

## ESTRATEGIA DE PRECONDICIONAMIENTO LOCAL PARA FLUJOS COMPRESIBLES A BAJOS NÚMEROS DE MACH

Ezequiel J. López, Norberto M. Nigro y Mario A. Storti

*Centro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC-CONICET,  
Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, ejlopez@ceride.gov.ar,  
<http://www.cimec.org.ar>*

**Palabras Clave:** Flujos compresibles a bajo número de Mach, Precondicionamiento local, ALE.

**Resumen.** Los flujos a bajos números de Mach representan una situación limitante en la resolución de flujos compresibles. A medida que el número de Mach tiende a cero, los códigos para flujo compresible basados en la densidad sufren de falta de eficiencia y precisión. Una de las técnicas propuestas para capturar la solución de tales flujos consiste en el precondicionamiento de las ecuaciones. En estos esquemas, se multiplican las derivadas respecto al tiempo por una matriz apropiadamente definida (precondicionador), lo cual escala los autovalores del sistema de modo tal que sus órdenes de magnitud resultan similares. Al afectar el término de la derivada temporal, el sistema de ecuaciones precondicionadas sólo posee la misma solución estacionaria que el sistema original. Para la aplicación de este método a problemas dependientes del tiempo, ha surgido la técnica de “doble tiempo”, donde los términos que incluyen derivadas respecto al tiempo físico son tratados como términos fuente y/o reactivos, y las derivadas respecto al pseudo-tiempo son multiplicadas por el precondicionador. Durante cada paso de tiempo físico, el sistema pseudo-temporal de ecuaciones es avanzado en el tiempo artificial hasta alcanzar un estado pseudo-estacionario. En el presente trabajo se muestra, mediante un análisis de autovalores, que el precondicionamiento de las ecuaciones con una matriz formulada para flujo estacionario puede no ser apropiado cuando se lo aplica a flujos no estacionarios. Se presenta una adaptación del precondicionador al caso no estacionario cuando se emplea una estrategia tipo ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian). Las ecuaciones son discretizadas en el espacio mediante el Método de Elementos Finitos, donde el término de estabilización debe calcularse adecuadamente para el sistema precondicionado. Se incluye además el tratamiento de condiciones de contorno absorbentes. Diversos casos test son resueltos y comparados con resultados obtenidos empleando las ecuaciones para flujo compresible no precondicionadas y códigos para flujo incompresible.

## 1. INTRODUCCIÓN

Los flujos a bajos números de Mach ( $M$ ) representan una situación limitante en la resolución de flujos compresibles. A medida que el número de Mach tiende a cero, las estrategias de resolución para flujo compresible basadas en la densidad sufren de falta de eficiencia y precisión. Esto se debe a que las ecuaciones se mal condicionan, con un número de condición del sistema  $\mathcal{O}(1/M)$  (Choi y Merkle, 1993). Existen distintos enfoques para solucionar el referido problema: uno de ellos es la modificación de las estrategias basadas en la densidad para flujos compresibles cuando el número de Mach disminuye; otra opción consiste en extender las estrategias para resolver flujos incompresibles (basados en la presión) al régimen compresible. Existen también formulaciones unificadas, como la presentada por Mittal y Tezduyar (1998).

Dentro de los métodos basados en la densidad, se han propuesto dos técnicas para capturar la solución de flujos a bajos números de Mach: el desarrollo asintótico y el preconditionamiento. Ambas técnicas se basan en el escalamiento del número de condición del sistema. En el método asintótico se introduce una forma perturbada de las ecuaciones, donde términos específicos son despreciados dando lugar a la aparición de modos pseudo-acústicos en lugar de las ondas acústicas de carácter físico. Las velocidades de propagación de estos modos pseudo-acústicos son comparables a la velocidad del fluido (Choi y Merkle, 1993). Aunque estos métodos son muy robustos y aplicables tanto a flujos viscosos como invíscidos, la naturaleza de la perturbación limita su uso a flujos incompresibles o muy poco compresibles.

Los esquemas de preconditionamiento consisten en premultiplicar las derivadas respecto al tiempo por una matriz apropiadamente definida (precondicionador), lo cual escala los autovalores del sistema de modo tal que sus órdenes de magnitud resultan similares, eliminando así el mal condicionamiento del sistema. Al afectar el término de la derivada temporal, el sistema de ecuaciones modificadas (precondicionadas) sólo posee la misma solución estacionaria que el sistema original. Para la aplicación de este método a problemas dependientes del tiempo, ha surgido la técnica de “doble tiempo”, donde los términos que incluyen derivadas respecto al tiempo físico son tratados como términos fuente y/o reactivos. Durante cada paso de tiempo físico, el sistema pseudo-temporal de ecuaciones es avanzado en el tiempo artificial hasta alcanzar un estado pseudo-estacionario (Tukel y Vasta, 2005; Vigneron et al., 2006; Liu y Fletcher, 2007). Se han diseñado preconditionadores locales que funcionan muy bien cuando se los utiliza en la determinación de un flujo estacionario (Choi y Merkle, 1993; Nigro et al., 1998), aunque trabajos recientes han mostrado que tales preconditionadores pueden no ser apropiados para problemas no estacionarios (Vigneron et al., 2006).

El principal objetivo del trabajo en el cual se encuadra el presente artículo es la realización de flujometrías dinámicas en motores de combustión interna. El flujo en el interior de las cámaras de un motor de combustión interna está caracterizado por un número de Mach bajo, excepto en los primeros instantes de apertura de la válvula o lumbrera de escape donde se alcanzan regímenes transónicos en el puerto de escape (Heywood, 1988). La aplicación de interés limita las estrategias para la resolución de flujos a bajo número de Mach a aquellas que, bajo una única formulación, funcionen correctamente para todo Mach.

En este trabajo se propone utilizar el método de preconditionamiento de las ecuaciones con el preconditionador propuesto por Choi y Merkle (1993). Se analiza el número de condición de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible no estacionario preconditionadas cuando se utiliza una estrategia ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) y, en base a este análisis, se redefinen apropiadamente los parámetros del preconditionador considerado. Se presenta además la estrategia numérica de resolución y el tratamiento de condiciones de contorno absor-

bentes. Se resuelven algunos casos test y se comparan con las soluciones obtenidas mediante las ecuaciones para flujo incompresible.

## 2. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA Y ANÁLISIS DE AUTOVALORES

Se presentan a continuación las variables utilizadas en el análisis de autovalores del sistema de ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible

$$\begin{aligned} \mathbf{U} &= [\rho, \rho \mathbf{u}, \rho e]^T \\ \mathbf{Q} &= [p, \mathbf{u}, T]^T \end{aligned} \quad (1)$$

siendo  $\mathbf{U}$  el vector de variables *conservativas* usuales y  $\mathbf{Q}$  el vector de variables *viscosas*, donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $\mathbf{u}$  el vector velocidad,  $e$  la suma de las energías interna y cinética,  $p$  la presión y  $T$  la temperatura. A bajo número de Mach, resulta conveniente realizar los estudios empleando las variables  $\mathbf{Q}$  debido a que la densidad tiende a ser espacialmente constante.

Las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible viscoso escritas en su forma cuasi-lineal quedan expresadas del siguiente modo (Hirsch, 1990)

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \mathbf{S} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{A}_i$  son los jacobianos advectivos,  $\mathbf{K}_{ij}$  los jacobianos difusivos y  $\mathbf{S}$  el vector fuente. Se considera además que el fluido en estudio es un gas perfecto.

El preconditionamiento de las ecuaciones consiste en premultiplicar la derivada respecto al tiempo por una matriz apropiadamente definida. El objetivo es modificar los autovalores del sistema de tal forma que el número de condición se reduzca. La estrategia de preconditionamiento resulta útil cuando el problema a resolver es estacionario, debido a que los sistemas preconditionado y no preconditionado sólo comparten la misma solución estacionaria. Para aplicar el método de preconditionamiento a problemas no estacionarios se ha propuesto la técnica de “doble tiempo” en la cual, para cada instante de tiempo (tiempo *físico*,  $t$ ), se avanzan las ecuaciones en el *pseudo-tiempo* ( $\tau$ ) hasta alcanzar un estado pseudo-estacionario cuando  $\tau \rightarrow \infty$ . Introduciendo el término de la derivada pseudo-temporal afectada por un preconditionador  $\Gamma$ , el sistema de ecuaciones para la estrategia de doble tiempo posee la forma

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \mathbf{S} \quad (3)$$

Notar que cuando el sistema tiende al estado pseudo-estacionario, el término  $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau}$  tiende a cero, con lo cual la solución de la ecuación (3) a un tiempo  $t$  fijo tiende a la correspondiente solución de (2).

Cambiando a variables viscosas, la ecuación (3) se reescribe

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \mathbf{S} \quad (4)$$

Sea

$$\Gamma_v = \Gamma \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \quad (5)$$

el preconditionador en la base de variables viscosas. Entonces, premultiplicando por su inversa

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \Gamma_v^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \Gamma_v^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \Gamma_v^{-1} \mathbf{S} \quad (6)$$

En este trabajo se analizará el preconditionador propuesto por [Choi y Merkle \(1993\)](#) para la resolución de problemas estacionarios a bajo número de Mach, el cual fue aplicado en el contexto de elementos finitos por [Nigro et al. \(1998\)](#). Este preconditionador está definido por la expresión

$$\Gamma_v = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta M_r^2}{u} & \rho & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\beta M_r^2}{v} & 0 & \rho & 0 & 0 \\ \frac{\beta M_r^2}{w} & 0 & 0 & \rho & 0 \\ \frac{\beta M_r^2}{\rho e + p} - \delta & \rho u & \rho v & \rho w & \frac{\gamma \rho R}{\gamma - 1} \end{bmatrix} \quad (7)$$

donde  $M_r$  es un número de Mach de referencia,  $\mathbf{u} = [u, v, w]^T$ ,  $\gamma$  es la relación de calores específicos,  $R$  la constante particular del gas,  $\delta$  es un parámetro arbitrario que juega el rol de un coeficiente de la derivada temporal de la presión, y  $\beta = zc^2$ , siendo  $c = \sqrt{\gamma RT}$  la velocidad del sonido y  $z = \max(z_{inv}, z_{vis})$

$$\begin{aligned} z_{inv} &= M_r^2 \\ z_{vis} &= \max_j \left[ \frac{\alpha_j (\alpha_j - 1)}{\alpha_j - 1 + c^2/u_j^2} \right] \\ \alpha_j &= \frac{CFL}{\sigma Re_{h_j}} \quad j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

con  $CFL$  el número de Courant,  $\sigma$  el número de Fourier y  $Re_{h_j}$  el número de Reynolds basado en la longitud característica  $h_j$ . El número de Mach de referencia  $M_r$  reemplaza al número de Mach en la matriz de preconditionamiento debido a que el término  $1/M^2$  tiende a ser singular en regiones donde el  $M$  tiende a cero. En la próxima sección se discutirá la elección de  $M_r$  (véase la ecuación (19) para la definición dada por [Choi y Merkle \(1993\)](#)).

