

MODELACIÓN NUMÉRICA DE LA DISTRIBUCION TRANSVERSAL DE VELOCIDADES EN CANALES – CASO TRAPEZIAL

Juan F. Weber^{a,b} y Sebastián Martijena^a

^aLaboratorio de Hidráulica, Departamento de Ingeniería Civil, Facultad Regional Córdoba, Universidad Tecnológica Nacional, Maestro M. López esq. Cruz Roja Argentina, Ciudad Universitaria - CP (X5016ZAA) Córdoba, Argentina, jweber@civil.frc.utn.edu.ar

^bDepartamento de Computación, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, Universidad Nacional de Córdoba, Av. Velez Sarsfield 1611- Ciudad Universitaria Córdoba, Argentina

Palabras clave: Mecánica de Fluidos, flujo a superficie libre, Método de Elementos Finitos, turbulencia.

Resumen. Se presentan resultados preliminares de un modelo matemático que permite estimar la distribución transversal (en el plano de la sección) de la componente longitudinal de la velocidad, promediada en el tiempo, para canales a superficie libre, bajo flujo uniforme y estacionario. Se derivan las fórmulas que representan la distribución vertical y lateral de la viscosidad de torbellino (coeficiente de difusión de momentum) bajo ciertas hipótesis simplificativas. La ecuación diferencial que gobierna el campo de velocidades es una ecuación en derivadas parciales elíptica, no homogénea, con un término fuente asociado a la acción gravitatoria y que surge como integración de la ecuaciones de movimiento (ecuaciones de Navier-Stokes) en la dirección principal del flujo junto con la ecuación de conservación de masa. Para su solución se utilizó el método de los elementos finitos, implementado a través del software FlexPDE. Se aplica el modelo a canales de sección trapezoidal con diferentes relaciones de aspecto y se contrastan los resultados obtenidos con mediciones experimentales. A su vez, se identifican y analizan las estructuras de flujo, y su influencia sobre el flujo primario. Se considera que la distribución de velocidades es predicha satisfactoriamente por modelo propuesto.

1. INTRODUCCIÓN

A lo largo de la historia el hombre se ha radicado en las cercanías de ríos e interactuado con ellos, así como ha utilizado canales artificiales para el transporte de agua. Conocer la distribución transversal de velocidades en canales es de fundamental importancia, ya que tiene aplicación directa en problemas fluidodinámicos y ambientales como el cálculo refinado de aforos, dispersión y transporte de sedimentos y otras sustancias (ej. contaminantes), procesos de erosión y sedimentación, cambios en la morfología del cauce, diseño de canales, etc.

La sección transversal más comúnmente encontrada en ríos y canales de conducción a superficie libre (agua potable y riego, centrales hidroeléctricas, etc.) es la trapezoidal. En los primeros debido a que es una sección típica que representa las complejas formas adoptadas por la sección erosionada, y en los segundos a causa de la sencillez en la construcción, como la seguridad frente a los empujes activos y pasivos, producidos por las grandes fluctuaciones de la superficie libre por periodos.

El flujo a superficie libre es prácticamente en todos los casos turbulento, debido a la baja viscosidad del agua y a la combinación de velocidades relativamente altas con una escala geométrica (profundidad de flujo) importante.

El flujo turbulento es dependiente del tiempo y posee un continuo rango de escalas (o tamaños) de torbellinos o vórtices. Las más grandes, llamadas macro-escalas, son usualmente determinadas por el tamaño de la geometría que contiene dicho flujo, por ejemplo el espesor de la capa límite. Las más chicas, llamadas micro-escalas (o micro-escala de Kolmogorov), son determinadas por la viscosidad y la disipación de energía, y tienen un comportamiento universal. El tamaño de estas últimas decrece a medida que el número de Reynolds aumenta. Tamaños menores a estos son disipados inmediatamente por efecto de la viscosidad (Pope, 2000).

Las macro-escalas contienen una significativa porción de la energía del flujo y casi no tienen disipación. Las micro-escalas son altamente disipativas y contienen una muy pequeña fracción de la energía total del flujo. Para que el flujo turbulento siga existiendo, necesita de un constante suministro de energía. Esta energía es introducida a nivel de las macro-escalas y subsecuentemente transportada por acción no lineal a menores y menores escalas. La energía que llega a las micro-escalas, es completamente disipada terminando subsiguientes transportes a escalas menores (Pope, 2000).

Las ecuaciones de Navier-Stokes, dependientes del tiempo, junto con la ecuación de continuidad, forman un sistema de ecuaciones determinado que es capaz de representar el movimiento de todas las escalas en cualquier instante de tiempo. Debido a la naturaleza de este sistema (en derivadas parciales, no lineal), su solución es posible sólo con la ayuda de los métodos numéricos.

El desarrollo de modelos para la predicción del flujo en canales ha sufrido un importante avance a lo largo del siglo XX. Desde los modelos cero-dimensionales, que permiten calcular la velocidad media, como la célebre ecuación de Manning, pasando por los modelos cuasi-unidimensionales, utilizados principalmente en los canales de sección compuesta, como los métodos de Lotter, Pavlovski, Horton, etc. (Chow, 1959; Chaudhry, 1991), los modelos unidimensionales, como el Método de la Distribución Lateral (Shiono and Knight, 1988, 1991), a través de su implementación computacional (Weber and Menéndez, 2003), hasta los modelos tridimensionales basados en las ecuaciones RANS (Reynolds Averaged Navier-Stokes) y los tetradimensionales (tres espaciales, una temporal) LES y DNS (Large Eddy Simulation, Direct Numeric Simulation).

Las ecuaciones RANS simplifican las ecuaciones de movimiento promediándolas en el tiem-

po a través de la descomposición de Reynolds. Esto consiste en expresar la velocidad instantánea como la suma de la velocidad media en el tiempo, más la fluctuación $U' = U + u$. Sin embargo, el sistema se vuelve indeterminado debido a la aparición de correlaciones entre las fluctuaciones de la velocidad, que representan el transporte de momentum. Dichos términos son conocidos como *tensiones de Reynolds*. Esto es denominado *el problema del cierre*: el número de incógnitas (diez: tres componentes de la velocidad, presión, seis tensiones o correlaciones) es mayor al número de ecuaciones (cuatro: ecuación de continuidad y tres componentes de las ecuaciones de Navier-Stokes).

Los modelos basados en RANS, deben entonces modelar dichas correlaciones para poder resolver las ecuaciones, y de acuerdo a como lo hagan se desprende la siguiente clasificación: modelos de viscosidad de torbellino (directos, de una ecuación, de dos ecuaciones); y modelos de segundo orden de cierre (ecuación de tensión de Reynolds, full stress-equation). Los modelos directos de viscosidad de torbellino son económicos computacionalmente, pero sus resultados (hasta el momento) tienen un orden de error elevado. A medida que se avanza en la lista los modelos se vuelven más complejos, mejores predictores del flujo y requieren mayor tiempo de procesamiento. La ventaja que presentan los modelos basados en RANS es el bajo costo computacional frente a LES y DNS, a expensas de proveer resultados no instantáneos.

