( $i + 1, J$ ), volúmenes a su vez vecinos de estos últimos, lo cual puede traer complicaciones en el momento de armar la matriz de coeficientes y al definir condiciones de frontera. Los términos producto de la no ortogonalidad tienden a cero conforme las caras de los volúmenes se acercan al ángulo recto, y por esta razón tales contribuciones se manejan de forma explícita, es decir, se calculan con la información de la iteración inmediatamente anterior. Por lo tanto, de aquí en adelante, las  $u^*$  corresponden a valores de velocidad disponibles o computables con la información que a ese momento se encuentra en memoria. La ecuación de continuidad discretizada (5), se utilizará más adelante para deducir la ecuación de corrección de presiones.

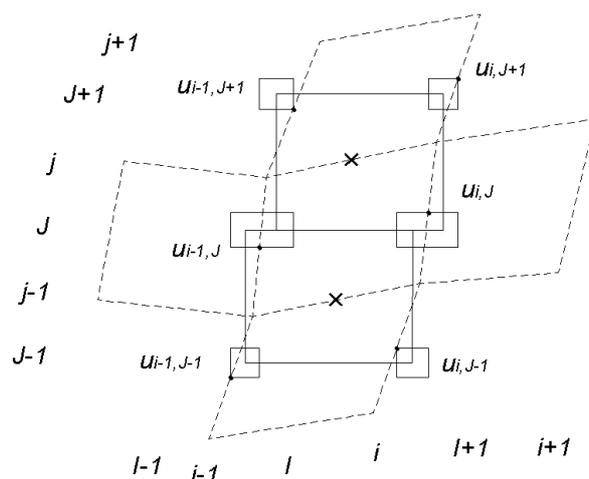


Figura 3: Aproximación espacial de valores de las velocidades.

## 4.2. Ecuación de conservación del momentum

Luego de integrar la expresión (2) y aplicar el teorema de la divergencia, se obtiene la ecuación de conservación del momentum en su forma vectorial, integral y linealizada (7), que describe la dinámica de un fluido con las propiedades mencionadas arriba. En esta ecuación vectorial los términos que contienen la variable velocidad (difusivo y convectivo) son agrupados al lado izquierdo en la integral de superficie, mientras el término fuente relacionado con la presión queda al lado derecho. La ecuación de conservación del momentum es linealizada utilizando la información de la velocidad disponible en memoria  $u^*$  en el término convectivo.

$$\oint_S (\rho \vec{u}^* \vec{u} - \mu \vec{\nabla} \vec{u}) \cdot \vec{n} dS = - \oint_S p \vec{n} dS \quad (7)$$

Para llevar a cabo la discretización de la ecuación anterior en los volúmenes desplazados, se debe descomponer en las direcciones  $x$  y  $y$ . Para ilustrar el proceso se considera la ecuación en  $x$  (8), que se discretiza en el volumen desplazado en esta dirección (Figura 1).

$$\oint_S (\rho \vec{u}^* u - \mu \vec{\nabla} u) \cdot \vec{n} dS = - \oint_S p n_x dS \quad (8)$$

Si se considera un volumen de  $N$  caras y la aproximación para integrales de superficie utilizada hasta ahora, se puede llegar a la expresión (9). Esta es el resultado de un proceso similar al aplicado a la ecuación de continuidad y por el cual se subdivide la superficie total en cuatro superficies donde se aproximan los valores de las variables en el punto central. Como se puede observar en la ecuación (9), es necesario realizar otras aproximaciones ya que tanto los valores de los gradientes de velocidad (términos difusivos) como los correspondientes a la velocidad y presión, no se conocen en algunos de los puntos establecidos por esta aproximación inicial. Las siguientes aproximaciones están agrupadas según su naturaleza y de acuerdo a la variable en cuestión.

$$\sum_{l=1}^N ((\rho \vec{u}^* u - \mu \nabla u) \cdot \vec{n} \Delta S)_l = - \sum_{l=1}^N (p n_x \Delta S)_l \quad (9)$$

### 4.2.1. Términos Difusivos

La discretización de los flujos difusivos por medio del esquema de diferencias centradas, aplica solo para algunas de las derivadas que conforman los gradientes de la ecuación (9), pues en esta aparecen términos adicionales asociados con la no ortogonalidad de las caras de los volúmenes con respecto al sistema de coordenadas. Tales derivadas de la velocidad no se pueden calcular utilizando el esquema de diferencias centradas, pues no se conocen algunos valores nodales necesarios. Es por esto que se considera un modelo semi-implícito de acuerdo al teorema de la divergencia para discretizar las derivadas restantes. Considere la expresión (10), en términos de una variable dependiente cualquiera, que se deriva con respecto a la variable independiente  $x_i$ , donde  $i$  toma cualquiera de los valores uno, dos o tres para representar a  $x$ ,  $y$  o  $z$  respectivamente. Los  $\hat{e}_i$  corresponden a los vectores unitarios ortogonales  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$  y  $\hat{k}$ .