Con este preconditionador el sistema de ecuaciones adopta una forma muy similar a la obtenida cuando se aplica el método de compresibilidad artificial con el agregado de la ecuación de conservación de la energía ([Choi y Merkle, 1993](#)).

Se realizará un análisis de dispersión del sistema de ecuaciones (6). Sean

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} &= \Gamma_v^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{K}}_{v,ij} &= \Gamma_v^{-1} \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \\ \tilde{\mathbf{S}}_v &= \Gamma_v^{-1} \mathbf{S} \end{aligned} \quad (8)$$

Discretizando la derivada respecto al tiempo físico mediante una fórmula en diferencias atrasadas

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} \approx \frac{c_t \mathbf{Q}^{n+1} - E(\mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}, \dots)}{\Delta t}, \quad (9)$$

donde  $c_t$  es una constante que depende del orden del esquema temporal, el sistema (6) se expresa del siguiente modo:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{c_t}{\Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tilde{\mathbf{K}}_{v,ij} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \tilde{\mathbf{S}}_v + \frac{1}{\Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} E(\mathbf{Q}^n, \mathbf{Q}^{n-1}, \dots) \quad (10)$$

Para simplificar la notación, en la ecuación anterior se suprimió el supraíndice  $n + 1$  para las variables que se evalúan en el citado paso de tiempo.

Si se asume que el término fuente no tiene efecto en la ecuación de dispersión y, para simplificar el estudio, considerando nulos los términos difusivos (ecuaciones de Euler), el análisis se realiza sobre la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \frac{c_t}{\Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{Q} + \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \mathbf{0} \quad (11)$$

Introduciendo el modo de Fourier en el sistema

$$\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_0 \exp [i(\mathbf{k}^T \mathbf{x} - \omega \tau)], \quad (12)$$

la ecuación (11) se traduce a una ecuación de dispersión para  $\omega$

$$\left( -i\omega \mathbf{I} + \frac{c_t}{\Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} + ik_i \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \right) \mathbf{Q} = \mathbf{0} \quad (13)$$

donde  $\mathbf{I}$  es la matriz identidad. Debido a que la malla posee un número finito de nodos, las longitudes de onda están limitadas por el espaciamiento de la grilla. Para tener en cuenta este filtrado, se puede tomar  $\|\mathbf{k}\| = \phi/h$ , donde  $h$  es una medida del tamaño del elemento, y  $\phi \in [0, \pi]$ . Sean  $\lambda = \omega/\|\mathbf{k}\|$  la velocidad de onda y  $u_k = \mathbf{u}^T \mathbf{k}/\|\mathbf{k}\|$ . Dividiendo la ecuación (13) por  $i\|\mathbf{k}\|$  se obtiene el sistema  $\mathbf{G}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$ , donde

$$\mathbf{G} = -i \frac{c_t}{\|\mathbf{k}\| \Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} - \lambda \mathbf{I} \quad (14)$$

Para que el sistema  $\mathbf{G}\mathbf{Q} = \mathbf{0}$  tenga solución no trivial, debe verificarse que  $\det \mathbf{G} = 0$ , lo cual equivale a calcular los autovalores de la matriz

$$\hat{\mathbf{G}} = -i \frac{c_t}{\|\mathbf{k}\| \Delta t} \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} + \frac{k_i}{\|\mathbf{k}\|} \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \quad (15)$$

Definiendo los números de Courant

$$\begin{aligned} CFL_u &= \frac{u_k \Delta t}{h} \\ CFL_c &= \frac{c \Delta t}{h} \end{aligned} \quad (16)$$

los autovalores de  $\hat{\mathbf{G}}$  están dados por

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\mathbf{G}})_{1,2,3} &= u_k (1 - ic_t CFL_u^{-1}) \\ \lambda(\hat{\mathbf{G}})_{4,5} &= \frac{u_k}{2} (1 - ic_t CFL_u^{-1}) T_{\pm} \end{aligned} \quad (17)$$

donde

$$T_{\pm} = (1 + M_r^2 \chi) \pm \sqrt{(1 - M_r^2 \chi)^2 - 4M_r^2 \left[ \frac{1}{(iM + c_t CFL_c^{-1})^2} + 1 - \chi \right]} \quad (18)$$

En la ecuación (18)  $\chi = \gamma - (\gamma - 1)\delta$ , mientras que la elección de  $M_r$  diferencia los distintos preconditionadores. Tomando la definición sugerida por [Choi y Merkle \(1993\)](#)

$$M_r = \begin{cases} M_\epsilon & \text{si } M < M_\epsilon \\ M & \text{si } M_\epsilon \leq M < 1 \\ 1 & \text{si } M \geq 1 \end{cases} \quad (19)$$

o, equivalentemente,  $M_r = \min(1, \max(M, M_\epsilon))$ , donde  $M_\epsilon$  es un número de Mach de “corte” aplicable en zonas donde el número de Mach es nulo, se tienen los autovalores del sistema preconditionado con el preconditionador diseñado para estado estacionario.

Cuando se aplica una estrategia ALE, las ecuaciones de Euler para el método de doble tiempo quedan expresadas

$$\mathbf{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{A}_i - \hat{u}_i \mathbf{I}) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \mathbf{S} \quad (20)$$

donde  $\hat{u}$  es la velocidad de la malla. Aplicando un análisis análogo al anterior, se encuentran los siguientes autovalores

$$\begin{aligned} \lambda(\hat{\mathbf{G}}_{\text{ALE}})_{1,2,3} &= u_k(1 - ic_t CFL_u^{-1}) - \hat{u}_k \\ \lambda(\hat{\mathbf{G}}_{\text{ALE}})_{4,5} &= \frac{1}{2}[u_k(1 - ic_t CFL_u^{-1}) - \hat{u}_k] T_{\pm}^{\text{ALE}} \end{aligned} \quad (21)$$

con

$$T_{\pm}^{\text{ALE}} = (1 + M_r^2 \chi) \pm \sqrt{(1 - M_r^2 \chi)^2 - 4M_r^2 \left[ \frac{1}{(i\bar{M} + c_t CFL_c^{-1})^2} + 1 - \chi \right]} \quad (22)$$

siendo  $\bar{M} = (u_k - \hat{u}_k)/c$  y  $\hat{u}_k = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{k} / \|\mathbf{k}\|$ .

El caso viscoso no posee una solución sencilla de obtener, por lo cual algunos autores utilizan fórmulas aproximadas para considerar los efectos de tales términos.

## 2.1. Estrategias de preconditionamiento

El número de condición se define como

$$CN = \frac{\max(|\lambda_i|)}{\min(|\lambda_i|)} = \frac{\max(1, |T_+|, |T_-|)}{\min(1, |T_+|, |T_-|)} \quad (23)$$

La figura 1 muestra el número de condición del sistema de ecuaciones de Euler en función del número de Courant  $CFL_c$  adoptando  $c_t = 1$ ,  $\delta = 1$  ( $\chi = 1$ ),  $M_\epsilon = 1 \times 10^{-6}$  y  $M = 1 \times 10^{-3}$ . El preconditionador para estado estacionario (SP, por Steady Preconditioner) corresponde a la definición de  $M_r$  dada en la ecuación (19). Si el problema es no estacionario, [Vigneron et al. \(2006\)](#) sugieren tomar

$$M_r = \min(1, \max(\sqrt{M^2 + CFL_c^{-2}}, M_\epsilon)) \quad (24)$$

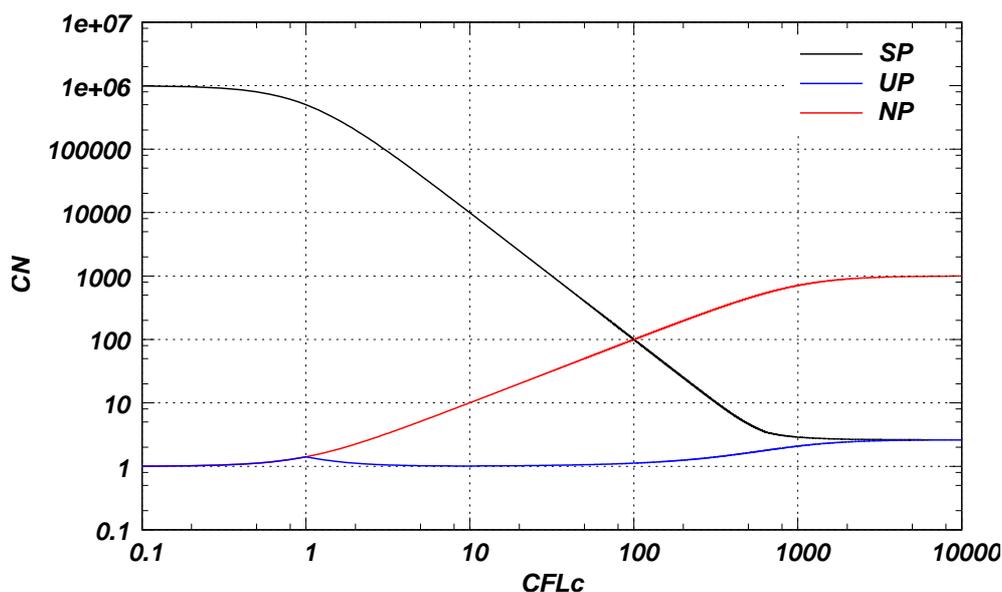


Figura 1: Número de condición en función de  $CFL_c$  para  $M = 1 \times 10^{-3}$ .

Esta definición es la denominada UP (Unsteady Preconditioner) en la figura 1. Se incluye además el número de condición para cuando no se utiliza ningún preconditionador (NP), lo cual equivale a tomar  $M_r = \chi^{-1/2}$  en la ecuación (18).

Como se observa en la figura, adoptando el preconditionamiento “no estacionario” se tiene un número de condición de orden 1 para todos los  $CFL_c$ . Para flujos viscosos, Merkle (1998) propone utilizar la siguiente aproximación

$$M_r = \begin{cases} M_r|_{\text{inv}} & \text{si } Re > 1 \\ M/Re & \text{si } Re < 1 \end{cases} \quad (25)$$

en la cual  $M_r|_{\text{inv}}$  es el número de Mach de referencia para el caso invíscido y  $Re$  es el número de Reynolds.