Como se mencionó anteriormente, las micro-escalas tienen un comportamiento muy similar y universal. Por esta razón, resulta práctico resolver las macro-escalas y modelar las menores. Este es el principio de LES como su nombre lo señala (Large Eddy Simulation). LES es capaz de proveer datos con variación temporal, pero el costo computacional a veces es muy alto, aún para las supercomputadoras de hoy.

DNS (Direct Numeric Simulation), resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes sin ningún modelo de turbulencia, es decir, puede resolver todas las escalas espaciales y temporales de flujo, pero su aplicación se limita a geometrías simples y con flujos de bajo número de Reynolds.

Los modelos descritos anteriormente que tienen la capacidad de modelar la distribución transversal de velocidades con buena aproximación, poseen un elevado grado de complejidad, demandan un gran costo computacional y requieren numerosos datos, parámetros, funciones y relaciones algebraicas empíricas (o semi-empíricas) que, en muchos casos, no están disponibles, por lo que su aplicación en la práctica ingenieril es muy poco usual.

Se presenta, entonces, como interesante el desarrollo de un modelo numérico sencillo, con pocos parámetros de fácil interpretación y conocidos en la literatura, y de carácter general para la predicción de la distribución transversal de velocidades en canales.

2. MODELO MATEMÁTICO

A continuación se desarrollan y analizan las ecuaciones que gobiernan el flujo y las fórmulas que representan la distribución vertical y lateral de la viscosidad de torbellino ε (coeficiente de difusión de momentum) bajo ciertas hipótesis simplificadoras. También se describen las condiciones de borde impuestas.

2.1. Ecuaciones Principales de Flujo

Para flujo uniforme y estacionario la ecuación de Navier-Stokes en la dirección principal del flujo puede ser combinada con la ecuación de conservación de masa para dar:

$$\rho \left[\frac{\partial UV}{\partial y} + \frac{\partial UW}{\partial z} \right] = \rho g S_0 + \frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{uw}) \quad (1)$$

donde U, V, W son las componentes de la velocidad promediada en el tiempo, en las direcciones x (longitudinal), y (lateral) y z (vertical); u, v, w son las fluctuaciones turbulentas de la velocidad con respecto a la media temporal (U, V y W , respectivamente), ρ es la densidad del agua, $S_0 = \sin\theta$ es la pendiente del fondo del canal, y $-\rho\overline{uv}$, $-\rho\overline{uw}$ las tensiones de Reynolds (ver figura 1)

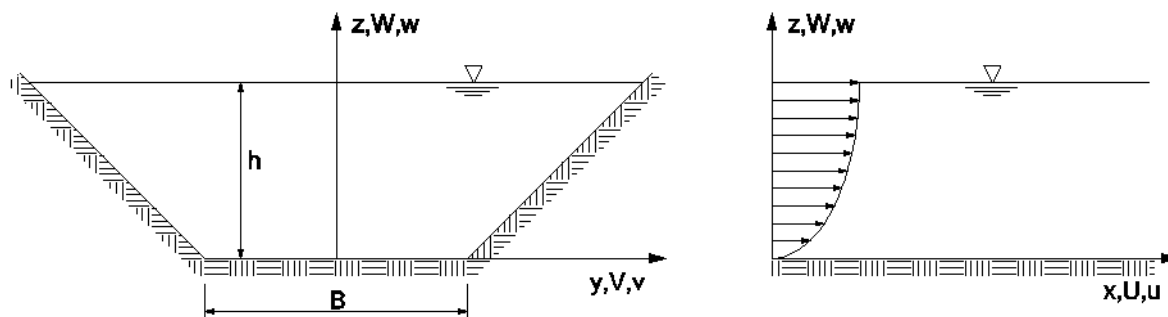


Figura 1: Configuración de flujo

El término del lado izquierdo de la ecuación (1) representa las corrientes secundarias (circulación en la sección transversal del canal), mientras que el término del lado derecho representa la suma de la acción gravitatoria y las tensiones (lateral y vertical) de Reynolds.

El esfuerzo de corte que se desarrolla entre capas paralelas del flujo viene dada por las siguientes expresiones (Pope, 2000):

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= -\rho\overline{uv} + \rho\nu\frac{\partial U}{\partial y} \\ \tau_{zx} &= -\rho\overline{uw} + \rho\nu\frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}\quad (2)$$

(esfuerzo de corte = tensiones de Reynolds + esfuerzos viscosos), ν es la viscosidad cinemática y la notación de subíndices es la siguiente: el primer subíndice hace referencia al eje perpendicular al plano donde está el esfuerzo, mientras que el segundo establece la dirección en la que actúa.

El esfuerzo de corte es mayormente producido por las tensiones de Reynolds, salvo en zonas muy próximas al contorno rígido, donde los esfuerzos viscosos dominan debido a que allí los gradientes de velocidad son muy altos y las fluctuaciones pequeñas. De hecho, en el contorno rígido las fluctuaciones, y consecuentemente los esfuerzos de Reynolds, desaparecen, entonces la tensión de corte es enteramente viscosa.

Debido a que resulta de interés conocer la distribución de velocidades en el seno del líquido, y que el predominio de los esfuerzos viscosos se limita a una pequeña parte, es posible omitir este término adecuando convenientemente las condiciones de borde. Entonces:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= -\rho\overline{uv} \\ \tau_{zx} &= -\rho\overline{uw}\end{aligned}\quad (3)$$

Por analogía con el esfuerzo viscoso, Boussinesq introduce la viscosidad de torbellino ε para

calcular el esfuerzo de corte turbulento:

$$\begin{aligned}\tau_{yx} &= \rho \varepsilon_{yx} \frac{\partial U}{\partial y} \\ \tau_{zx} &= \rho \varepsilon_{zx} \frac{\partial U}{\partial z}\end{aligned}\quad (4)$$

en donde es posible apreciar que el esfuerzo de corte entre capas de fluido es proporcional al gradiente de velocidad.

La velocidad máxima $U_s = \sqrt{V^2 + W^2}$ de las corrientes secundarias es alrededor del 2 % de la velocidad media en la sección (Q/A) para canales de relación $B/h = 2$ (Noat and Rodi, 1982). Al aumentar esta relación, las celdas de recirculación tienden a disminuir en tamaño y fuerza (Chiu and Chiou, 1986). Debido a esto, y con la finalidad de simplificar el modelo, podemos despreciarlas. Entonces, la ecuación (4) toma la forma:

$$\frac{\partial}{\partial y} (-\rho \overline{uv}) + \frac{\partial}{\partial z} (-\rho \overline{uw}) = -\rho g S_0 \quad (5)$$

reemplazando (3) en (5):

$$\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} = -\rho g S_0 \quad (6)$$

luego (4) en (6)

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\varepsilon_{yx} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon_{zx} \frac{\partial U}{\partial z} \right) = -g S_0 \quad (7)$$

llegando a la ecuación diferencial que gobierna la distribución de la componente longitudinal de la velocidad, en el plano transversal a la corriente y promediada en el tiempo, para canales a superficie libre, bajo flujo uniforme y estacionario. Esta es una ecuación en derivadas parciales (EDP), elíptica, no homogénea (ecuación de Poisson) y cuyo término fuente está asociado a la acción gravitatoria.