$$\frac{\partial \phi}{\partial x_i} = \frac{1}{V} \int_V \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dV = \frac{1}{V} \oint_S \phi \hat{e}_i \cdot \vec{n} dS \approx \frac{1}{V} \sum_k \phi_k (\hat{e}_i \cdot \vec{n} \Delta S)_k \quad (10)$$

Según la Figura 4, se reemplazan los valores genéricos de la ecuación (10), para producir aproximaciones de la forma (11), en ese caso para el calculo de la derivada en el punto  $I + 1, J$ , con  $\Delta x_{a,b}^{c,d} = x_{c,d} - x_{a,b}$ .

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{I+1,J} = -\frac{1}{V_{i+1,J}}(u_{i+1,J}\Delta x_{i+1,j-1}^{i+1,j} + u_{i,J}\Delta x_{i,j}^{i,j-1} + u_{I+1,j}^*\Delta x_{i+1,j}^{i,j} + u_{I+1,j-1}^*\Delta x_{i,j-1}^{i+1,j-1}) \quad (11)$$

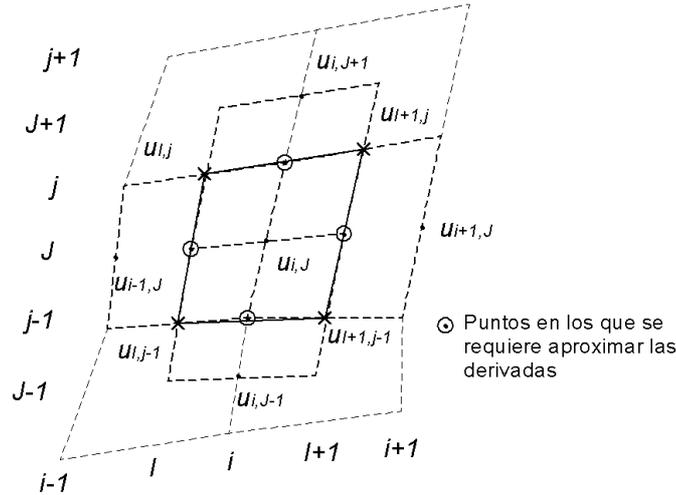


Figura 4: Aproximación de las derivadas por medio del teorema de la divergencia.

#### 4.2.2. Términos convectivos

Los términos que representan la convección se aproximan de forma similar a los difusivos, es decir, para los componentes que no se hacen nulos cuando las caras del volumen son ortogonales a alguno de los ejes del sistema coordinado se aplica el esquema de segundo orden *QUICK*, mientras los términos convectivos restantes se aproximan haciendo un promedio entre los nodos más cercanos. El no aplicar esquemas de interpolación más avanzados a estos términos, está justificado por su poco peso con respecto a los términos tradicionales de las mallas estructuradas. En la siguiente expresión se ilustra el uso del esquema *QUICK* para interpolar el valor de  $u$  en el punto  $I + 1, J$ .

$$(\rho u^*)_{I+1,J} = (\rho u^*)_{I+1,J}(a_1 u_{i+1,J} + b_1 u_{i,J} + c_1 u_{i+2,J} + d_1 u_{i-1,J}) \quad (12)$$

Los coeficientes están definidos en el grupo de ecuaciones (13), en términos del parámetro de desplazamiento  $f$ , cuyo valor está dado por la siguiente secuencia lógica: si  $u_k > 0$  entonces

$$f_k = 1 \text{ si no } f_k = 0$$

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{3}{8}(2 - f_k) \\ b_k &= \frac{3}{8}(1 + f_k) \\ c_k &= -\frac{1}{8}(1 - f_k) \\ d_k &= -\frac{1}{8}(f_k) \end{aligned} \tag{13}$$