La propuesta en este trabajo es utilizar la expresión (24) dado que el preconditionador adoptado tiene en cuenta la relación entre “tiempos viscosos” y “tiempos inerciales” (véase la definición del parámetro  $\beta$  en la ecuación (7)).

### 3. IMPLEMENTACIÓN NUMÉRICA

#### 3.1. Formulación variacional

Utilizando la técnica ALE sólo se modifican los jacobianos advectivos del sistema de ecuaciones (véase la ecuación (20)). Por lo tanto, para clarificar la siguiente exposición se considera nula la velocidad de la malla. Entonces, agregando las correspondientes condiciones de contorno a la ecuación preconditionada (3) con la estrategia de doble tiempo, queda planteado el problema a resolver. La formulación variacional de este problema se escribe:

Hallar  $\mathbf{U}^h \in \mathcal{S}^h$  tal que  $\forall \mathbf{W}^h \in \mathcal{V}^h$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \left( \Gamma \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_i^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} \right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_i} \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_j} d\Omega \\ & + \sum_{e=1}^{numel} \int_{\Omega^e} (\boldsymbol{\tau}')^T (\mathbf{A}_k^h)^T \frac{\partial \mathbf{W}^h}{\partial x_k} \left[ \Gamma \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial t} + \mathbf{A}_i^h \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_i} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}^h}{\partial x_j} \right) - \mathbf{S} \right] d\Omega^e \\ & = \int_{\Omega} \mathbf{W}^h \mathbf{S} d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{W}^h \mathbf{f} d\partial\Omega \end{aligned} \quad (26)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{S}^h &= \{ \mathbf{U}^h | \mathbf{U}^h \in [\mathbf{H}^{1h}(\Omega)]^{\text{ndf}}, \mathbf{U}^h|_{\Omega^e} \in [P^1(\Omega^e)]^{\text{ndf}}, \mathbf{U}^h = \mathbf{g} \text{ sobre } \partial\Omega_g \} \\ \mathcal{V}^h &= \{ \mathbf{W}^h | \mathbf{W}^h \in [\mathbf{H}^{1h}(\Omega)]^{\text{ndf}}, \mathbf{W}^h|_{\Omega^e} \in [P^1(\Omega^e)]^{\text{ndf}}, \mathbf{W}^h = \mathbf{0} \text{ sobre } \partial\Omega_g \} \end{aligned} \quad (27)$$

y  $\mathbf{f}$  y  $\mathbf{g}$  representan, respectivamente, los vectores de condiciones de contorno naturales y Dirichlet.

Las derivadas respecto a  $t$  y  $\tau$  son discretizadas aplicando el esquema en diferencias backward Euler

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} &\approx \frac{\mathbf{U}^{n+1,m+1} - \mathbf{U}^{n,\infty}}{\Delta t} \\ \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} &\approx \frac{\mathbf{U}^{n+1,m+1} - \mathbf{U}^{n+1,m}}{\Delta \tau} \end{aligned} \quad (28)$$

Obsérvese los índices empleados para indicar cada paso de tiempo. Además, se propone una formulación implícita en los dos tiempos  $t$  y  $\tau$ .

El correcto funcionamiento del esquema dependerá de la elección de la matriz de tiempos intrínsecos ( $\boldsymbol{\tau}'$ ) para la estabilización. En este trabajo se propone aplicar la estrategia Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG), es decir, estabilizar teniendo en cuenta sólo la parte advectiva del sistema. De la ecuación (6) y utilizando las definiciones dadas por (8), el sistema de ecuaciones de Navier-Stokes en la base viscosa se expresa

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tilde{\mathbf{K}}_{v,ij} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \tilde{\mathbf{S}}_v \quad (29)$$

El tensor de difusividad numérica introducido por la estrategia SUPG está dado por (Hughes y Mallet, 1986)

$$\tilde{\mathbf{K}}_v^{\text{num}} = \tilde{\mathbf{A}}_v \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \tilde{\mathbf{A}}_v \quad (30)$$

donde  $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_v$  es la matriz de tiempos intrínsecos en la base de variables viscosas. Entonces, al emplear la estrategia de estabilización SUPG se está resolviendo la ecuación

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + \Gamma_v^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \tilde{\mathbf{K}}_{v,ij} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \tilde{\mathbf{A}}_v \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \tilde{\mathbf{A}}_v \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial x_i^2} + \tilde{\mathbf{S}}_v \quad (31)$$

Reemplazando  $\Gamma_v$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_v$ ,  $\tilde{\mathbf{K}}_{v,ij}$  y  $\tilde{\mathbf{S}}_v$  por sus respectivas definiciones

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \Gamma^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_i} &= \Gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial x_j} \right) + \\ &+ \Gamma^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \tilde{\boldsymbol{\tau}}_v \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \Gamma^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \frac{\partial^2 \mathbf{Q}}{\partial x_i^2} + \Gamma^{-1} \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (32)$$

expresando la ecuación en función de las variables conservativas

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \Gamma^{-1} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \Gamma^{-1} \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = & \Gamma^{-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \\ & + \Gamma^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \tilde{\tau}_v \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \Gamma^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_i^2} + \Gamma^{-1} \mathbf{S}, \end{aligned} \quad (33)$$

y, finalmente, luego de premultiplicar ambos miembros por la inversa de la matriz de preconditionamiento, se llega a

$$\Gamma \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \tau} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A}_i \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \mathbf{K}_{ij} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x_j} \right) + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \tilde{\tau}_v \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \Gamma^{-1} \mathbf{A} \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial x_i^2} + \mathbf{S} \quad (34)$$

De la anterior se deduce que

$$\tau = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \tilde{\tau}_v \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \Gamma^{-1} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \tilde{\tau}_v \Gamma_v^{-1} \quad (35)$$

La matriz de tiempos intrínsecos  $\tilde{\tau}_v$  puede calcularse siguiendo distintos enfoques. Uno de ellos es la definición presentada por [Hughes y Mallet \(1986\)](#) adaptada al sistema preconditionado

$$\tilde{\tau}_v = \|\tilde{\mathbf{B}}_v\|^{-1} \quad (36)$$

siendo

$$\tilde{\mathbf{B}}_v = \frac{\partial \xi_i}{\partial x_j} \tilde{\mathbf{A}}_{v,j} \quad (37)$$

los jacobianos advectivos preconditionados transformados al elemento master, en la cual  $\xi_i$  son las coordenadas del elemento master.

Otra opción consiste en utilizar la propuesta de [Le Beau et al. \(1993\)](#) adaptada al problema preconditionado

$$\tilde{\tau}_v = \frac{h}{2 \max_i |\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_v)_i|} \quad (38)$$

En este trabajo se utiliza la ecuación (38) para la estabilización del esquema con una corrección debido a los efectos viscosos (véase por ejemplo el trabajo de [Mittal y Tezduyar \(1998\)](#)), tanto para la formulación no preconditionada como para la modificada por el preconditionamiento. Los autovalores de la matriz  $\tilde{\mathbf{A}}_v$  están dados por

$$\begin{aligned} \lambda(\tilde{\mathbf{A}}_v)_{1,2,3} &= u \\ \lambda(\tilde{\mathbf{A}}_v)_{4,5} &= \frac{u(1 + \beta M_r^2 \chi / c^2 \pm c')}{2} \end{aligned} \quad (39)$$

donde  $c'^2 = u^2 \left( 1 + \frac{\beta M_r^2 \chi}{c^2} \right) + 4\beta M_r^2 \left( 1 - \frac{u^2}{c^2} \right)$ .

Siendo la estabilización del esquema no preconditionado proporcional a  $\frac{h\lambda^2(\mathbf{A})_j}{2 \max_i |\lambda(\mathbf{A})_i|}$  (véase la ecuación (30)) para la onda con velocidad de propagación  $\lambda(\mathbf{A})_j$ , se tienen modos sub-estabilizados dada la disparidad que presentan las citadas velocidades en el límite de bajo número de Mach. La referida sub-estabilización espacial se manifiesta mediante oscilaciones numéricas en la solución.

### 3.2. Condiciones de contorno dinámicas

Del mismo modo que ocurre con la estabilización del Método de Elementos Finitos, las condiciones de contorno dinámicas deben reformularse cuando se preconditiona el sistema de ecuaciones. Partiendo de la ecuación (10) en variables viscosas y siguiendo el análisis propuesto por Storti et al. (2008), para problemas multidimensionales se realiza un estudio simplificado 1D en la dirección normal a la frontera considerando la proyección de los jacobianos advectivos en dicha dirección

$$\tilde{\mathbf{A}}_{v,n} = \tilde{\mathbf{A}}_{v,i} n_i \quad (40)$$

donde  $n_i$  son las componentes del versor normal exterior a la frontera en el punto considerado. Diagonalizando el jacobiano proyectado

$$\tilde{\mathbf{A}}_{v,n} = \tilde{\mathbf{M}}_{v,n} \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{v,n} \tilde{\mathbf{M}}_{v,n}^{-1} \quad (41)$$

con  $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{v,n} = \text{diag}[\lambda(\tilde{\mathbf{A}}_{v,n})]$ , se definen las matrices de proyección

$$\begin{aligned} (\mathbf{\Pi}_{Vn}^-)_{ij} &= \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \text{ y } \lambda_i(\tilde{\mathbf{A}}_{v,n}) < 0 \\ 0 & \text{si no} \end{cases} \\ \mathbf{\Pi}_{Vn}^- + \mathbf{\Pi}_{Vn}^+ &= \mathbf{I} \end{aligned} \quad (42)$$

Las matrices de proyección en la base de variables viscosas se obtienen transformando la base

$$\mathbf{\Pi}_{Qn}^\pm = \tilde{\mathbf{M}}_{v,n} \mathbf{\Pi}_{Vn}^\pm \tilde{\mathbf{M}}_{v,n}^{-1} \quad (43)$$

Finalmente, volviendo a la base de variables conservativas se tienen las matrices de proyección

$$\mathbf{\Pi}_{Un}^\pm = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{Q}} \mathbf{\Pi}_{Qn}^\pm \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{U}} \quad (44)$$

En este trabajo, se aplican las condiciones de borde dinámicas empleando multiplicadores de Lagrange tal lo propuesto por Storti et al. (2008). En este caso, para un nodo  $i$  ubicado sobre la frontera, el sistema de ecuaciones a resolver resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{\Pi}_{Un}^-(\mathbf{U}_{\text{ref}})(\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_{\text{ref}}) + \mathbf{\Pi}_{Un}^+(\mathbf{U}_{\text{ref}})\mathbf{U}_{\text{lm}} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{R}_i(\mathbf{U}) + \mathbf{\Gamma} \mathbf{\Pi}_{Un}^-(\mathbf{U}_{\text{ref}})\mathbf{U}_{\text{lm}} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $\mathbf{U}_{\text{ref}}$  es un estado de referencia,  $\mathbf{U}_{\text{lm}}$  es el multiplicador de Lagrange y  $\mathbf{R}_i(\mathbf{U})$  es el residuo para el nodo  $i$ . Cuando se adopta como estado de referencia el estado en el paso de tiempo anterior, es decir, para el paso de tiempo  $n + 1$ ,  $\mathbf{U}_{\text{ref}} = \mathbf{U}^{n,\infty}$ , Storti et al. (2008) muestran que se conservan los invariantes de Riemann, si éstos existen. Esta estrategia se denomina ULSAR (Use Last State As Reference) y es la que se aplica en el presente trabajo.

