

EVALUACIÓN DE LA CALIDAD DE LOS ESFUERZOS DE FLEXIÓN USANDO ELEMENTOS SIN ROTACIONES EN MALLAS IRREGULARES

Fernando G. Flores

*Departamento de Estructuras, Universidad Nacional de Córdoba, Casilla de Correo 916,
5000 Córdoba-Argentina, y CONICET, fflores@efn.uncor.edu, <http://www.efn.unc.edu>*

Palabras clave:

Elementos Finitos, Láminas, Sin rotaciones, Esfuerzos, nudos irregulares.

Resumen. El desarrollo y la utilización de elementos finitos de láminas delgadas sin rotaciones (SR) ha crecido notablemente en los últimos años. El objetivo de este trabajo se divide en dos partes: (a) presentar una metodología para la evaluación de los esfuerzos de corte transversal en este tipo de elementos y (b) mostrar que la principal debilidad de las aproximaciones existentes aparece cuando hay nudos irregulares en la malla. Se compara la distribución de esfuerzos entre distintas aproximaciones existentes en la literatura y con un elemento estándar de un código comercial.

1. INTRODUCCIÓN

El desarrollo y la utilización de elementos finitos de láminas delgadas sin rotaciones ha crecido notablemente en los últimos años [Cirak y Ortiz (2000); Guo et al. (2002); Brunet y Sabourin (2006); Sabourin y Brunet (2006); Flores y Oñate (2007); Flores y Estrada (2007)]. La prescindencia de las rotaciones como grados de libertad los hace particularmente eficientes para la simulación de problemas de formado de láminas (embutición, estampación, formado por estiramiento, etc. y la correspondiente recuperación elástica) y para el análisis de quasi-membranas, entre otros.

Elementos de este tipo han sido implementados con éxito en programas comerciales [RADIOSS; STAMPACK (2006)] sin embargo su uso no está muy difundido. La crítica principal a estos elementos es cierta sensibilidad a la regularidad y orientación de la malla.

En un trabajo reciente Gardsback y Tibert (2007) han comparado distintas formulaciones de elementos triangulares sin rotaciones basados en una parcela de 4 elementos. Allí se presenta en forma unificada las distintas alternativas propuestas para el cálculo de las curvaturas y el tratamiento de las condiciones de contorno. Se hace también un análisis de la sensibilidad de la curvatura calculada con las dimensiones relativas de los elementos que conforman la parcela para las distintas aproximaciones, resultando la propuesta de Phaal y Calladine (1992) la única insensible a la posición de los nudos. La conclusión principal de este trabajo es que la mejor aproximación es utilizar propuesta de Phaal y Calladine (1992) para elementos interiores de la malla modificando el tratamiento de las condiciones de contorno a los fines de aliviar la fuerte sensibilidad a la orientación de la malla que muestra dicha propuesta así como evitar la utilización de nudos ficticios. Los resultados numéricos allí presentados se refieren siempre a mallas estructuradas donde se introduce un parámetro de perturbación a los fines de evaluar el comportamiento de las distintas aproximaciones cuando el tamaño de los elementos no es uniforme. Aunque se hace referencia a mallas “no-estructuradas” en realidad se trata de mallas no-uniformes en el de tamaño. De hecho, al perturbar una malla estructurada, todos los nudos mantienen su condición de “regular”, i.e. a cada nudo interior concurren 6 elementos triangulares. Por otro lado las comparaciones entre las distintas aproximaciones se centran exclusivamente en el desplazamiento de puntos elegidos y no hay referencia alguna a los esfuerzos. Si bien es lógico que una correcta determinación de los desplazamientos es crucial para el cómputo de las curvaturas, esta sola comparación no arroja luz sobre la real debilidad de este tipo de elementos.

El objetivo de este trabajo se divide en dos partes: (a) mostrar que la principal debilidad de las aproximaciones existentes aparece cuando hay nudos irregulares en la malla y (b) presentar una metodología para la evaluación de los esfuerzos de corte transversal en este tipo de elementos.

En la siguiente sección se resumen las opciones más utilizadas para determinar las curvaturas en elementos sin rotaciones. Luego se presenta una técnica para determinar los esfuerzos de corte transversal. En la sección 4 se indican las distintas opciones usuales para establecer condiciones de contorno en este tipo de elementos. En la sección 5 se comparan momentos flectores y esfuerzos de corte obtenidos con las distintas aproximaciones de elementos sin rotaciones y con un elemento triangular estándar deformable por corte.