#### 4.2.3. Valores de Presión

Los términos ubicados al lado derecho de la ecuación (9) son calculados de acuerdo con la disponibilidad del valor de la presión en memoria, pues es una característica del algoritmo de solución *SIMPLE* hacer una suposición inicial de la presión en la primera iteración, para luego de sucesivas soluciones del sistema, retroalimentar este valor a la iteración presente desde la iteración inmediatamente anterior. En mallas escalonadas, estrategia utilizada para mejorar el acople entre las variables velocidad y presión, la variable dependiente presión es almacenada de acuerdo a sus valores nodales con respecto a la malla principal. Es por esto que se requiere calcular, según un promedio, algunos de los valores que componen el término resultante de la integral de superficie sobre la presión. En la ecuación (14) se aproxima el valor de la presión en  $i, j$  en términos de los valores nodales o disponibles en memoria. De manera similar se aproxima  $p_{i,j-1}$ . Las otras contribuciones al término  $p_{I,J}$  y  $p_{I+1,J}$  están disponibles en la memoria.

$$p_{i,j} = \frac{1}{4}(p_{I+1,J} + p_{I+1,J+1} + p_{I,J+1} + p_{I,J}) \tag{14}$$

#### 4.2.4. Ensamble

Finalmente se construye la ecuación de momentum discretizada en  $x$ , reorganizando y agrupando en coeficientes los componentes de la expresión resultante de reemplazar en (9) cada uno de sus términos por las aproximaciones realizadas producto del esquema de diferencias centradas, el *QUICK* y las demás estrategias utilizadas para las contribuciones propias de la no ortogonalidad. La expresión resultante del ensamble forma la matriz de solución de la ecuación de momentum en  $x$  discretizada, que hasta este momento no se puede solucionar para la velocidad debido a la falta de información sobre la presión. La forma general la ecuación de momentum discretizada, solo aplica a los volúmenes internos, es decir, aquellos que no tienen contacto con la frontera del dominio. Para los volúmenes ubicados en la frontera se deben eliminar algunos coeficientes y agregar términos adicionales conocidos como fuentes, dependiendo del tipo de frontera a aplicar. El proceso de discretización para la ecuación de momentum en  $y$  se realiza de manera similar, pero sobre el volumen desplazado en dicha dirección (Figura 1).

### 5. ALGORITMO DE SOLUCIÓN SIMPLE

En el algoritmo *SIMPLE* se utiliza una ecuación adicional que hace las veces de enlace necesario entre las variables velocidad y presión, ya que de las tres ecuaciones que permiten

resolver el sistema bidimensional de Navier-Stokes hay una (continuidad) en la cual la presión no aparece explícita. El proceso es descrito por el esquema de la Figura 5, y comienza con una suposición inicial que permite solucionar el sistema de ecuaciones lineales producto de la discretización de la ecuación de momentum, para obtener valores de velocidades  $u$  y  $v$  preliminares. Estas se corrigen por medio de los resultados obtenidos al solucionar la ecuación adicional que se deduce a continuación.

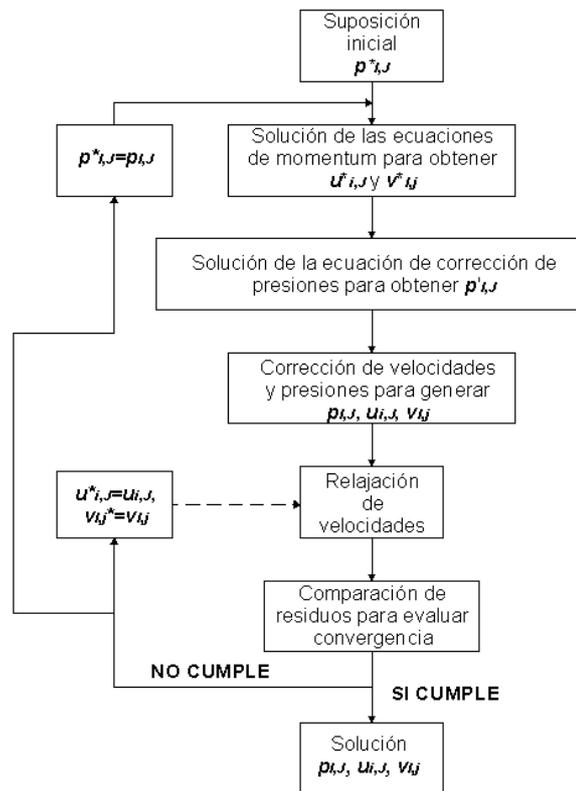


Figura 5: Esquema del algoritmo de solución *SIMPLE* para solucionar la ecuación de Navier Stokes.