## 4. RESULTADOS NUMÉRICOS

### 4.1. Test 1D con condiciones de borde dependientes del tiempo

Este test fue propuesto por Liu y Pletcher (2007) con el objetivo de evaluar el comportamiento de las ecuaciones de Euler preconditionadas. Se trata de un test 1D donde el dominio

computacional se extiende al intervalo  $[0, 800]$ . Inicialmente la densidad, velocidad y presión son espacialmente constantes y fijadas a los valores 1, 1,  $1/(\gamma M_0^2)$ , respectivamente, donde  $M_0 = 0.02$  es un número de Mach de referencia. En  $x = 0$  se imponen la densidad al valor constante 1, y la velocidad variable con la ley

$$u = 1 + 0.2 \sin(t) \quad (46)$$

En el extremo derecho del dominio ( $x = 800$ ) se impone una presión variable dada por la expresión

$$p = \frac{1}{\gamma M_0^2} [1 + 0.08 \sin(t)] \quad (47)$$

Se empleó una malla de elementos finitos de tamaño uniforme  $h = 2$ , con un paso de tiempo  $\Delta t = 0.1$ . Las figuras 2 a 4 presentan la solución obtenida para el instante  $t = 100$  empleando las ecuaciones preconditionadas. El mismo test fue resuelto con las ecuaciones no preconditionadas, obteniéndose una solución similar a la calculada cuando se aplica el preconditionador. Con el objetivo de comparar ambas soluciones, la figura 5 ilustra la diferencia porcentual adimensional ( $DPA$ ) entre las mismas en el instante  $t = 100$ . Esta diferencia se calcula como  $DPA = 100\mathbf{U}/\mathbf{U}^{\text{REF}}$ , donde  $\mathbf{U}^{\text{REF}}$  es un estado de referencia el cual en este caso se adoptó igual al estado inicial.

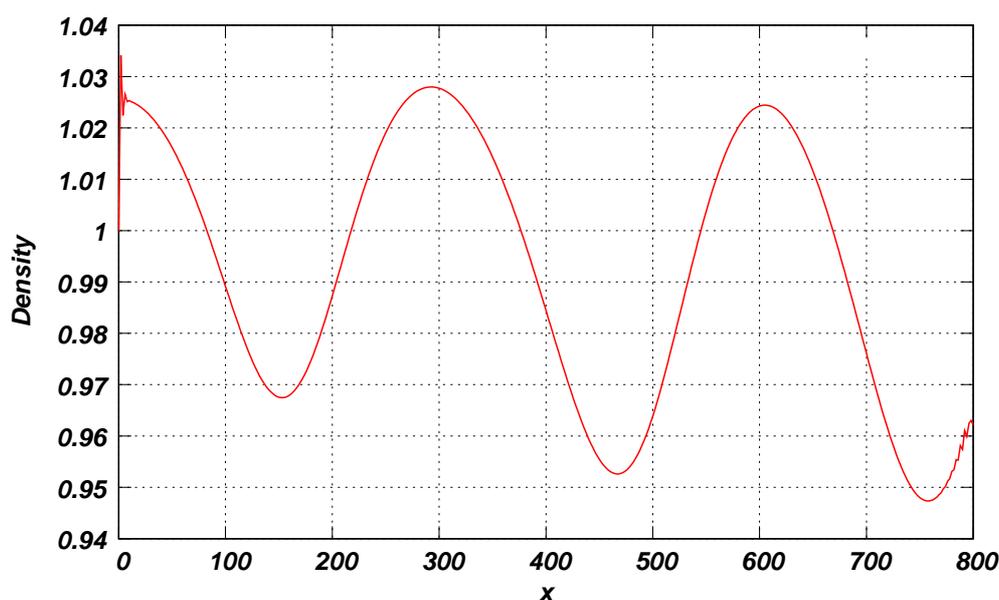


Figura 2: Distribución de densidad obtenida con las ecuaciones preconditionadas para  $t = 100$ .

La convergencia en cada paso de tiempo es similar para ambos sistemas (precondicionado y sin precondicionar), tomando alrededor de 6 iteraciones para disminuir 10 órdenes en la norma del residuo. El sistema precondicionado con el preconditionador SP para estado estacionario no convergió en el primer paso de tiempo, aún luego de 4000 iteraciones en el pseudo-tiempo.

Como observación, cabe mencionar que Liu y Pletcher (2007) reportan que el método LU-SGS (Xu et al., 2005) (el cual es un método de Volúmenes Finitos basado en la densidad) no logra capturar para este test el acoplamiento entre las ondas de presión y velocidad. Además, indican que la convergencia del método fue alcanzada por la adición de un término disipativo relativamente alto. Este y otros tests 1D similares, pudieron ser resueltos correctamente con las ecuaciones no preconditionadas cuando se aplica el Método de Elementos Finitos.

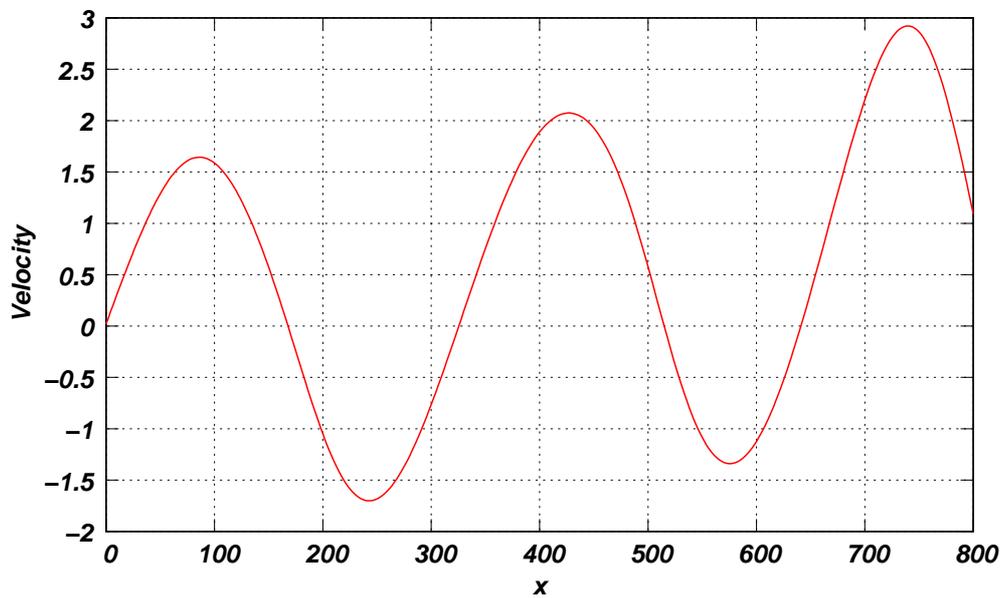


Figura 3: Distribución de velocidad obtenida con las ecuaciones preconditionadas para  $t = 100$ .

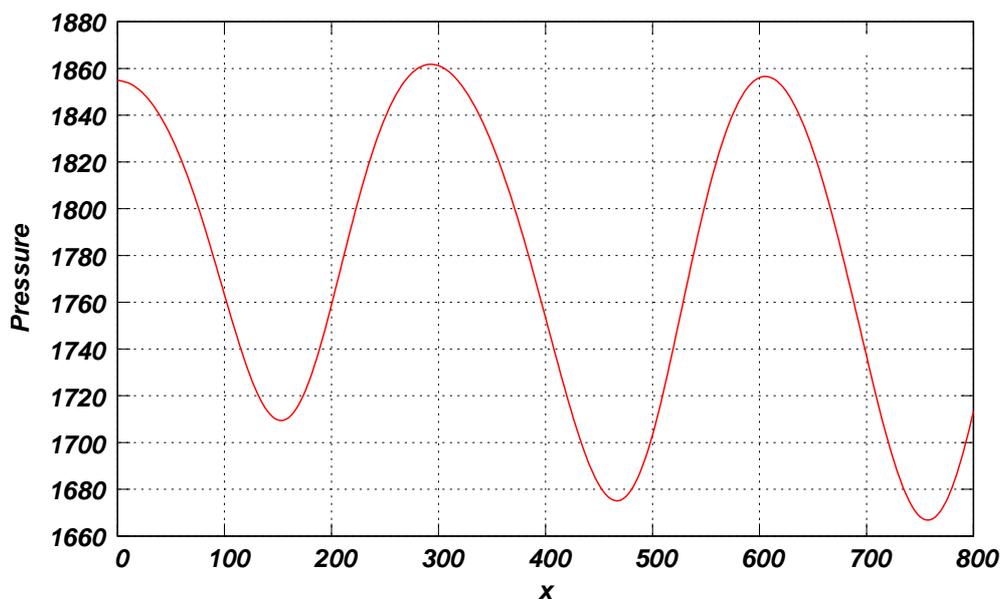


Figura 4: Distribución de presión obtenida con las ecuaciones preconditionadas para  $t = 100$ .