2. CÁLCULO DE LAS CURVATURAS

Las aproximaciones más difundidas tienen en común la utilización de una parcela de cuatro elementos que incluye al elemento donde se ha de evaluar el tensor de curvaturas y los tres elementos adyacentes (ver Figura 1). Si consideramos una superficie inicialmente plana (placa)

y nos restringimos a desplazamientos infinitesimales, básicamente hay dos formas propuestas

- Hacer pasar una superficie de curvatura constante sobre los 4 elementos de la parcela. Esta es la propuesta de [Phaal y Calladine \(1992\)](#) que asegura un valor uniforme del tensor de curvatura en todos los puntos de la parcela, aunque tiene un costo un poco superior al resto de las aproximaciones.
- Expresar las curvaturas como una integral sobre el contorno del elemento central. Dentro de esta propuesta se pueden incluir varias aproximaciones en función de como se defina el gradiente sobre el contorno.

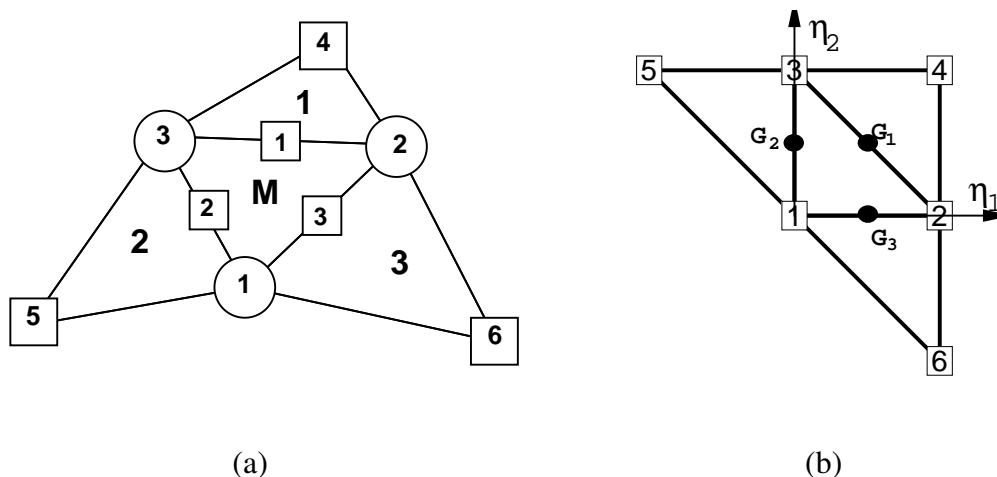


Figura 1: Parcela de elementos para el cálculo de la curvatura. (a)Plano físico. (b)Plano Parametrico.

2.1. Aproximación de Phaal y Calladine

El desplazamiento transversal sobre la parcela se escribe como

$$u_3 = a_0 + a_1 \bar{X}_1 + a_2 \bar{X}_2 - \frac{\kappa_{11}}{2} (\bar{X}_1)^2 - \frac{\kappa_{22}}{2} (\bar{X}_2)^2 - \kappa_{12} \bar{X}_1 \bar{X}_2 \quad (1)$$

donde \bar{X}_i ($i = 1, 2$) son las coordenadas cartesianas ortogonales en el plano de la placa referidas al centro del triángulo central, $\kappa_{ij} = -\frac{\partial^2 u_3}{\partial \bar{X}_i \partial \bar{X}_j}$ son las curvaturas y a_α son los coeficientes que definen el movimiento de cuerpo rígido. Valuando (1) en cada nudo de la parcela se obtienen seis ecuaciones lineales, que invirtiendo el sistema permiten expresar los coeficientes a_α y las curvaturas κ_{ij} en función del desplazamiento normal al plano de referencia en cada nudo u_3^I . Desde el punto de vista operativo la inversión del sistema puede hacerse en dos etapas de tal forma de eliminar primero los coeficientes a_α con lo que resulta sólo necesario invertir un sistema de orden tres que finalmente permite expresar las medidas de deformación como [[Phaal y Calladine \(1992\)](#)]:

$$\kappa = \begin{bmatrix} \kappa_{11} \\ \kappa_{22} \\ 2\kappa_{12} \end{bmatrix} = \mathbf{B}_{3 \times 6} [\mathbf{u}^P] \quad (2)$$

donde \mathbf{u}^P agrupa a los desplazamientos normales al plano de referencia de los seis nudos que forman la parcela.