Para llegar a una expresión de corrección de presiones en mallas no ortogonales, se considera la siguiente manera de escribir en forma simplificada la ecuación discretizada de momentum, para un valor de velocidad  $u^*$  que corresponde al resultado de solucionar la ecuación de acuerdo a un campo de presiones supuesto  $p^*$

$$a_{i,j}u^*_{i,j} - \sum_{l=1}^{N+2} (au^*)_l = - \sum_{l=1}^N (p^*n_x \Delta S)_l + \bar{S} \quad (15)$$

Si se le resta la expresión (15) a la ecuación discretizada de momentum aplicada al campo  $u$  (solución exacta de la ecuación de momentum en  $x$ ), el resultado será la siguiente relación en virtud de las definiciones de corrección de velocidad y presión, (17) y (18), respectivamente.

$$a_{i,j}u'_{i,j} - \sum_{l=1}^{N+2} (au')_l = - \sum_{l=1}^N (p'n_x \Delta S)_l \quad (16)$$

$$u' = u - u^* \quad (17)$$

$$p' = p - p^* \quad (18)$$

A continuación se introduce la aproximación característica del algoritmo de solución *SIMPLE*, y la nueva simplificación propia del presente estudio en el tratamiento de mallas no ortogonales, para llegar a una expresión definitiva (19) para el valor nodal  $i, J$ . En el *SIMPLE*, el segundo término de la izquierda en la expresión (16) se desprecia. La nueva simplificación consiste en tomar como nulos los términos del lado derecho de la ecuación (16) que aparecen al considerar volúmenes con fronteras no ortogonales. Esta aproximación se hace teniendo en mente una malla estructurada lo suficientemente refinada para que los diferenciales de área que multiplican las presiones  $p_{i,j}$  y  $p_{i,j-1}$  tiendan a cero, y que al ingresarlas a la ecuación de continuidad, como se realiza a continuación, estén multiplicando diferenciales de área relativamente pequeños que hacen el término despreciable.

$$u_{i,J} = u_{i,J}^* - \frac{p'_{I+1,J} \Delta y_{I+1,j}^{I+1,j} + p'_{I,J} \Delta y_{I,j}^{I,j-1}}{a_{i,J}} \quad (19)$$

El siguiente paso es utilizar la ecuación de continuidad discretizada (5) aplicada al volumen principal de la Figura 1, para reemplazar en esta los valores de las velocidades no conocidas, según la ecuación (19), y el valor, en términos de la corrección de presión, de las velocidades obtenidas por medio de una deducción similar. Al sustituir y organizar se obtiene la ecuación de corrección de presiones discretizada para hacer aplicada a los volúmenes internos de mallas estructuradas no ortogonales.

## 6. RESULTADOS

En una cavidad rectangular se plantea un problema bidimensional de dinámica de fluidos cuando la superficie superior se desliza con una velocidad  $u_a$  en  $x$ , generando el movimiento del fluido que se encuentra al interior de la cavidad caracterizado por el número de Reynolds definido por (20), y que para este caso corresponde a agua líquida a una temperatura de 20°C. En la Figura 6 se muestran las características geométricas del dominio con  $L = H = 1m$  y las condiciones de frontera propias del problema a resolver, teniendo en cuenta el estado estacionario y un tratamiento por medio de variables primitivas  $(p,u,v)$  con el fin de aplicar el algoritmo de solución *SIMPLE*. De este modo se resuelve la ecuación de Navier Stokes para obtener una solución particularizada por las condiciones de frontera tipo dirichlet para la velocidad en todas sus fronteras, pues en tres de estas se considera la condición de no deslizamiento por tratarse de paredes y la restante se especifica la velocidad en  $x$ .

$$Re = \frac{\rho L u_a}{\mu} \quad (20)$$

A continuación se muestran los resultados obtenidos al aplicar los esquemas de interpolación aplicados a los términos de la ecuación de Navier Stokes. Además de esto se utiliza una malla deformada  $30 \times 30$  (Figura 7) con el fin de mostrar la capacidad del código *2D-SIMPLENS* de hallar una solución validable en dominios divididos por medio de mallas estructuradas no ortogonales.