2.2. Viscosidad de Torbellino

Como se mencionó, Boussinesq introduce la viscosidad de torbellino, haciendo analogía con el esfuerzo viscoso, para calcular el esfuerzo de corte turbulento como puede verse en las ecuaciones (4). De éstas es posible interpretar que el esfuerzo de corte entre capas de fluido es proporcional al gradiente de velocidad en la dirección perpendicular a dichas capas, donde ε es la constante de proporcionalidad que cuantifica la transferencia de momentum en las distintas direcciones (también es posible decir que ε_{zx} y ε_{yx} caracterizan los torbellinos de eje horizontal y vertical respectivamente).

La viscosidad de torbellino ε es una magnitud escalar (asumiendo una condición de turbulencia isotrópica), y no es una propiedad del fluido como la viscosidad dinámica, sino que depende de la estructura de la turbulencia.

Es posible asumir diversas distribuciones en el dominio de solución para la viscosidad de torbellino ε . La hipótesis simplificativa de asumir un valor uniforme de ε en todo el dominio (utilizada en otro tipo de problemas hidrodinámicos) no dio resultados satisfactorios en la calibración del presente modelo. Por ello se buscó una distribución no uniforme de esta magnitud, utilizando expresiones algebraicas independientes entre sí para representar la variación de ε_{yx} y ε_{zx} , cuyos fundamentos se detallan a continuación.

En canales infinitamente anchos (ver figura 2) donde $B/h \rightarrow \infty$, y por lo tanto $\frac{\partial U}{\partial y} = 0$, es de esperar que:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = f(U_c, z) \quad (8)$$

donde

$$U_c = \sqrt{gRS_0} = \sqrt{\tau_0/\rho} \quad (9)$$

es la velocidad de corte media en la sección, g la aceleración de la gravedad, $R = A/P$ el radio hidráulico (área de la sección transversal sobre perímetro mojado, que en el caso de canales infinitamente anchos es igual a la profundidad de flujo h), $S_0 = \sin\theta$ la pendiente del fondo del canal y τ_0 es esfuerzo de corte en el fondo.

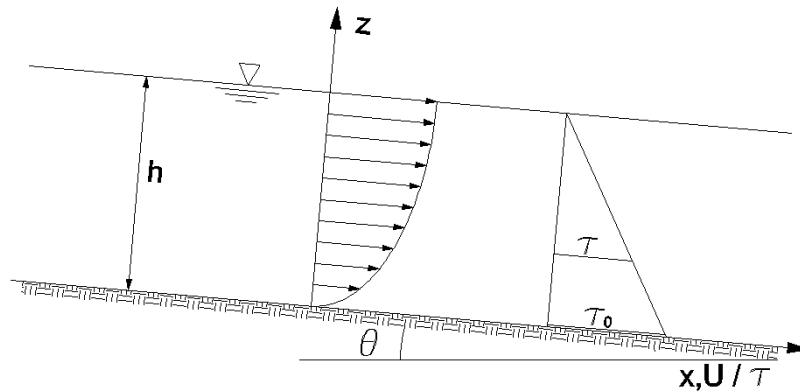


Figura 2: Canal de ancho infinito

Por análisis adimensional, es posible obtener:

$$\frac{\partial U}{\partial z} \propto \frac{U_c}{z} \Rightarrow \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{U_c}{\kappa z} \quad (10)$$

donde $\kappa = 0,41$ es una constante de proporcionalidad llamada constante de *von Kármán*. Esta constante tiene un comportamiento universal, independientemente del número de Froude y de la altura de rugosidad (Nezu and Nakagawa, 1993).

El esfuerzo de corte entre capas de fluido para canales a superficie libre, bajo flujo uniforme y estacionario, varía linealmente desde cero en la superficie hasta $\tau_0 = \rho gRS_0$ en el fondo del canal, (Pope, 2000). Por lo tanto:

$$\tau_{zx} = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (11)$$

reemplazando (4) en (11):

$$\rho \varepsilon_{zx} \frac{\partial U}{\partial z} = \tau_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right) \Rightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{\tau_0 \left(1 - \frac{z}{h}\right)}{\rho \frac{\partial U}{\partial z}} \quad (12)$$

elevando al cuadrado (9)

$$U_c^2 = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (13)$$

reemplazando (10) y (13) en (12), se obtiene:

$$\varepsilon_{zx} = U_c \kappa z \left(1 - \frac{z}{h}\right) \quad (14)$$

donde h es la profundidad de flujo.

Se puede apreciar que la viscosidad de torbellino ε_{zx} varía parabólicamente con la coordenada z , siendo cero en el contorno rígido, aumentando hasta un máximo a la mitad de la profundidad, y luego disminuyendo hasta llegar a ser cero en la superficie libre. Aumentar el valor de ε_{zx} en un determinado punto, implica que $\frac{\partial U}{\partial z}$ debe disminuir para mantener el valor de τ_{zx} en dicho punto (ecuaciones 4), por lo que los perfiles verticales de U se hacen más planos. Lo opuesto ocurre si ε_{zx} disminuye.

Debido a que los esfuerzos de corte en la superficie libre son cero (no puede haber fluctuaciones v a través de ella), esta se comporta como un eje de simetría, es decir $\frac{\partial U}{\partial z} = 0$, a lo largo de toda la superficie. Haciendo analogía para canales simétricos con respecto a la coordenada y , podemos de modo similar deducir que en canales infinitamente profundos:

$$\varepsilon_{yx} = U_c \kappa y \left(1 - \frac{y}{b}\right) \quad (15)$$

donde b es la distancia horizontal del eje de simetría al contorno rígido del canal y varía linealmente según la coordenada z (debido a que el canal es trapezoidal).

De las ecuaciones (14) y (15), puede verse que $\varepsilon_{zx} \rightarrow 0$ y $\varepsilon_{yx} \rightarrow 0$ en la superficie y el contorno rígido. Esto ocurre debido a que en éstos los torbellinos de eje horizontal y vertical están limitados geoméricamente. La distribución parabólica analítica de ε_{zx} concuerda con las mediciones de Ueda et al. (1977) y Jobson and Sayre (1970).

Lamentablemente los autores no han hallado en la bibliografía mediciones de ε_{yx} para canales a superficie libre, no obstante experiencias en conductos cerrados (Quarmby and Quirk, 1972) respaldan la idea de que ε_{yx} no tiende a cero en el eje de simetría, a causa de que allí los vórtices de eje vertical no tienen impedido su desarrollo geométrico hacia el otro lado de dicho eje. En dichas mediciones se observa que ε_{yx} varía parabólicamente desde la pared hasta un máximo a la mitad del recorrido, para luego disminuir un 12 % en forma aproximadamente lineal hasta el centro del canal.