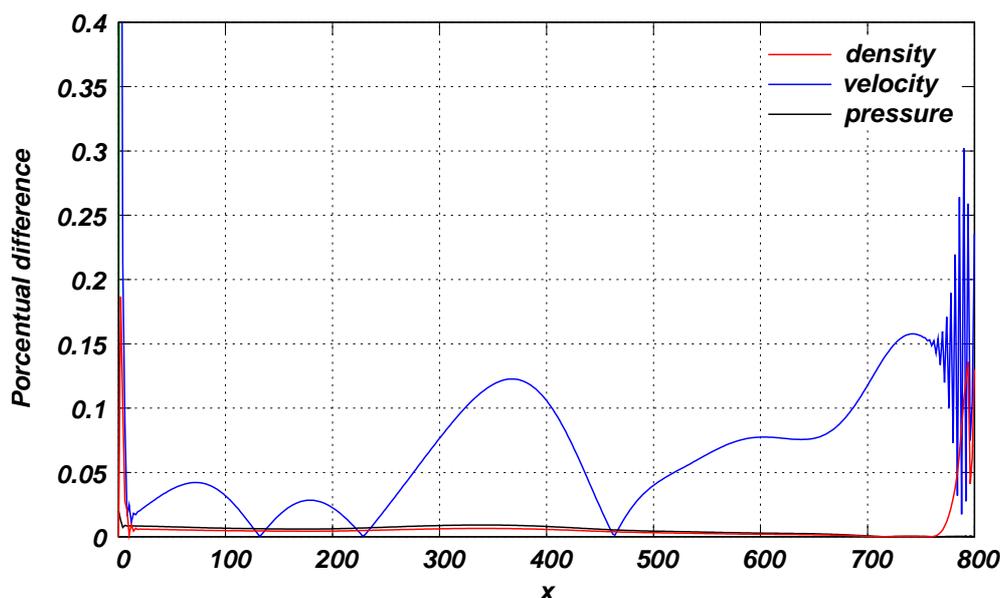


Figura 5: Diferencia porcentual entre las soluciones obtenidas con las ecuaciones preconditionadas y sin preconditionar para  $t = 100$ .

#### 4.2. Flujo en una cavidad cuadrada

El presente test ha sido empleado por décadas como *benchmark* de los *solvers* de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible. El mismo consiste en un fluido confinado dentro de una cavidad cuadrada cuya tapa se mueve con velocidad uniforme. El test fue resuelto para dos números de Reynolds: 100 y 1000. La malla empleada consistió de  $60 \times 60$  elementos cuadrangulares, uniforme para el caso  $Re = 100$  y, para  $Re = 1000$ , con una relación 1:10 entre los elementos cercanos a la pared y los ubicados en la región central del dominio. El número de Mach de la pared móvil es  $4.5 \times 10^{-4}$ . Como condiciones de contorno se impuso una temperatura constante sobre las paredes y, además, no deslizamiento sobre las mismas. Inicialmente el fluido está en reposo y a presión y temperatura constantes. El test fue resuelto con la estrategia de preconditionamiento presentada y, con fines de comparación, también resolviendo las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible (NSI) aplicando elementos finitos estabilizados mediante el método Streamline Upwind/Petrov-Galerkin (SUPG, Brooks y Hughes (1982)) y Pressure-Stabilizing/Petrov-Galerkin (PSPG, Tezduyar et al. (1992)). Las figuras 6 a 8 presentan los campos de densidad, módulo de la velocidad y perturbación de la presión (calculada como  $p - \bar{p}$ , con  $\bar{p} = 1 \times 10^5$  Pa) obtenidos. Se observa que los mismos son suaves y no presentan oscilaciones numéricas.

Para analizar la precisión del método de resolución presentado, se comparan los perfiles de velocidad en las líneas centrales vertical y horizontal de la cavidad ( $x = 0.5$  e  $y = 0.5$ , respectivamente). La componente  $u$  de la velocidad se compara sobre la línea vertical, mientras que la componente  $v$  es analizada sobre la horizontal. Se comparan las soluciones correspondientes al sistema preconditionado, las ecuaciones para flujo incompresible y una solución de referencia calculada por Ghia et al. (1982). Las figuras 9 y 10 presentan estos resultados. La solución calculada a partir de las ecuaciones preconditionadas presenta una pequeña discrepancia respecto de la obtenida con la formulación incompresible, principalmente en cercanía de extremos locales de los perfiles. Esto puede deberse a una falta de convergencia al estado estacionario del esquema preconditionado, ocasionada por errores de redondeo debido al uso de variables dimensionales.

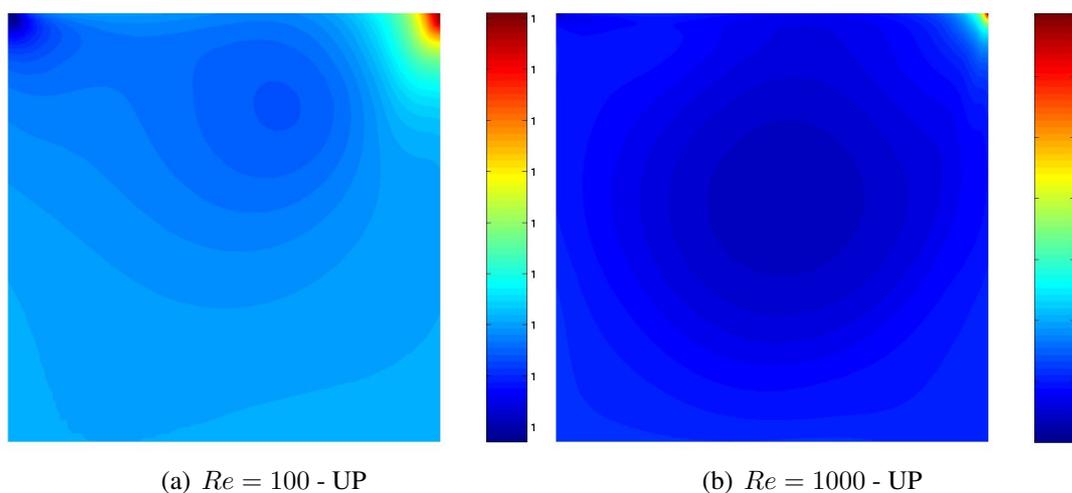


Figura 6: Campo de densidad convergido para el test de la cavidad cuadrada.

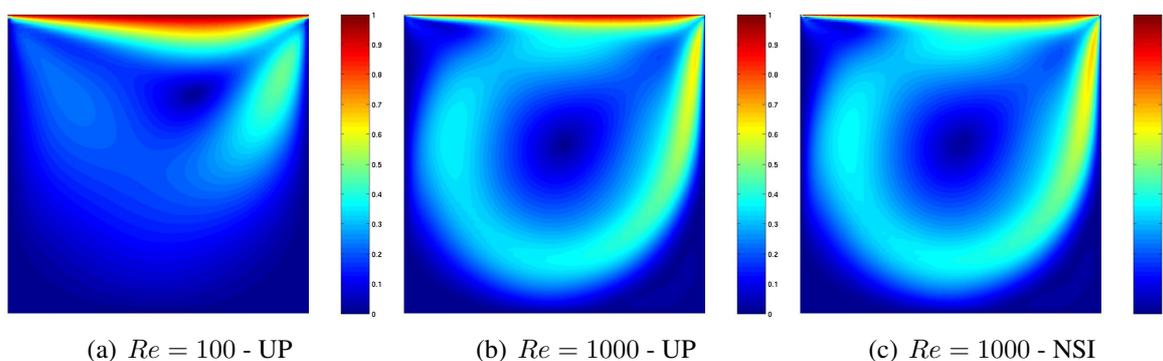


Figura 7: Módulo de la velocidad convergido para el test de la cavidad cuadrada.

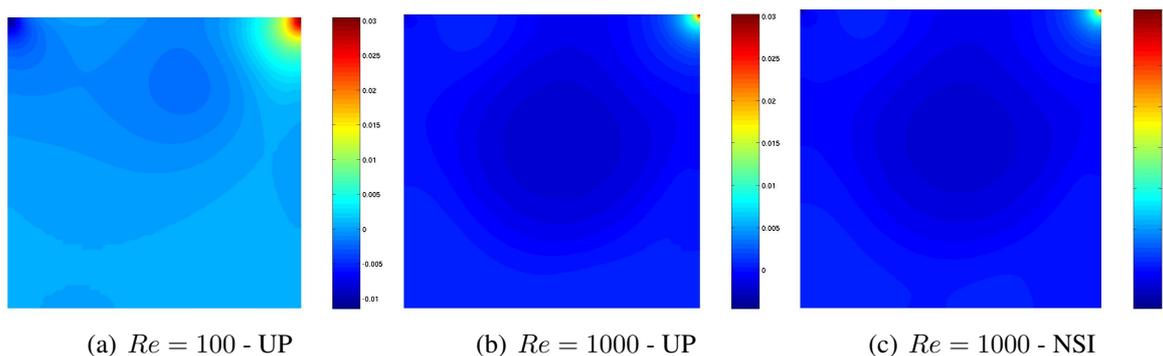


Figura 8: Campo de presión convergido para el test de la cavidad cuadrada.

### 4.3. Flujo en un canal con una indentación móvil

Este problema se trata de un flujo que escurre por un canal bidimensional con una indentación móvil. El mismo ha sido estudiado experimentalmente por [Pedley y Stephanoff \(1985\)](#) y numéricamente por [Ralph y Pedley \(1988\)](#). La figura 11 muestra un esquema de la geometría del dominio de flujo, con la forma de la indentación tomada del trabajo de [Pedley y Stephanoff](#)

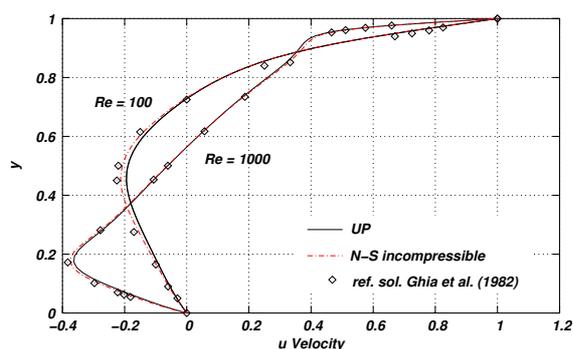


Figura 9: Comparación de la componente de velocidad  $u$  en la línea vertical central de la cavidad.

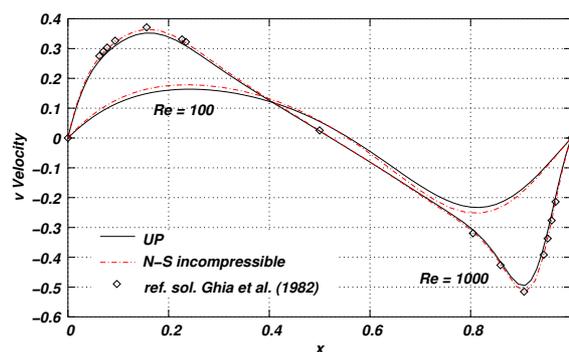


Figura 10: Comparación de la componente de velocidad  $v$  en la línea horizontal central de la cavidad.