Esta aproximación tiene como desventaja que su implementación en láminas generales (no suaves) y en particular su traslado a problemas no lineales es más complejo y oneroso.

2.2. Aproximación basada en una integral sobre el contorno

Las curvaturas se definen como el promedio sobre el elemento [Oñate y Cervera (1993)]:

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{-1}{A^M} \int_{A^M} \frac{\partial^2 u_3}{\partial X_i \partial X_j} dA \quad (3)$$

expresión que integrada por partes resulta

$$\bar{\kappa}_{ij} = \frac{-1}{A^M} \int_{\Gamma^{(o)}} n_j \frac{\partial u_3}{\partial X_i} d\Gamma \quad (4)$$

donde Γ es el contorno del elemento con normal saliente \mathbf{n} . La expresión desarrollada para las tres componentes del tensor de curvatura en función de las derivadas expresadas en un sistema local al contorno (\mathbf{n}, s) es

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \int_{\Gamma} \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{bmatrix} d\Gamma \quad (5)$$

La integral sobre el contorno se evalúa numéricamente con un punto de integración a la mitad de cada lado

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \sum_{k=1}^3 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 & -n_1 n_2 \\ n_2^2 & n_1 n_2 \\ 2n_1 n_2 & n_1^2 - n_2^2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \\ \frac{\partial u_3}{\partial s} \end{bmatrix}^k \quad (6)$$

donde el supraíndice k indica evaluada en el lado k y l^k es la longitud del lado. Las interpolaciones utilizadas (lineal en cada elemento o cuadrática sobre todo la parcela) conducen a que la contribución de $\frac{\partial u_3}{\partial s}$ se anule, resultando

$$\begin{bmatrix} \bar{\kappa}_{11} \\ \bar{\kappa}_{22} \\ 2\bar{\kappa}_{12} \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \sum_{k=1}^3 l^k \begin{bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ 2n_1 n_2 \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial n} \end{bmatrix}^k \quad (7)$$

Las distintas formulaciones utilizadas en las comparaciones se diferencian en la forma de evaluar $\left[\frac{\partial u_3}{\partial n}\right]^k$ sobre el contorno, se han propuesto:

- Elemento BST estándar [Oñate y Cervera (1993); Oñate y Zárate (2000); Flores y Oñate (2001)]: En cada elemento se interpola en forma lineal los desplazamientos usando las habituales coordenadas de área L^I .

$$u_3(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^3 L^I(\xi, \eta) u_3^I \quad (8)$$

El gradiente normal al lado es el promedio de los gradientes de los elementos adyacentes (el supraíndice en mayúscula $(M$ o $K)$ indica evaluado en el elemento correspondiente)

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial n}\right]^k = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)^M + \left(\frac{\partial u_3}{\partial n}\right)^K \right] \quad (9)$$

- Elemento EBST[Flores y Oñate (2005)]: Se realiza una interpolación cuadrática (en el plano paramétrico) sobre la parcela

$$u_3(\xi, \eta) = \sum_{I=1}^6 N^I(\xi, \eta) u_3^I \quad (10)$$

El gradiente en el contorno se obtiene derivando la aproximación indicada y resulta independiente de los nudos que no pertenecen a los elementos adyacentes al lado k .

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial n} \right]^k = N_{,n}^{k+3} u_3^{k+3} + \sum_{i=1}^3 N_{,n}^I u_3^I \quad (11)$$

- Elemento BBST[Flores y Oñate (2007)]: El gradiente normal en el contorno del elemento es el promedio ponderado de los gradientes de los elementos adyacentes. El peso de cada contribución es inversamente proporcional al área de cada elemento. Esta aproximación es idéntica a otras propuestas anteriores [Sabourin y Brunet (1993); Guo et al. (2002); Sabourin y Brunet (2006)].

$$\left[\frac{\partial u_3}{\partial n} \right]^k = \frac{1}{(A^M + A^K)} \left[A^K \left(\frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^M + A^M \left(\frac{\partial u_3}{\partial n} \right)^K \right] \quad (12)$$

Si en la parcela de elementos los nudos del elemento central se encuentran a la mitad de los nudos externos de la parcela, las tres aproximaciones anteriores coinciden, de otra forma los resultados variarán. Gardsback y Tibert (2007) mostraron que el elemento EBST es el más sensible a la posición relativa de los nudos, en tanto que el BBST es el menos sensible de los tres. Solamente la aproximación de Phaal y Calladine asegura la determinación exacta de la curvatura para un elipsoide que pasa por los seis nudos de la parcela.