Por lo tanto, se aplicó la ecuación (15) en el dominio comprendido entre la pared y una divisoria distanciada $b/2$ de ésta, y desde allí hasta el centro ε_{yx} se mantuvo constante e igual al valor máximo alcanzado en $b/2$.

2.3. Condiciones de Borde

En canales abiertos, las condiciones de borde deben ser especificadas para la velocidad U tanto en el contorno rígido, como en la superficie libre y en los planos de simetría.

Superficie Libre

Como se mencionó, la superficie libre se comporta como un plano de simetría, por lo tanto la condición de borde a aplicar sobre toda su longitud es:

$$\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \quad (16)$$

Esto significa que los perfiles verticales y horizontales de U son perpendiculares a la superficie y ejes de simetría.

Contorno Rígido

Muy próximo a las paredes y al fondo del canal, y hasta una distancia vertical adimensional $z^+ \approx 5$, siendo $z^+ = zU_c/\nu$ (Nezu and Nakagawa, 1993), los esfuerzos viscosos desempeñan un papel fundamental, dando lugar a la denominada subcapa viscosa. El efecto de dichos esfuerzos se propaga una cierta distancia y pueden ser despreciables para $z^+ > 30$ (ver figura 3).

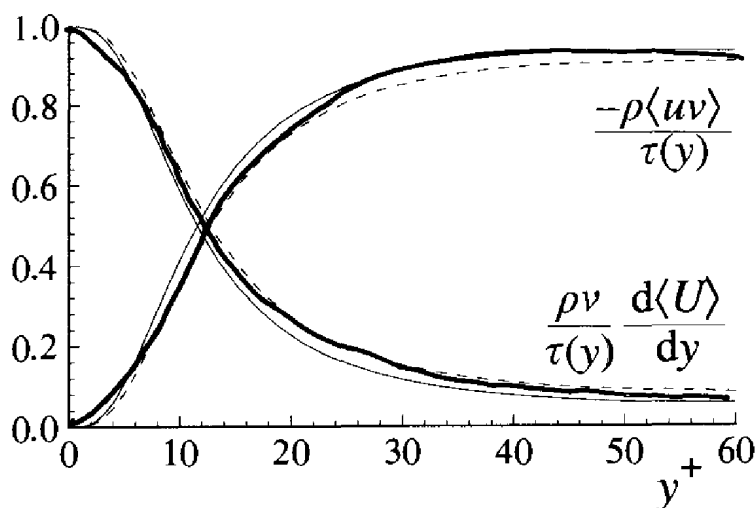


Figura 3: Perfiles de contribución de los esfuerzos viscosos y de Reynolds al esfuerzo de corte total. Trazos, $Re=5600$; Continua, $Re=13750$. (Pope, 2000)

Debido a que el modelo no tiene en cuenta estos esfuerzos viscosos, se utiliza la aproximación de **Launder and Spalding (1974)**. En efecto, esto significa que las condiciones de borde no están especificadas justo sobre la pared, sino que el primer punto de la malla numérica yace fuera de la subcapa viscosa, en una región donde la ley logarítmica de distribución de velocidades es válida con buena aproximación. En dicho punto, y a una distancia $z^+ \approx 30$, la componente longitudinal de la velocidad está relacionada con la velocidad de corte U_c a través de la conocida ley logarítmica

$$\frac{U}{U_c} = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + A \quad (17)$$

donde $\kappa = 0,41$ es la constante de von Kármán y $A = 5,3$ la constante de integración para paredes lisas. El efecto de la rugosidad puede ser tenido en cuenta cambiando apropiadamente el valor de A (Nezu and Nakagawa, 1993).

3. SOLUCION POR EL MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Como precedentemente se citó, la ecuación que gobierna el flujo en consideración es una ecuación diferencial en derivadas parciales, no homogénea, lineal y de carácter elíptico. Para su solución se utilizó el método de los elementos finitos (MEF), el cual fue implementado en esta primera aproximación al problema mediante el software FlexPDE (<http://www.pdesolutions.com>).

Este programa permite definir, en un lenguaje de *scripting* de muy alto nivel, el problema a resolver, indicando la o las ecuaciones diferenciales en su formulación fuerte, las incógnitas, parámetros del problema, geometría del dominio y condiciones de borde, tanto naturales como esenciales, tipos de resultados (gráficos y/o tabulares) a obtener. FlexPDE lleva el problema a

la formulación débil, realiza el mallado (el cual puede refinarse automáticamente a lo largo del cálculo en función de los valores que vaya adoptando el gradiente espacial de la incógnita), ensambla el sistema de ecuaciones nodales, lo resuelve, y presenta los resultados en la forma solicitada. En el caso de los gráficos, por ejemplo, como mapas de isolíneas, vistas 3D, *slices* o cortes, etc.

Tiene la gran virtud de permitir rápidamente evaluar la solución de un problema a través del MEF, en forma genérica (las ecuaciones diferenciales son definidas por el usuario). En el caso del modelo presentado, ha permitido en esta etapa evaluar el mismo sin recurrir al desarrollo e implementación de un código específico.

FlexPDE subdivide el dominio a través de una malla no estructurada de elementos triangulares. Es posible indicar zonas de mayor densificación de la malla, como así también definir regiones con distintos juegos de parámetros constitutivos.

En el nivel inicial de exploración del modelo presentado se ha mostrado como una herramienta útil de trabajo.

4. DATOS EXPERIMENTALES

Los datos experimentales utilizados en este trabajo, fueron obtenidos por Yuen (1989) en la universidad de Birmingham, Birmingham, Inglaterra. Estos están disponibles al público en general en sitio web: www.flowdata.bham.ac.uk.

El trabajo experimental fue realizado en un canal de laboratorio de 22 m de largo (ver figura 4), en el cual fueron construidos canales de sección trapezoidal con fondo liso de variados anchos de fondo B , con el fin de obtener mediciones detalladas de velocidad y esfuerzos de corte en flujos subcríticos y supercríticos. Las pendientes de los taludes laterales fueron fijadas en relación 1:1 (45° con la horizontal), y el ancho de fondo del canal fue modificado para obtener un amplio rango de valores de la relación B/h (ancho de fondo / profundidad de flujo).

Se realizaron cinco series de corridas para cinco pendientes de fondo diferentes (nominalmente establecidas cerca de 1, 4, 9, 16 y 25 ($\times 10^{-3}$)), entonces los caudales deberían ser aproximadamente en razón de: 1:2:3:4:5. En efecto las pendientes de fondo fueron 1.000, 3.969, 8.706, 14.52 y 23.37 ($\times 10^{-3}$). Esto indica que los datos fueron obtenidos tanto para flujos subcríticos como supercríticos ($0,39 < Fr < 3,59$).

Mediciones detalladas del esfuerzo de corte, con su correspondiente distribución de velocidades, sólo fueron hechas para casos específicos que son los que se muestran en la Tabla 1.