(1985), y aproximada mediante la siguiente función

$$y(x) = \begin{cases} h & \text{si } 0 < x < x_1 \\ 0.5h\{1 - \tanh[a(x - x_2)]\} & \text{si } x_1 < x < x_3 \\ 0 & \text{si } x > x_3 \end{cases}$$

donde  $a = 4.14$ ,  $x_1 = 4b$ ,  $x_3 = 6.5b$ ,  $x_2 = 0.5(x_1 + x_3)$  y

$$h = 0.5h_{\text{máx}} [1 - \cos(2\pi t^*)] \tag{48}$$

siendo  $t^* = \frac{t - t_0}{\Upsilon}$ .

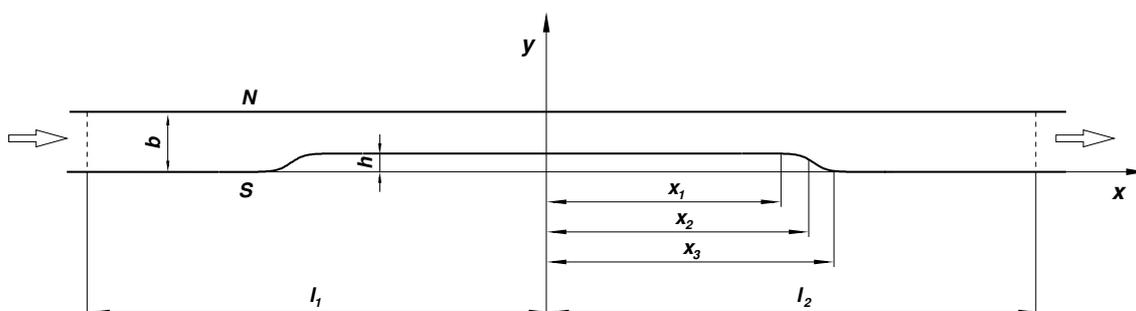


Figura 11: Geometría del dominio de flujo (no a escala):  $b = 1$  cm,  $l_1 = 9.85$  cm,  $l_2 = 18.0$  cm.

$b$  es la altura del canal,  $\Upsilon$  el período de oscilación y  $h_{\text{máx}} = 0.38b$  especifica el bloqueo máximo de la sección transversal del canal en el instante  $t^* = 0.5$ . La geometría del canal es simétrica respecto de  $x = 0$ . El número de Strouhal basado en la altura del canal, la velocidad media  $U = 2/3u_{\text{máx}}$  y el período de oscilación,

$$St = \frac{b}{U\Upsilon}, \tag{49}$$

es 0.037, y el número de Reynolds basado en las mismas cantidades de referencia, es 507. En el instante inicial  $t = t_0$  el flujo se asume completamente desarrollado (flujo de Poiseuille), con una velocidad máxima  $u_{\text{máx}} = 1.5$  m/s. El perfil de velocidad se asume constante en la sección de entrada, imponiéndose además en dicha sección una densidad unitaria. En la sección

de salida se aplican condiciones de contorno dinámicas según se presentó en la sección §3.2, con la estrategia ULSAR para el estado de referencia. Sobre las paredes del canal, asumidas isotérmicas, se impone la condición de no deslizamiento. La dinámica de la malla fue resuelta aplicando la estrategia presentada por López et al. (2007), la cual consiste en la optimización de la calidad de la grilla empleando un indicador geométrico de calidad del elemento. La malla utilizada consistió en una de 12362 elementos triangulares no estructurada y 6759 nodos, siendo el paso de tiempo de la simulación  $\Delta t = \Upsilon/200$ .

Las figuras 12, 13 y 14 presentan, respectivamente, los campos de densidad, módulo de la velocidad y perturbación de la presión (con  $\bar{p} = 1 \times 10^5$  Pa) para los instantes  $t^* = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  y 1. Estos resultados fueron obtenidos con la estrategia de preconditionamiento presentada.

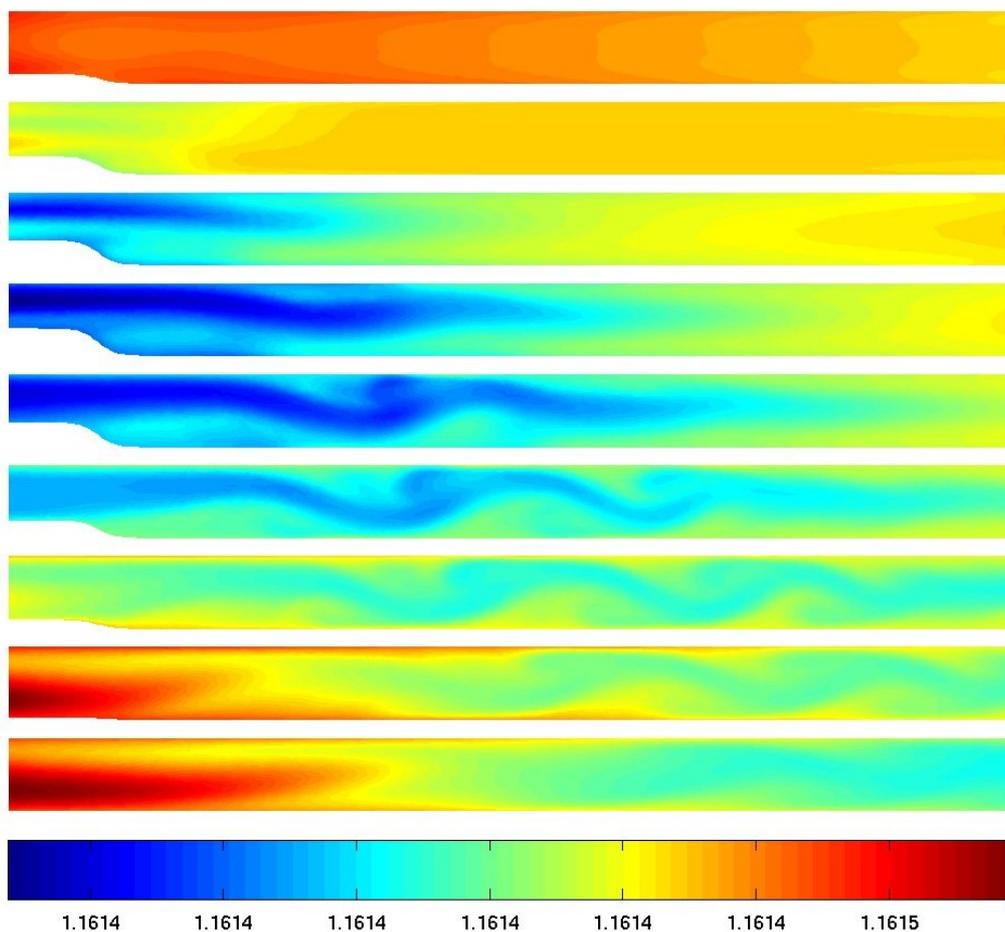


Figura 12: Campo de densidad ( $[\text{kg}/\text{m}^3]$ ) para el test del canal con una indentación móvil obtenido con la estrategia UP. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  y 1.

La tabla 1 muestra una comparación de los valores de velocidad máxima del flujo y el instante de aparición de los tres primeros vórtices. Se comparan los resultados obtenidos con la estrategia propuesta, y dos soluciones considerando las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible.

En la figura 15 se puede observar la posición de los tres primeros vórtices que se forman en función del tiempo. En la misma se presenta una comparación con los resultados experimentales reportados por Pedley y Stephanoff (1985) y una solución de Navier-Stokes para flujo incompresible (López et al., 2007). En dicha figura, el eje  $x$  se define siguiendo la propuesta de

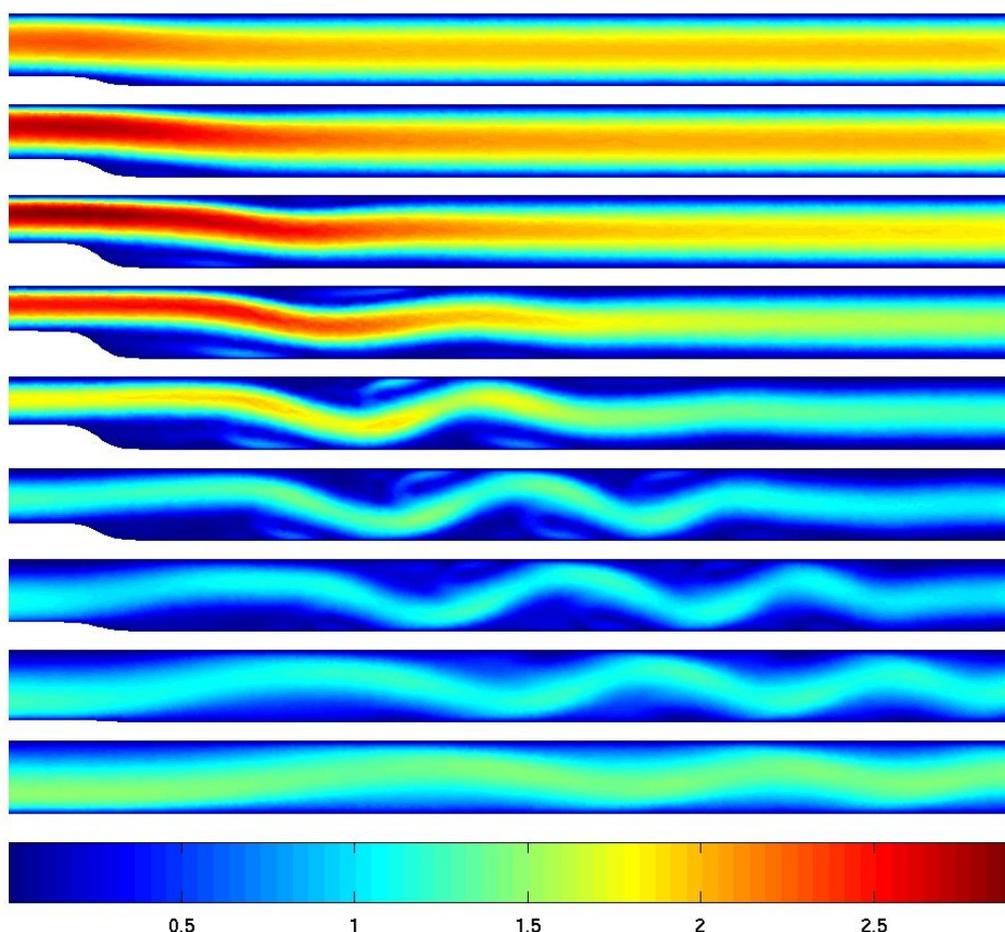


Figura 13: Módulo de la velocidad ([m/s]) para el test del canal con una indentación móvil obtenido con la estrategia UP. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  y  $1$ .