2.3. Otras aproximaciones

Por razones de completitud vale la pena mencionar dos aproximaciones sin rotaciones que no se basan en una parcela de cuatro elementos:

El elemento BSN[Oñate y Zárate (2000)] que utiliza una parcela centrada en cada nudo de la malla. Los estudios numéricos realizados en problemas lineales de placas y láminas muestran en general una mejor convergencia en comparación con el elemento BST, sin embargo esta aproximación presenta dificultades para su extensión al rango no-lineal, superficies no homogéneas, quiebres y ramificaciones. Por otro lado es interesante notar que si se intenta utilizar una aproximación similar a la de Phaal y Calladine que incluya al nudo I y a los nudos conectados $J = 1, NN$, y se evalúa (1) en cada nudo se obtendrá un sistema de ecuaciones del que no podrá obtenerse una solución única salvo en el caso $NN = 5$ (que corresponde a un nudo irregular), es decir que no hay una superficie de curvatura constante que pase por todos los nudos.

La aproximación de Cirak y Ortiz (2000) que puede ubicarse dentro de las aproximaciones isogeométricas. La generación de la malla es parte de la aproximación y se realiza usando *Subdivisión de Superficies*, uno de cuyos méritos es que cada nuevo nudo generado por cuadrisección (cada triángulo es dividido en cuatro) es regular, quedando como nudos irregulares sólo aquellos que existan en la definición geométrica inicial. Para la evaluación de las curvaturas en el

centro de cada elemento se utiliza un parcela regular de 12 elementos y una aproximación no estándar desde el punto de vista de los elementos finitos. Esta aproximación se realiza en el plano paramétrico usando polinomios spline de cuarto orden. Los polinomios utilizados aseguran una superficie suave sobre todos los nudos regulares pero no sobre los irregulares. Cuando uno de los nudos del elemento es irregular se realiza una subdivisión local ficticia a fines de que el punto de evaluación de la curvatura esté centrado en una parcela regular.

3. DETERMINACIÓN DEL ESFUERZO DE CORTE

Como los elementos están basados en las hipótesis de la teoría clásica de láminas no hay deformaciones de corte asociadas a las tensiones de corte transversal. Sin embargo los esfuerzos de corte transversal pueden calcularse a partir de las ecuaciones de equilibrio a la rotación. Usando

$$\nabla \cdot \mathbf{M} + \mathbf{Q} = 0 \quad (13)$$

El esfuerzo de corte transversal se supone constante en cada elemento y se calcula realizando un promedio sobre el área del elemento central de la parcela mediante:

$$\mathbf{Q} = \frac{-1}{A^M} \int_{A^M} \nabla \cdot \mathbf{M} dA \quad (14)$$

Integrando por partes, se obtiene una integral sobre el contorno en forma similar a las curvaturas:

$$\mathbf{Q} = \frac{-1}{A^M} \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \mathbf{n} d\Gamma \quad (15)$$

Las dos componentes del corte transversal se escriben:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \oint_{\Gamma} \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix} d\Gamma \quad (16)$$

La evaluación numérica de la integral sobre el contorno resulta en una suma sobre los puntos medios del contorno del elemento. La utilización de un punto de integración sobre cada lado es suficiente dado que los momentos son constantes en cada elemento. La parcela de elementos y los puntos de integración coinciden con los utilizados para la evaluación de la curvatura por lo cual se dispone de toda la información geométrica para esta integral, luego:

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = \frac{-1}{A^M} \sum_{k=1}^3 l_k \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}^k \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \end{bmatrix}^k \quad (17)$$

El tensor de momentos en cada lado puede calcularse (en forma similar a las curvaturas) como el promedio de los momentos en los elementos adyacentes (elemento BST estándar) o el promedio ponderado usando la inversa del área como factor de ponderación (elemento BBST)

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} = - \sum_{I=1}^3 \frac{2}{A^M + A^I} \begin{bmatrix} L_{i1}^I & 0 & L_{i2}^I \\ 0 & L_{i2}^I & L_{i1}^I \end{bmatrix} \left\{ A^I \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix}^M + A^M \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{22} \\ M_{12} \end{bmatrix}^I \right\} \quad (18)$$

De esta forma es posible entonces aproximar los esfuerzos de corte transversal. Sin embargo debe notarse que esto implica una derivada tercera de una función de continuidad C^0 , de tal forma que pueden aparecer importantes errores especialmente con mallas no-estructuradas que

incluyan nudos irregulares (un nudo interno es regular cuando hay 6 elementos conectados a él).