No. Exper.	S0 (10-3)	B (m)	h (m)	B/h	Q (l/s)	Re (10^3)	Fr
8	1	0.15	0.075	2.00	7.00	6.5653	0.5585
13	1	0.15	0.10	1.50	12.00	9.4664	0.5735
16	1	0.15	0.15	1.00	26.30	15.638	0.5902
23	1	0.45	0.045	10.00	8.20	4.6581	0.5788
26	1	0.45	0.06	7.50	13.42	7.0821	0.6044
206	8.706	0.15	0.073	2.06	23.90	24.305	1.9991
207	8.706	0.15	0.099	1.52	41.10	35.804	2.0004
406	23.37	0.15	0.073	2.06	39.00	44.714	3.2621
407	23.37	0.15	0.099	1.52	66.30	61.831	3.2269

Tabla 1: Resumen de los casos medidos por Yuen (1989) con mediciones de velocidad disponibles.

Lamentablemente no pudo hallarse información sobre bombas y cañerías de recirculación,



Figura 4: Setup experimental (Yuen, 1989)

procedimientos e instrumental de medición de caudal, velocidad, pendiente y profundidad, ubicación de la sección de aforo y material de construcción del canal. En las fotografías tampoco se observan a la entrada del canal dispositivos para amortiguar las corrientes secundarias y oscilaciones de la superficie libre (o comentarios que negaran la existencia de éstas).

5. RESULTADOS

En esta sección se analiza y compara la aplicación del modelo propuesto, con algunos de los casos experimentales mencionados en la Tabla 1. Más precisamente los casos analizados son los correspondientes a las relaciones B/h : 1.00, 1.50, 2.00, 7.50 y 10.00, todos para flujos sub-críticos (No. Experimental: 8, 13, 16, 23 y 26).

Las Figuras 5 a 9 muestran las isovelas del flujo primario (componente longitudinal de la velocidad U) medidas por Yuen (1989), y calculadas por el modelo propuesto, para canales a superficie libre completamente desarrollados, de varias relaciones ancho-profundidad.

En las Figuras 5 a 7 (relaciones B/h : 1.00, 1.50 y 2.00), se observa que las isovelas de los valores medidos adquieren una configuración particular. En la parte central de la sección los contornos experimentales se ubican por encima de los calculados, mientras que en los taludes no hay diferencias apreciables. Esto es debido a la formación de dos pares de celdas de recirculación que rotan en sentido opuesto (2 celdas a cada lado del eje central) como lo muestra la Figura 10 (Knight et al., 1994)).

El mecanismo es el siguiente: las celdas de recirculación centrales transportan flujo con relativamente poco momentum desde el fondo hacia la superficie a través del eje central, produciendo que la velocidad sobre esta línea disminuya. Luego estas celdas acarrear flujo con relativamente mucho momentum desde la superficie hacia el fondo, a través de una línea de división inclinada que pasa por la intersección entre el fondo horizontal y el talud, ocasionando

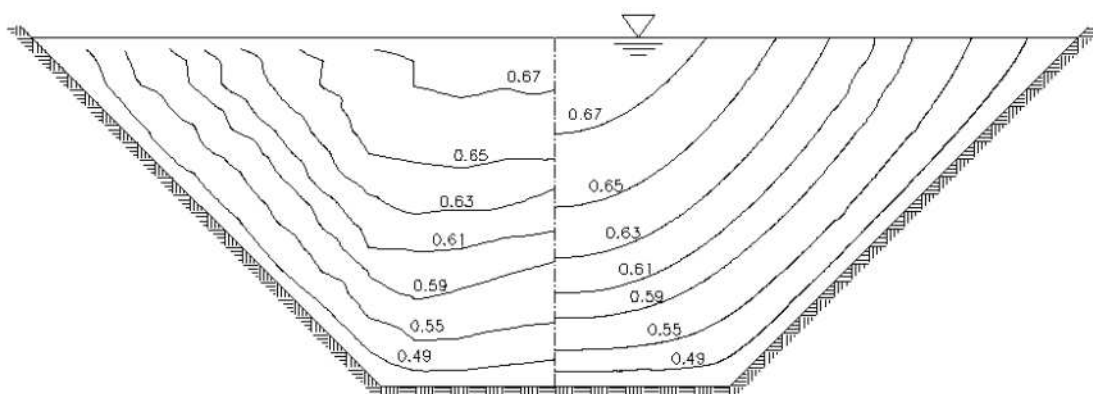


Figura 5: Isovelas del flujo principal, $B/h = 1,00$. Izquierda: medidas por Yuen (1989); derecha: calculadas por el modelo propuesto.

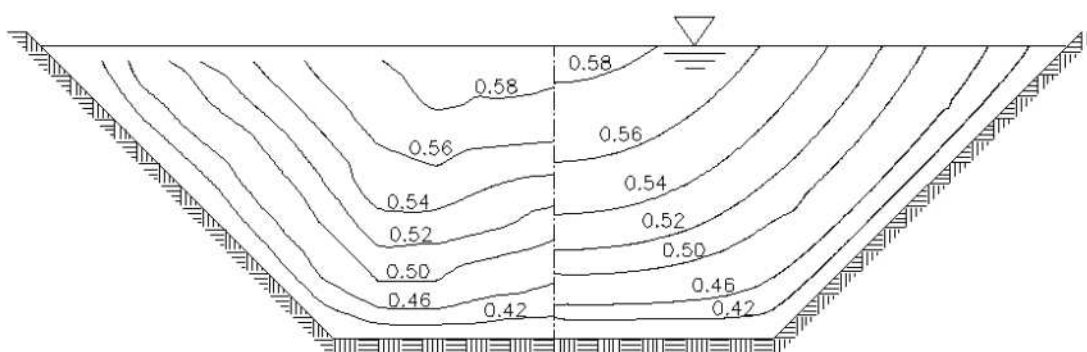


Figura 6: Isovelas del flujo principal, $B/h = 1,50$. Izquierda: medidas por Yuen (1989); derecha: calculadas por el modelo propuesto.

que en dicha línea, la velocidad aumente.

Las celdas de recirculación secundaria laterales conducen el flujo con poco momentum desde las márgenes hacia el centro a través de la superficie. Sin embargo los efectos de estas últimas son de menor medida, aparentemente por la poca inclinación del talud; en canales con taludes verticales estas celdas son las dominantes, mientras que el otro par se restringe a una pequeña zona en el ángulo entre talud y fondo, como lo exponen Noat and Rodi (1982) y Chiu and Chiu (1986).

El modelo no es capaz de simular estos efectos debido a que no tiene en cuenta las corrientes secundarias, por consiguiente sobreestima la velocidad en las cercanías del centro de la sección, y la subestima en las proximidades del talud (Figuras 11 a 16). Sin embargo la diferencia entre valores calculados y medidos es pequeña en proporción, como lo demuestran los perfiles de velocidad en diferentes verticales de la sección (Figuras 11 a 16), donde las diferencias máximas son aproximadamente del 7 %.