	UP	López et al. (2007)	Demirdžić y Perić (1990)
Velocidad máx.	2.916 m/s a $t^* = 0.37$	2.931 m/s a $t^* = 0.38$	2.645 m/s a $t^* = 0.4$
Aparece 1 <sup>er</sup> vórtice	$t^* = 0.22$	$t^* = 0.23$	$t^* = 0.2-0.25$
Aparece 2 <sup>do</sup> vórtice	$t^* = 0.345$	$t^* = 0.35$	$t^* = 0.35-0.4$
Aparece 3 <sup>er</sup> vórtice	$t^* = 0.425$	$t^* = 0.42$	$t^* = 0.45$

Tabla 1: Comparación de los resultados obtenidos con el sistema de ecuaciones preconditionadas y dos soluciones de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible.

la referencia (Pedley y Stephanoff, 1985)

$$x^* = \frac{(x - x_1)(10St)^{1/3}}{b} \quad (50)$$

Con el objetivo de evaluar la utilidad de la herramienta de preconditionamiento, el test fue resuelto bajo las mismas condiciones con el sistema de ecuaciones no preconditionadas. En las figuras 16, 17 y 18 se observan respectivamente los campos de densidad, módulo de la velocidad y perturbación de la presión para los instantes  $t^* = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1$ . La solución obtenida no representa el comportamiento del fluido, dado que no se generan los distintos vórtices. El campo de presión calculado posee “ruido” numérico, el cual no puede observarse en la figura 18 debido a que la escala se mantuvo fija. Por este motivo, se incluye la figura 19 con

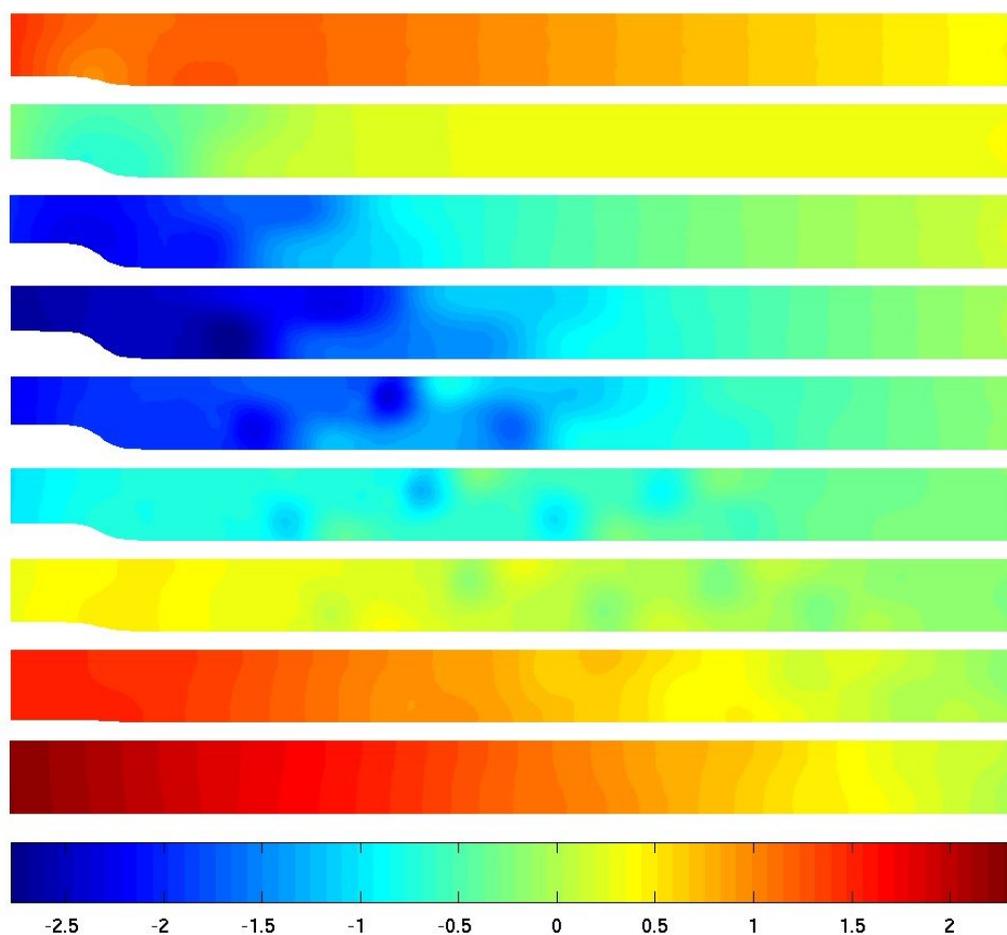


Figura 14: Campo de la perturbación en la presión ([Pa]) para el test del canal con una indentación móvil obtenido con la estrategia UP. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9$  y 1.

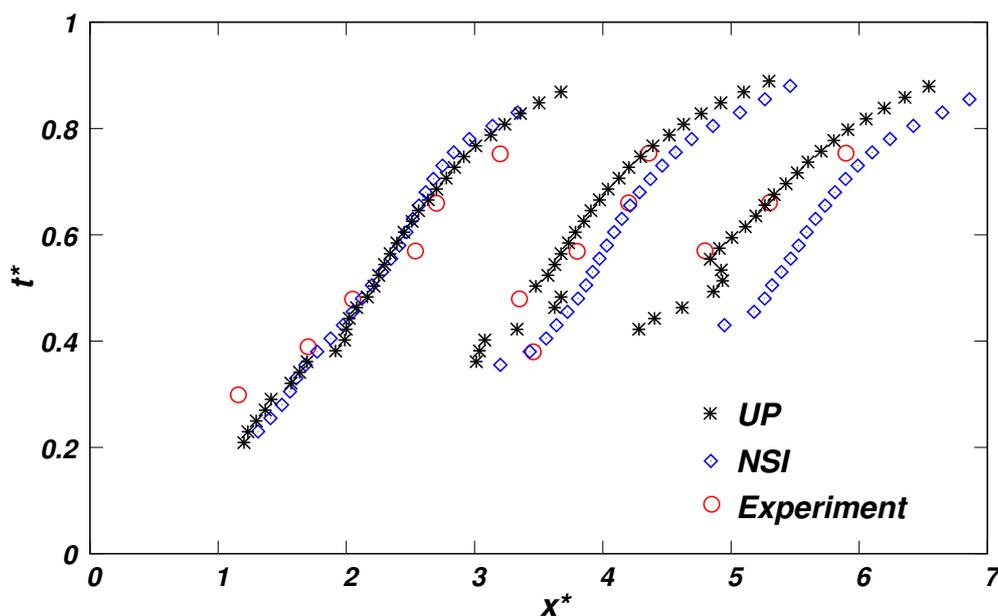


Figura 15: Evolución temporal de los tres primeros vórtices formados.

una escala de colores apropiada. Dicha figura corresponde al campo de perturbación en la presión para el instante  $t^* = 0.5$ . La figura 20 corresponde al mismo campo representado como elevación tridimensional. Tales oscilaciones numéricas pueden deberse a la sub-estabilización del esquema no preconditionado cuando se aplica la ecuación (38) para el cálculo de la matriz de tiempos intrínsecos, según lo discutido en la sección § 3.1. Además, siendo el  $CLF_u$   $\mathcal{O}(1)$  ( $CLF_c$   $\mathcal{O}(1/M)$ ) y el esquema de integración temporal sólo de primer orden, la formulación del sistema no preconditionado presenta una elevada difusividad, lo cual se evidencia en los resultados obtenidos.

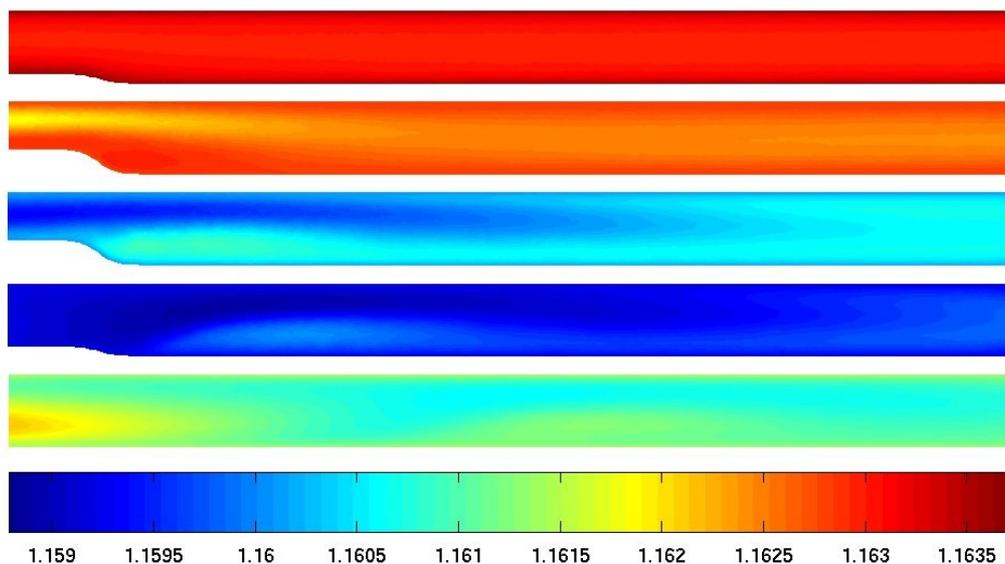


Figura 16: Campo de densidad ( $[\text{kg}/\text{m}^3]$ ) para el test del canal con una indentación móvil obtenido sin preconditionar el sistema. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y 1.