Al realizar una comparación cualitativa (Figura 8) con los esquemas de interpolación de segundo (*Fluent SOU*) y primer orden (*Fluent FOU*) implementados mediante una malla de igual número de elementos y el programa comercial *Fluent* que utiliza el método de volúmenes finitos y un algoritmo de la familia *SIMPLE* para llegar a la solución, se puede apreciar la

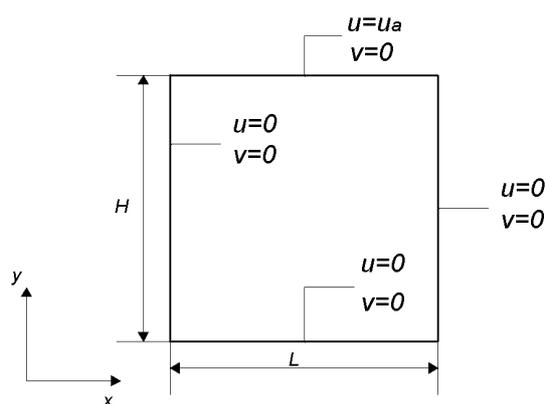


Figura 6: Problema de flujo en una cavidad rectangular.

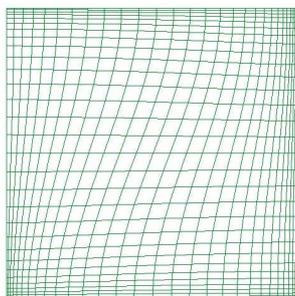


Figura 7: Malla utilizada en la simulación.

diferencia entre los resultados obtenidos y el aumento en exactitud conforme crece el orden del esquema de interpolación utilizado hasta llegar a la solución encontrada por [Ghia et al. \(1982\)](#) y reproducida por [Erturk and Gökçöl \(2005\)](#). Así como el valor de de velocidad en las líneas centrales se acerca a las respectivas cantidades experimentales, las líneas de corriente obtenidas (Figura 9) generan un patrón de acuerdo con los registros experimentales. El presente número de Reynolds se caracteriza por la presencia de un vórtice central levemente desviado en la dirección del flujo en la frontera superior, y dos vórtices de menor tamaño en las esquinas inferiores.

La situación de flujo externo plantea problemas adicionales en cuanto a tratamiento de fronteras. Tres nuevos tipos de frontera son necesarios implementar al código para particularizar al caso de flujo externo la solución de la ecuación de Navier Stokes. Tanto en las fronteras superior e inferior como en la frontera derecha se aplica una condición del tipo Dirichlet para la presión, teniendo en cuenta una extensión del dominio que garantice valores de presión ambiente en estas fronteras. También en la frontera derecha, es necesario suponer una restricción tipo Neumann para las velocidades en la dirección normal a dicha frontera, en la frontera izquierda (entrada) una condición Dirichlet en la que se especifica el valor de la velocidad de la corriente que atraviesa el cilindro, y en el objeto aplica la condición de pared ya utilizada, pero ahora sobre una frontera curva que ocasiona la deformación de la malla que divide el dominio en volúmenes de caras no ortogonales. Con el objetivo de lograr una validación del código de acuerdo a los datos experimentales disponibles, se hace una comparación entre las características geométricas de los vórtices simétricos (Figura 10) y los coeficientes de arrastre para los números de Reynolds 20 y 40. En la tabla 1 se realiza la comparación entre los datos obtenidos

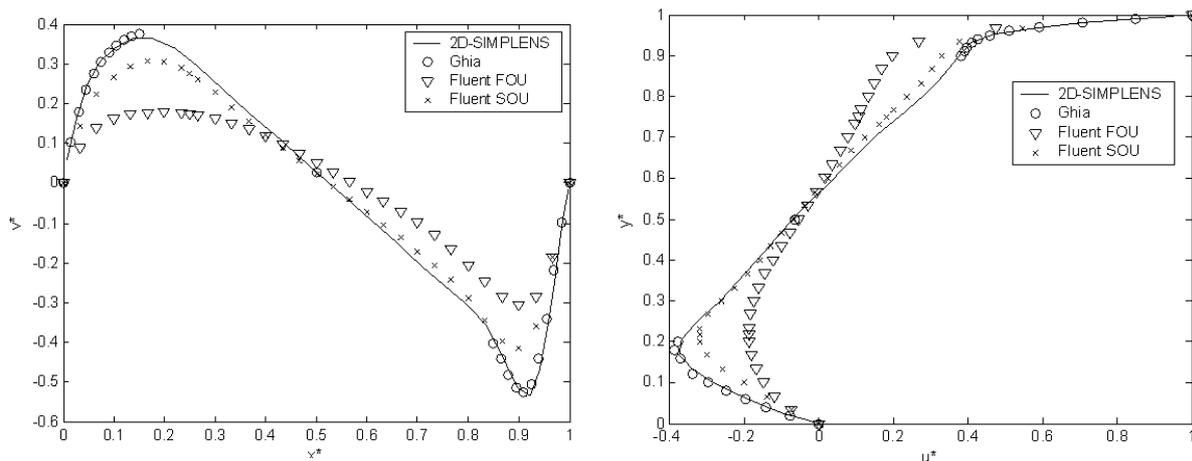


Figura 8: Velocidades obtenidas en la línea horizontal media (izquierda) y en la línea vertical media (derecha) para el flujo en cavidades a un número de Reynolds 1000.

mediante el código de volúmenes finitos desarrollado y los datos experimentales y numéricos utilizados por Chung (2006) para la comparación de los parámetros medibles por medio de la actividad experimental.