En los tres primeros casos (B/h : 1, 1.5 y 2), aparentemente la inclinación de la línea, que divide las celdas de recirculación centrales y laterales, aumenta a medida que la relación B/h se incrementa. Lo mismo ocurre con la intensidad de los vórtices de recirculación, que dejan de ser alargados y tienden a ser circulares, provocando diferencias más marcadas entre las isovelas medidas y calculadas. El efecto sobre las márgenes es débil y no se percibe claramente.

En las Figuras 8 y 9 (B/h : 7.5, y 10), hay una buena concordancia entre los valores predichos

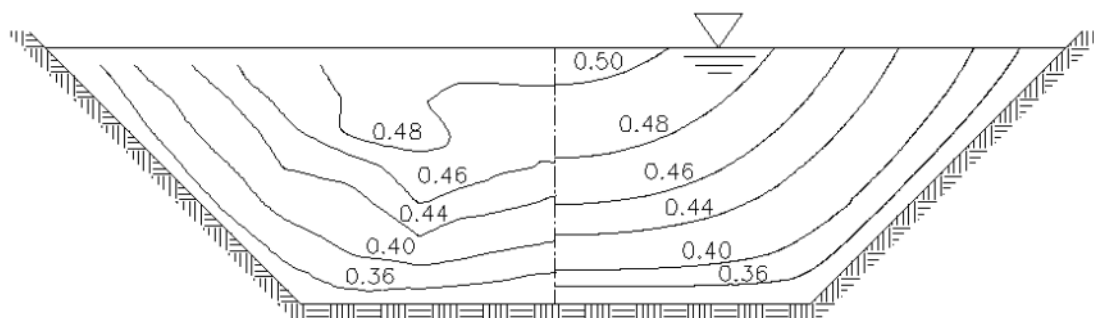


Figura 7: Isovelas del flujo principal, $B/h = 2,00$. Izquierda: medidas por Yuen (1989); derecha: calculadas por el modelo propuesto.

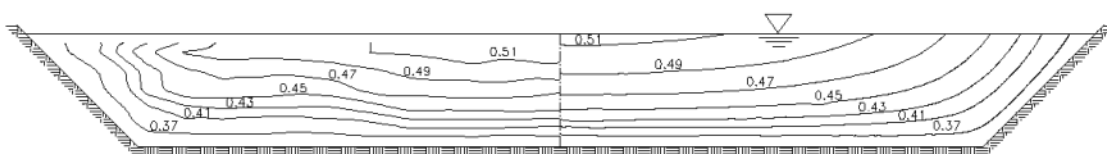


Figura 8: Isovelas del flujo principal, $B/h = 7,50$. Izquierda: medidas por Yuen (1989); derecha: calculadas por el modelo propuesto.

por el modelo y los experimentales. La pendiente de la línea de división entre el canal y el talud parece estabilizarse aproximadamente con la inclinación de la bisectriz del ángulo entre el fondo horizontal y el talud. El efecto de las corrientes secundarias se limita a los extremos de la sección, mientras que en la parte central es de baja intensidad y tiene muy poca influencia sobre las líneas de contorno.

La variación de las velocidades U medidas y calculadas, en función de la coordenada adimensional z/h , para las diferentes relaciones B/h y en las diferentes verticales de la sección, puede observarse en las Figuras 11 a 16. Las verticales están situadas aproximadamente a una distancia adimensional $y/B = 0$ (centro del canal), $y/B = 0,25$ (a mitad de la distancia entre el centro y el talud) e $y/B = 0,5$ (intersección fondo-talud).

6. CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo matemático para simular la distribución transversal de la componente longitudinal de la velocidad, promediada en el tiempo, para canales a superficie libre, bajo flujo uniforme y estacionario. Se derivaron las fórmulas analíticas que representan la distribución vertical y lateral de la viscosidad de torbellino ε (coeficiente de difusión de momentum) bajo ciertas hipótesis simplificadoras. El modelo propuesto se aplicó a un canal de sección trapezoidal de diferentes relaciones ancho-profundidad y se compararon los resultados obtenidos con valores provenientes de mediciones experimentales. A su vez, se identificaron y analizaron

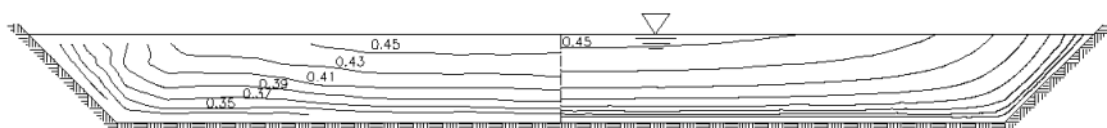


Figura 9: Isovelas del flujo principal, $B/h = 10,00$. Izquierda: medidas por Yuen (1989); derecha: calculadas por el modelo propuesto.

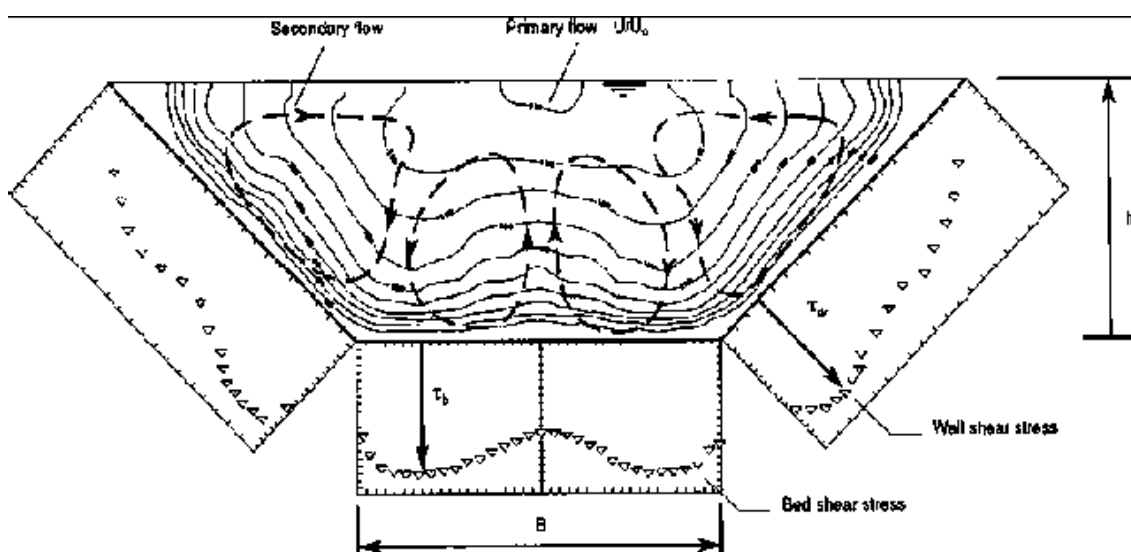


Figura 10: Relación típica entre el esfuerzo de corte en el contorno, corrientes secundarias y flujo primario en canales trapecoidales. $Fr < 3,24$, $B/h = 1,52$ (Knight et al., 1994)