Por otra parte debido a que los esfuerzos de corte pueden en este caso interpretarse como una variable de post-proceso, y no tienen influencia en la solución numérica, es posible a los fines de evitar valores extremos en mallas irregulares realizar un suavizado nodal sencillo (por ejemplo ponderando con la inversa del área) y luego volver esa información a los puntos de integración. En los resultados numéricos se muestra que esta técnica sencilla conduce a resultados razonables.

4. CONDICIONES DE CONTORNO

Tanto en la evaluación de las curvaturas como para el cálculo del corte en cada elemento se hace uso de información en elementos adyacentes. En los elementos que tienen uno (o más) lados sobre el contorno el elemento adyacente no existe y hay que recurrir a las condiciones de contorno en los elementos.

4.1. Curvaturas

En el caso de las curvaturas se tienen las siguientes posibilidades para el lado k donde no existe el elemento K .

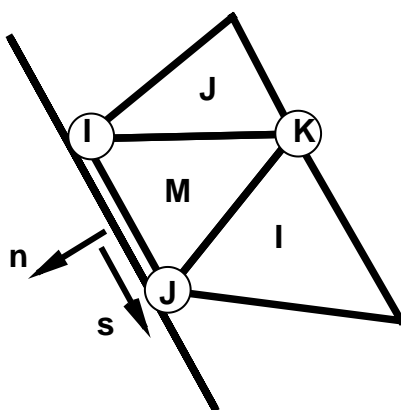


Figura 2: Lado k donde se aplican condiciones de contorno.

- Empotrado o simetría: que es una condición esencial a imponer sobre el giro de la normal $\frac{\partial u_3}{\partial n}|^k = 0$. Esta condición puede imponerse en diferentes variantes, en general con resultados casi idénticos. En el caso de la aproximación de Phaal y Calladine se utiliza un nudo ficticio simétrico (respecto al plano de simetría) al nudo opuesto al lado. Las contribuciones a dicho nudo ficticio se suman a las del nudo opuesto al lado.
- Simplemente apoyada o libre: al ser una condición de contorno natural no está claramente definido como incluir esto en la evaluación de la curvatura, básicamente se han propuesto dos alternativas

1. $\frac{\partial u_3}{\partial n}|^k = \frac{\partial u_3}{\partial n}|^M$ que ha sido utilizada por Oñate et al [Oñate y Cervera (1993); Oñate y Zárate (2000)] y Sabourin y Brunet (1993) entre otros

2. Anular una o más componentes del tensor de curvatura. Así Flores y Oñate (2001, 2005) proponen anular la componente normal al contorno del tensor de curvaturas.

En general la segunda opción conduce a un comportamiento un poco más flexible y los resultados publicados muestran una mayor velocidad de convergencia hacia la solución.

4.2. Esfuerzos de corte

Sobre el contorno el valor estimado de M en el elemento adyacente faltante depende del tipo de condición de contorno que se imponga sobre la normal a la lámina. Expresando las componentes del tensor de momentos en el elemento $M_{\alpha\beta}^M$ respecto a un sistema local al contorno (n,s) puede suponerse que en el elemento faltante las componentes de $M_{\alpha\beta}^I$ son iguales a las de elemento principal salvo:

- Empotrado o simetría $M_{ns}^I = -M_{ns}^M$ (la componente torsora se anula sobre el lado)
- Simplemente apoyada o libre $M_{nn}^I = -M_{nn}^M$ (el momento normal en el lado se anula)

5. EJEMPLOS NUMÉRICOS

En los ejemplos numéricos presentados abajo se indican resultados obtenidos con los siguientes elementos