Los resultados obtenidos se encuentran en el intervalo de valores disponibles en referencias para datos tanto experimentales como numéricos, lo cual verifica la información entregada por el código. Para un número de Reynolds igual a 20 el vórtice se extiende una distancia menor que en el caso de Reynolds cuarenta, lo cual se debe a una menor contribución de la transferencia de momentum por convección al total, es decir, una velocidad mayor (Reynolds 40) supone mayor momentum e incide en una mayor rapidez en la transferencia de este, lo cual resulta en la creación de un vórtice de mayor tamaño. Se puede observar en la tabla 1 que para este caso específico se obtienen resultados concordantes con los demás resultados numéricos y el dato experimental que se presenta. El coeficiente de arrastre también sigue la tendencia experimental, pues en esta para número de Reynolds menor a mil la relación con el coeficiente de arrastre es inversamente proporcional. Tal tendencia se debe a los efectos asociados a la separación de la capa límite que se da en números de Reynolds mayores que seis para el caso de flujo externo alrededor de un cilindro circular. La malla creada y utilizada en las simulaciones (Figura 11) busca adaptarse de la mejor forma a la curvatura de la frontera del cilindro sin perder la orientación que las caracteriza como estructurada. Así mismo se realiza un refinamiento en las zonas de altos gradientes de velocidad para que el código pueda captar efectos como la formación de vórtices y la separación de la capa límite, y realice una transición suave entre los volúmenes de superficies inclinadas y aquellos en disposición ortogonal.

La separación de la capa límite se puede apreciar en las figuras donde se plasman las líneas de corriente (Figura 12), pues aguas abajo del punto de separación se da la formación de los vórtices, zona que además se caracteriza por las bajas velocidades del fluido y los altos gradientes de velocidad al acercarse a las líneas de corriente que pasan por encima del punto de separación. Los vórtices obtenidos se verifican por medio de la longitud característica  $L_v$  (Figura 10) que se mide desde el final del cilindro hasta el punto en que las líneas de corriente externas al vórtice vuelven a unirse y, como se puede ver en la tabla 1, los valores obtenidos están cerca tanto de los resultados producto de la experimentación como de otros procesos numéricos.

Tanto para el caso de flujo en cavidades como flujo externo se logra la validación de los procedimientos numéricos utilizados a partir de los datos disponibles para la descripción del

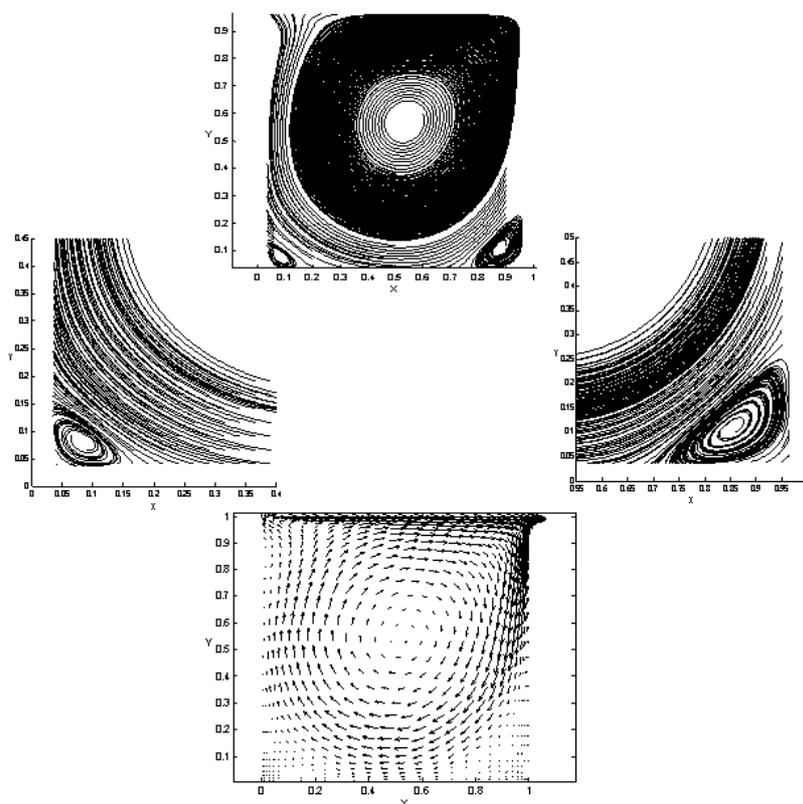


Figura 9: Líneas de flujo y campo de velocidad obtenidos.