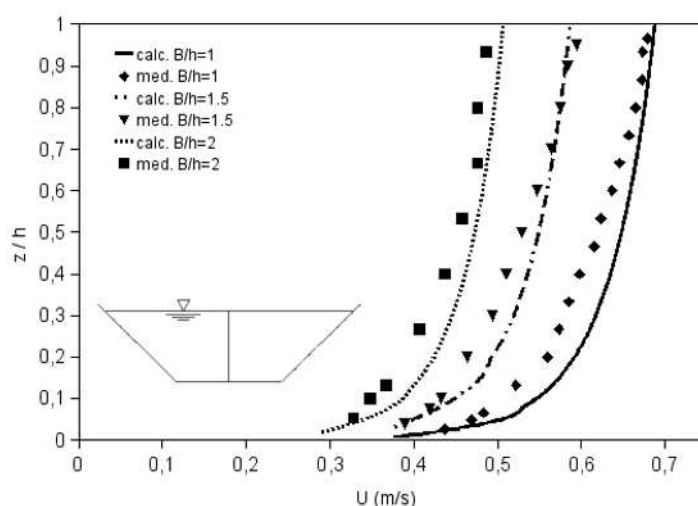


Figura 11: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0$. Relación B/h entre 1 y 2.

las estructuras de flujo, y su influencia sobre la distribución de velocidades.

En ninguno de los casos analizados la máxima velocidad ocurrió por debajo del pelo libre. Esto respalda las afirmaciones de Tominaga et al. (1989) para canales trapecoidales con ángulos de talud con la horizontal de hasta 66° .

Se pueden identificar claramente dos situaciones: canales angostos, relaciones B/h : 1, 1.5 y 2; y canales anchos, B/h : 7.5 y 10. En los primeros las corrientes secundarias afectan la parte central de la sección, provocando una disminución de la máxima velocidad y presentando una configuración de isovelas particular. El efecto sobre las márgenes es débil y no se percibe claramente. En canales anchos, las celdas de recirculación disminuyen en tamaño y fuerza, por lo tanto las líneas de contorno prácticamente no se deforman. Este comportamiento ha sido descrito por otros autores tanto en casos de laboratorio como de campo (Tarrab et al., 2007).

Las corrientes secundarias provocan que la distribución de las tensiones de corte en el contorno (y por lo tanto la velocidad), no sea uniforme. El modelo no tiene en considera-

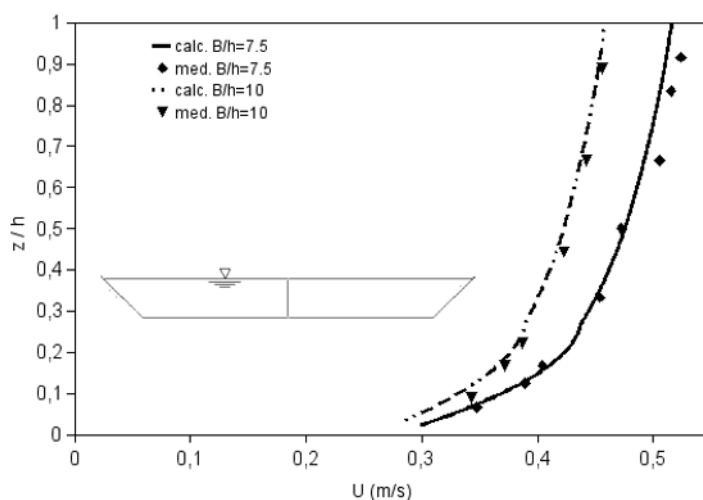


Figura 12: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0$. Relación B/h 7.5 y 10.

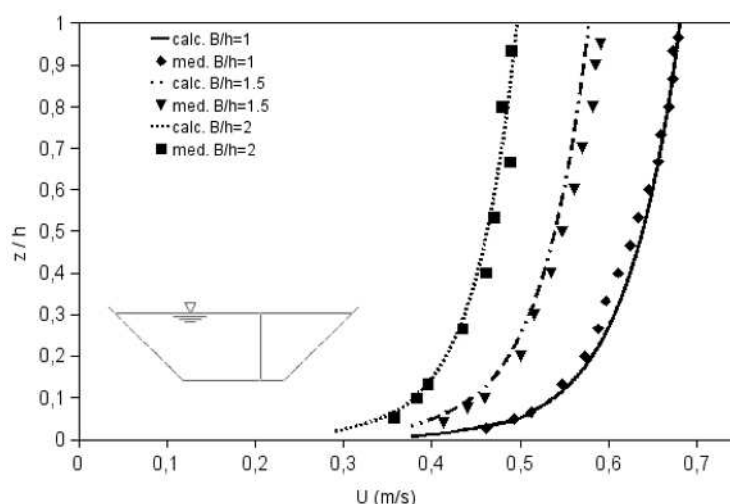


Figura 13: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0,27$. Relación B/h entre 1 y 2.

ción estas corrientes y supone un esfuerzo de corte constante, entonces la condición de borde $\frac{U}{U_c} = \frac{1}{\kappa} \ln(z^+) + A$ se aleja del valor de la velocidad de contorno medida, y por ende todo el perfil vertical lo hace también, sobreestimando en las cercanías del centro de la sección, y subestimando en las proximidades del talud.

Lamentablemente no se han encontrado mediciones para los casos intermedios ($2 < B/h < 7,5$), lo que permitiría obtener un valor crítico para la relación B/h , a partir del cual las corrientes secundarias no tienen influencia sobre la zona central, así como caracterizar el fenómeno de inclinación de la línea de división y su zona de influencia.

Dentro de las limitaciones que presenta el modelo, hay una buena concordancia entre valores predichos y medidos, teniendo en cuenta las incertidumbres de los procedimientos e instrumental de medición, así como de la configuración de flujo, lo que lo transforma en una herramienta alternativa, sencilla y práctica para el cálculo de la distribución transversal de velocidades en canales a superficie libre. Dado que el modelo depende sólo de parámetros bien caracterizados en la literatura, se reduce la incertidumbre a la hora de su aplicación a un caso concreto.

Futuras líneas de trabajo son aplicar sistemáticamente el modelo a otras secciones para eva-

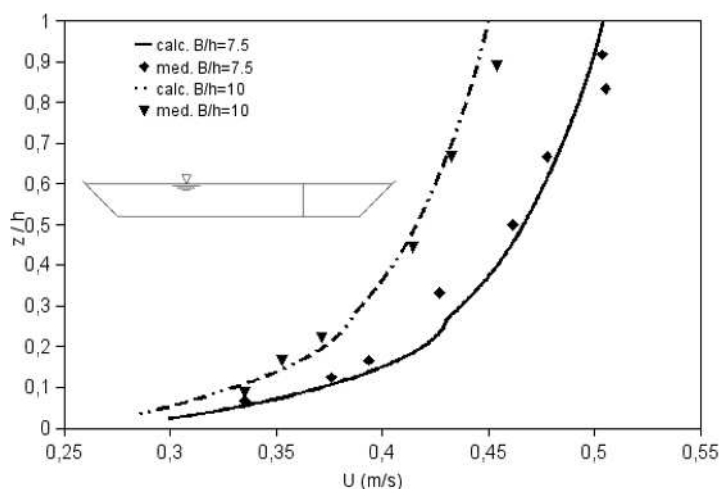


Figura 14: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0,27$. Relación B/h 7.5 y 10.