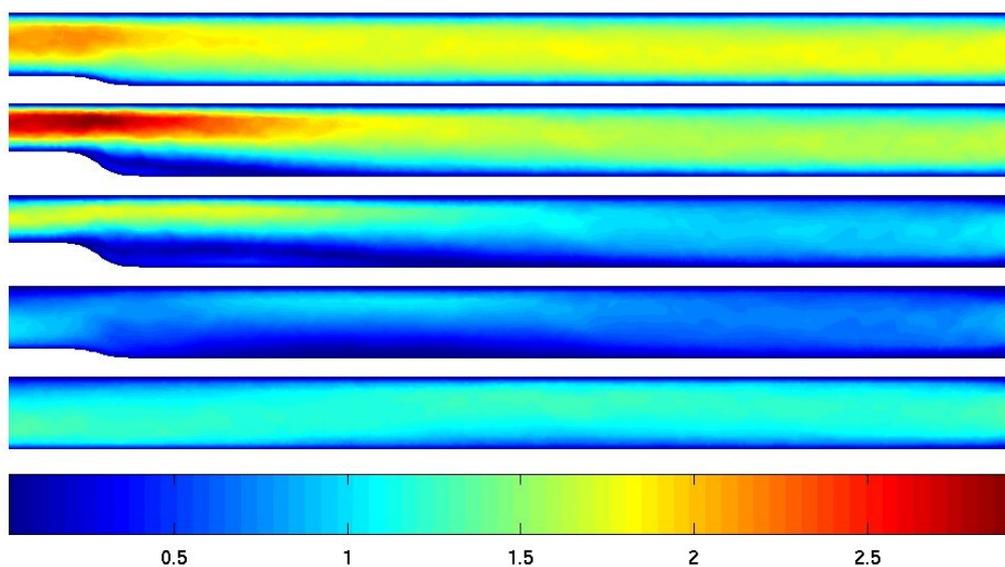


Figura 17: Módulo de la velocidad ( $[\text{m}/\text{s}]$ ) para el test del canal con una indentación móvil obtenido sin preconditionar el sistema. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y 1.

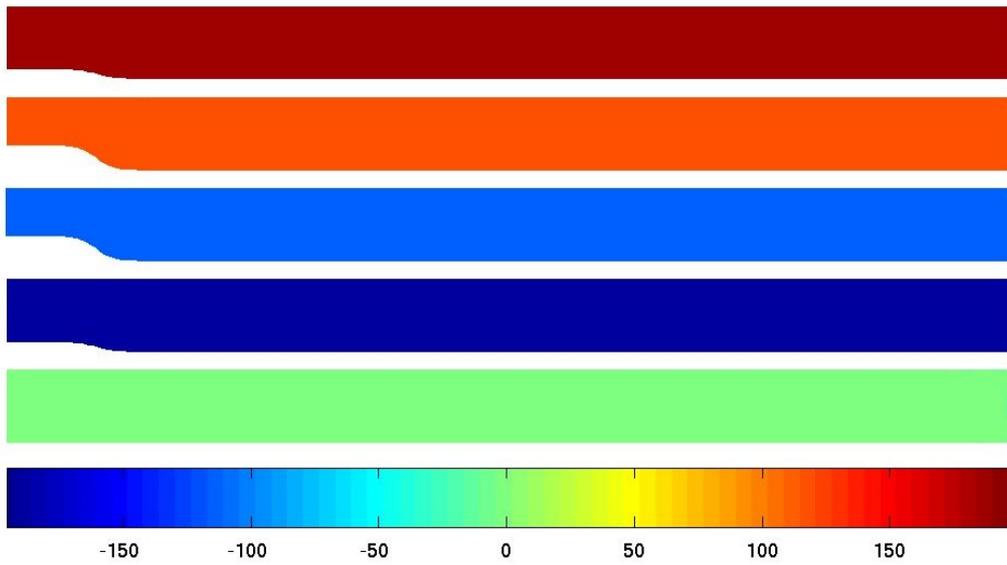


Figura 18: Campo de la perturbación en la presión ([Pa]) para el test del canal con una indentación móvil obtenido sin precondicionar el sistema. De arriba hacia abajo, instantes  $t^* = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  y  $1$ .

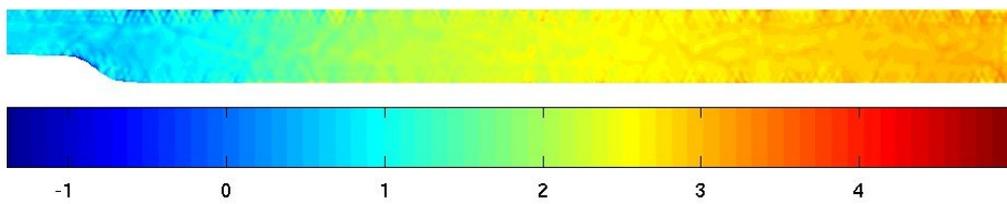


Figura 19: Campo de la perturbación en la presión ([Pa]) para el test del canal con una indentación móvil obtenido sin precondicionar el sistema en el instante  $t^* = 0.5$ , donde se modificó la escala del mapa de colores.

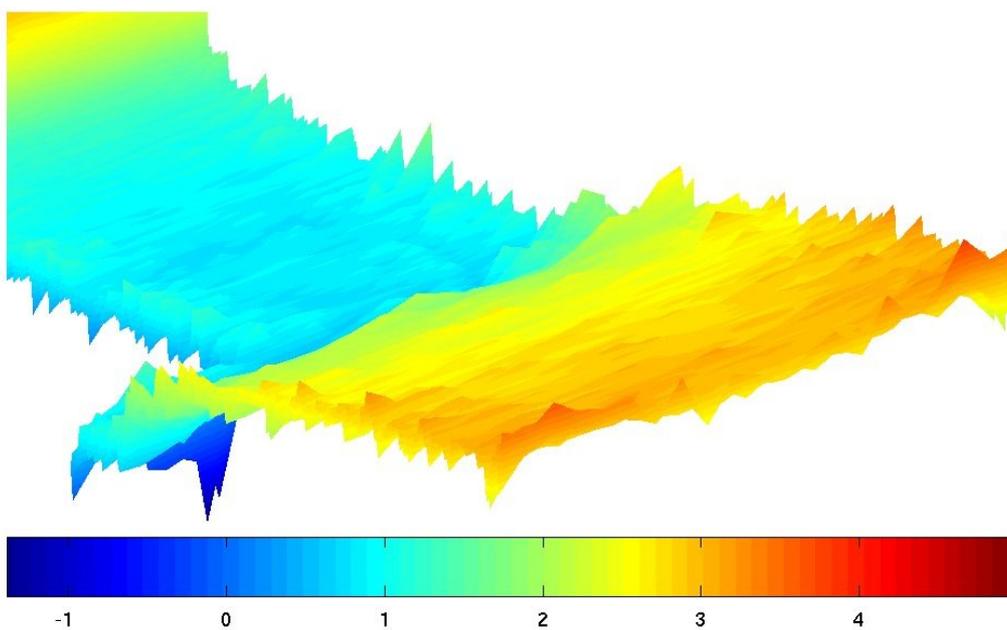


Figura 20: Campo de la perturbación en la presión ([Pa]) para el test del canal con una indentación móvil obtenido sin precondicionar el sistema en el instante  $t^* = 0.5$ .

## 5. CONCLUSIONES

Se presentó la adaptación al caso no estacionario del método de preconditionamiento de las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo compresible en un contexto de Elementos Finitos, aplicable a la resolución de flujos a bajo número de Mach. El preconditionador utilizado fue uno diseñado originalmente para el cálculo de flujos estacionarios con el Método de Volúmenes Finitos. Mediante un análisis de autovalores del sistema de ecuaciones preconditionadas, se mostró que deben redefinirse los parámetros involucrados en el preconditionador para que el número de condición sea  $\mathcal{O}(1)$  independientemente del paso temporal utilizado. Se presentaron además la estabilización del Método de Elementos Finitos y el tratamiento de condiciones de contorno absorbentes.

Fueron resueltos varios casos *test* los cuales presentan bajos números de Mach. Se observó un buen acuerdo entre las soluciones obtenidas con la estrategia propuesta y soluciones calculadas a partir de una formulación incompresible. Asimismo se mostró que, en igualdad de condiciones, utilizar el sistema no preconditionado conduce a soluciones excesivamente difusivas y que presentan “ruido” numérico en alguno/s de sus campos.

## REFERENCIAS

- Brooks A. y Hughes T. Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32:199–259, 1982.
- Choi Y.H. y Merkle C. The application of preconditioning in viscous flows. *Journal of Computational Physics*, 105:207–223, 1993.
- Demirdžić I. y Perić M. Finite volume method for prediction of fluid flow in arbitrarily shaped domains with moving boundaries. *Journal of Algorithms*, 10:771–790, 1990.
- Ghia U., Ghia K., y Shin C. High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48:387–411, 1982.
- Heywood J. *Internal Combustion Engine Fundamentals*. McGraw-Hill, Inc., 1988.
- Hirsch C. *Numerical Computation of Internal and External Flows. Volume 2: Computational Methods for Inviscid and Viscous Flows*. John Wiley & Sons, 1990.
- Hughes T. y Mallet M. A new finite element method for CFD: III. The generalized streamline operator for multidimensional advection-diffusion systems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 58:305–328, 1986.
- Le Beau G., Ray S., y Tezduyar T. SUPG finite element computation of compressible flows with the entropy and conservation variables formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 104:27–42, 1993.
- Liu K. y Pletcher R. A fractional step method for solving the compressible Navier-Stokes equations. *Journal of Computational Physics*, 226:1930–1951, 2007.
- López E., Nigro N., Storti M., y Toth J. A minimal element distortion strategy for computational mesh dynamics. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1898–1929, 2007.
- Merkle C. Computation of flows with arbitrary equations of state. *AIAA Journal*, 36:515–521, 1998.
- Mittal S. y Tezduyar T. A unified finite element formulation for compressible and incompressible flows using augmented conservation variables. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 161:229–243, 1998.
- Nigro N., Storti M., Idelsohn S., y Tezduyar T. Physics based GMRES preconditioner for

- compressible and incompressible Navier-Stokes equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 154:203–228, 1998.
- Pedley T. y Stephanoff K. Flow along a channel with a time-depent indentation in one wall: the generation of vorticity waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 160:337–367, 1985.
- Ralph M. y Pedley T. Flow in a channel with a moving indentation. *Journal of Fluid Mechanics*, 190:87–112, 1988.
- Storti M., Nigro N., Paz R., y Dalcín L. Dynamic boundary conditions in computational fluid dynamics. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197:1219–1232, 2008.
- Tezduyar T., Mittal S., Ray S., y Shih R. Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity-pressure elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 95:221–242, 1992.
- Turkel E. y Vasta V. Local preconditioners for steady and unsteady flow applications. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 39:515–535, 2005.
- Vigneron D., Deliége G., y J-A. E. Low Mach number local preconditioning for unsteady viscous finite volumes simulations on 3D unstructured grids. *European Conference on Computational Fluid Dynamics*, 2006.
- Xu X., Lee J., y Pletcher R. A compressible finite volume formulation for large eddy simulation of turbulent pipe flows at low Mach number in cartesian coordinates. *Journal of Computational Physics*, 203:22–48, 2005.