movimiento en régimen laminar de un fluido Newtoniano, isotérmico, isotrópico e incompresible en un dominio bidimensional. Según esto las condiciones de frontera, el algoritmo de solución y los esquemas de interpolación aplicados en el código *2D-SIMPLENS* son aptos para este tipo de problemas, lo cual sugiere confiabilidad en los resultados futuros que se puedan obtener utilizando el código desarrollado.

## 7. CONCLUSIONES

La aproximación de flujos difusivos por medio del esquema de diferencias centradas es una forma sencilla pero adecuada de tratar este tipo de fenómenos de transporte, hecho que se demuestra en la precisión de los resultados para flujo en cavidades. La exactitud de la aproximación del término convectivo depende notoriamente del orden de la misma. Es así como al utilizar un esquema de diferencias centradas de primer orden se obtienen resultados correctos en tendencia pero alejados de la solución real, que se logra por medio de un esquema de diferencias desplazadas de segundo orden como el *QUICK*.

Las condiciones de frontera definen la forma particular de la solución de las ecuaciones gobernantes. Es por esto que soluciones correctas se logran a partir de una buena implementación de estas de acuerdo con la elección de las fronteras del dominio computacional. Por lo tanto es posible afirmar que el tipo de condiciones utilizadas constituye una estrategia adecuada para el tratamiento de fronteras en los casos estudiados.

El uso de mallas no ortogonales se realiza sin perder la exactitud lograda en mallas ortogonales mediante la implementación de nuevas aproximaciones para los términos que aparecen luego de tener en cuenta una inclinación de las caras en los volúmenes. Para el caso de flujo en

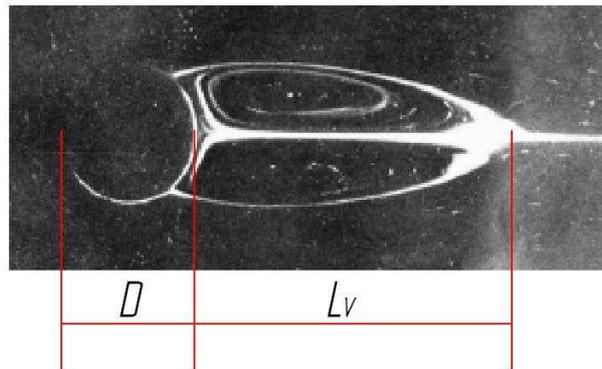


Figura 10: Características geométricas de los vórtices simétricos generados entre  $Re=1$  y  $Re=40$  en la situación de flujo externo alrededor de un cilindro circular Taneda (1956).

Tabla 1: Comparación entre datos experimentales disponibles, resultados obtenidos mediante el código *2D-SIMPLENS* y datos numéricos utilizados y obtenidos por Chung (2006)

	$Re = 20$		$Re = 40$	
Contribución	$C_d$	$L_v/D$	$C_d$	$L_v/D$
Experimental				
Relf	2.16		1.62	
Weiselberger	2.05		1.64	
Taneda		0.9		2.1
Tritton	2.08		1.59	
Numérico				
Dennis y Chang	2.05	0.94	1.52	2.35
Ta Phoe Loe		0.94		2.14
Fornberg	2.00	0.91	1.50	2.24
Chung	2.05	0.96	1.54	2.30
Resultados obtenidos				
<i>2D-SIMPLENS</i>	1.99	0.96	1.52	2.16

cavidades se logran resultados más cercanos a los registros encontrados en literatura que al utilizar el programa comercial *Fluent*. En la situación de flujo externo los resultados obtenidos son satisfactorios pues la diferencia con los parámetros de comparación experimentales es menor que un 8 % para todos los casos. De las aproximaciones realizadas para los nuevos términos difusivos, convectivos, y del gradiente de presiones, esta última es la estrategia que más impacta en la conservación de la exactitud y por lo tanto en la viabilidad del uso de mallas estructuradas en dominios de fronteras curvas.