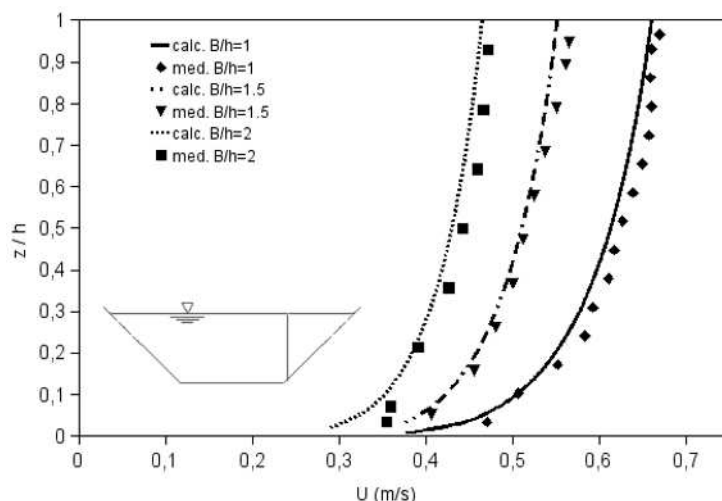


Figura 15: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0,53$. Relación B/h entre 1 y 2.

luar y generalizar el desempeño del mismo, modelar el efecto de las corrientes secundarias sobre la distribución del esfuerzo de corte de contorno a modo de obtener una mejor aproximación en la condición de borde para U , implementar el modelo a través del desarrollo de un *software ad hoc*, analizar distintas distribuciones para los coeficientes de viscosidad de torbellino, y eventualmente considerar modelos de turbulencia de mayor orden.

7. AGRADECIMIENTOS

Los autores desean agradecer: en primer lugar, a la Universidad de Birmingham por poner a disposición de la comunidad científica los datos experimentales utilizados en este trabajo, y en segundo lugar a la Secretaría de Ciencia y Tecnología, Universidad Tecnológica Nacional, el apoyo recibido para el desarrollo del presente trabajo a través del subsidio al proyecto de I+D consolidado 25/E117.

REFERENCIAS

Chaudhry M.H. *Open-Channel Flow*. Prentice Hall, 1991.

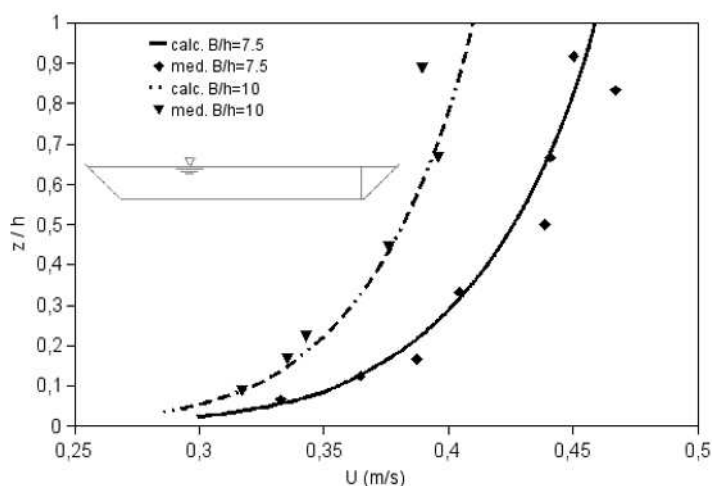


Figura 16: Variación de U en función de z/h . Vertical $y/B = 0,49$. Relación B/h 7.5 y 10.

- Chiu C. and Chiou J. Structure of 3-d flow in rectangular open channels. *Journal of Hydraulic Engineering, ASCE*, 112.11:1050–1068, 1986.
- Chow V. *Open-Channel Flow*. Mc Graw Hill, 1959.
- Jobson H.E. and Sayre W.W. Vertical transfer in open channel flow. *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, 96.HY-3:703–724, 1970.
- Knight D., Yuen K., and Alhamid A. *Physical Mechanisms of Mixing and Transport in the Environment*, chapter Ch4: Boundary Shear Stress Distributions in Open Channels Flow, pages 51–87. 1994.
- Lauder B.E. and Spalding D.B. The numerical computation of turbulent flow. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 3:269–289, 1974.
- Nezu I. and Nakagawa H. *Turbulence in open-channel flows. IAHR Monograph*. A.A. Balkema, 1993.
- Noat D. and Rodi W. Calculation of secondary currents in channel flow. *Journal of Hydraulics Division, ASCE*, 108.HY-8:948–968, 1982.
- Pope S.B. *Turbulent Flows*. Cambridge University Press, 2000.
- Quarmby A. and Quirk R. Measurements of the radial and tangential eddy diffusivities of heat and mass in turbulent flow in a plain tube. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 15:2309–2327, 1972.
- Shiono K. and Knight D.W. Two-dimensional analytical solution for a compound channel. In Y. Iwasa, N. Tamai, and A. Wada, editors, *Proceedings of 3rd International Symposium on Refined Flow Modelling and Turbulence Measurements*, pages 503–510. Tokyo, Japan, 1988.
- Shiono K. and Knight D.W. Turbulent open-channel flows with variable depth across the channel. *Journal of Fluid Mechanics*, 222:617–646, 1991.
- Tarrab L., Vionnet C., and Rodríguez A. Análisis de la relación de aspecto ancho/tirante (b/h) en los flujos en curva. In A. Rodríguez, C.M. García, H.D. Farías, and J.D. Brea, editors, *Hidráulica de Ríos: fundamentos, procesos e ingeniería. Proceedings del Tercer Simposio Regional sobre Hidráulica de Ríos, RIOS 2007*, pages 23–24. Córdoba, Argentina, 2007.
- Tominaga A., Nezu I., Ezaki K., and Nakagawa H. Three-dimensional turbulent structure in straight open-channel flows. *Journal of Hydraulic Research*, 27:149–173, 1989.
- Ueda H., Möller R., Komori S., and Mizushima T. Eddy diffusivity near the free surface of open channel flow. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 20:1127–1136, 1977.

- Weber J.F. and Menéndez A.N. Modelo lateral para simular la distribución lateral de velocidades en cauces naturales. *Mecánica Computacional, Asociación Argentina de Mecánica Computacional*, 22:399–409, 2003.
- Yuen Y. *A Study of Boundary Shear Stress, Flow Resistance and Momentum Transfer in Open Channels with Simple and Compound Trapezoidal Cross-section*. Ph.D. thesis, Birmingham University, Birmingham, England, 1989.