En el código *2D-SIMPLENS* se sintetizan cada una de las características ya mencionadas para constituir un exitoso acercamiento a la dinámica de fluidos computacional por medio del método de volúmenes finitos. En el momento, la aplicación del mismo se limita a mallas estructuradas, flujo bidimensional, régimen laminar y estado estacionario. Barreras, que de acuerdo a este primer desarrollo, pueden ser fácilmente superadas para así ampliar el espectro de aplicación a problemas de dinámica de fluidos.

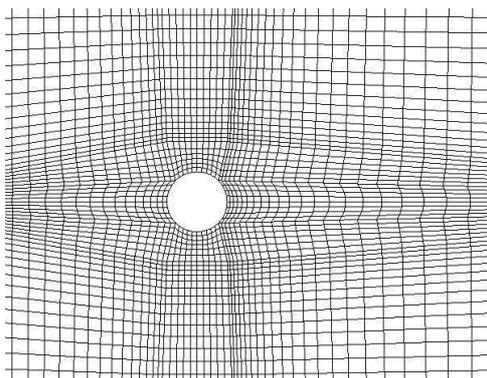


Figura 11: Mallado.

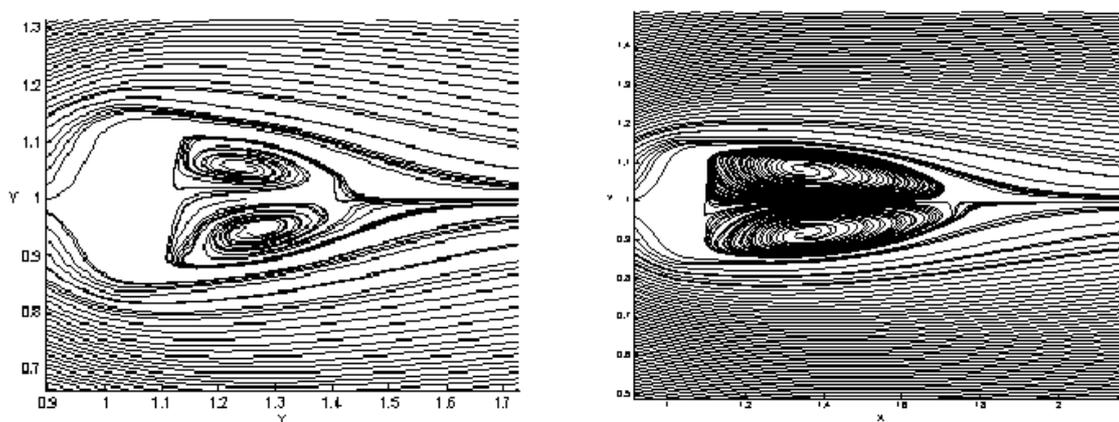


Figura 12: Líneas de corriente obtenidas en el caso de flujo externo alrededor de un cilindro circular.

## REFERENCIAS

- Chung M.H. Cartesian cut cell approach for simulating incompressible flows with rigid bodies of arbitrary shape. *Computers & Fluids*, 35:607–626, 2006.
- Erturk E. and Gökçöl C. Numerical solutions of 2-d steady incompressible driven cavity flow at high reynolds numbers. *Intenational Journal for Numerical Methods in Fluids*, 48:758–769, 2005.
- Ghia U., Ghia K.N., and Shin C.T. High-re solutions for incompressible flow using the navier stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- Patankar S. *Numerical heat transfer and fluid flow*. Taylor & Francis, 1980.
- Perron S., Boivin S., and Hérard J. A finite volume method to solve the 3d navier stokes equations on unstructured collocated meshes. *Computers and Fluids*, 33:1305–1333, 2004.
- Taneda S. Experimental investigation of the wakes behind cylinders and plates at low reynolds numbers. *Journal of the Physical Society of Japan*, 11:302–307, 1956.
- Versteeg H. and Malalasekera W. *Introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method*. Longman Scientific & Technical, 1995.
- Vidovic D., Segal A., and Wesseling P. A superlinearly convergent finite volume method for the incomprensible navier-stokes equations on staggered unstructured grids. *Journal of Computational Physics*, 198:159–177, 2004.

- Wesseling P., Segal A., and Kassels C. Computing flows on general three-dimensional nonsmooth staggered grids. *Journal of Computational Physics*, 149:333–362, 1999.
- Ye T. and Mittal R. An accurate cartesian grid method for viscous incompressible flow with complex immersed boundaries. *Journal of Computational Physics*, 156:209–240, 1999.