- Elemento triangular de 3 nudos S3R presente en el programa ABAQUS/SE (2006). El elemento es deformable por corte y para el caso de placas planas implica 3 grados de libertad por nudo. Este elemento se incluye a los fines de realizar comparaciones con un elemento finito estándar (i.e. que incluye rotaciones) de amplia utilización
- Propuesta de Phaal y Calladine: En cada parcela se hace pasar una aproximación cuadrática en el plano físico, lo cual conduce a una curvatura constante en todos los puntos de la parcela.
- Elemento BST estándar [Oñate y Cervera (1993); Oñate y Zárate (2000); Flores y Oñate (2001)]: El gradiente en el contorno del elemento es el promedio de los gradientes de los elementos adyacentes.
- Elemento EBST [Flores y Oñate (2005)]: El gradiente en el contorno se obtiene a partir de una aproximación cuadrática (en el plano paramétrico) sobre la parcela.
- Elemento BBST [Flores y Oñate (2007)]: El gradiente normal en el contorno del elemento es el promedio ponderado de los gradientes de los elementos adyacentes. El peso de cada contribución es inversamente proporcional al área de cada elemento. Esta aproximación es idéntica a la propuesta de Sabourin y Brunet (1993, 2006) pero no en la forma de abordar las condiciones de contorno.

5.1. Placa cuadrada empotrada bajo carga uniforme

El objetivo es evaluar el cálculo de las curvaturas (a través de los momentos flectores) en los elementos sin grados de libertad de rotación cuando se usa una malla no estructurada.

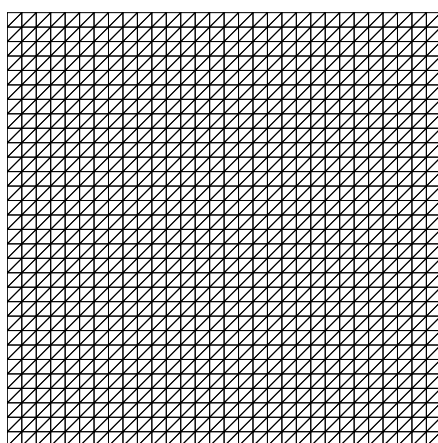
Se modela una placa cuadrada de lado 10 y espesor 0.1 empotrada en todo su contorno y sometida a carga transversal uniforme. El ejemplo es deliberadamente sencillo, la geometría

original es plana y no hay esfuerzos membranales. Se ha considerado borde empotrado de tal forma que la influencia en la forma de tratar las condiciones de contorno sea mínima.

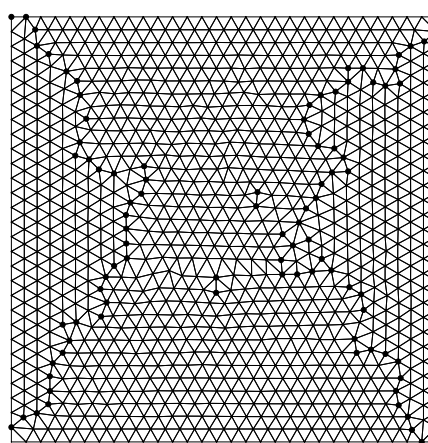
Las propiedades mecánicas son $E = 13,7592 \times 10^{11}$ $\nu = 0,3$ y la carga aplicada por unidad de superficie es $q = 10$. El desplazamiento teórico (sin deformaciones de corte) del punto central es 1×10^{-6} .

Primero se utilizó una malla estructurada relativamente fina (ver Figura 3.a) cuyos resultados sirven de referencia para la comparación buscada. Esta malla tiene 961 nudos (31×31) y 1800 elementos sobre el cuarto de placa discretizada.

Luego se realizó el análisis usando una malla no-estructurada (ver Figura 3.b) con un tamaño de elemento similar a la estructurada (996 nudos y 1874 elementos) Esta malla ha sido obtenida con GiD-7.2 (2002). La malla es muy buena, el tamaño de los elementos es uniforme y los elementos no están distorsionados. En la Figura 3 se indican con puntos negros los nudos irregulares i.e. donde la cantidad de triángulos conectados es distinto de seis (tres en el contorno). Debido a la estrategia usada en la generación de la malla los nudos irregulares resultan concentrados a lo largo de las diagonales. En los contornos (salvo en los extremos) los nudos son todos regulares.



(a) Malla estructurada



(b) Malla no estructurada.

Figura 3: Mallas utilizadas para el análisis.

En la tabla 1 se indican el desplazamiento del punto central de la placa para las dos mallas analizadas y para las distintas aproximaciones involucradas. Recordar que el elemento S3R incluye deformaciones por cortante por lo cual se espera que sea más flexible, aunque para la relación considerada esta influencia es muy baja. Las aproximaciones basadas en la integral sobre el contorno para la malla estructurada coinciden debido a que todos los elementos son exactamente iguales, en tanto que para la malla no-estructurada la aproximación ponderada aparece como la mejor. La aproximación de Phaal y Calladine se muestra un tanto flexible y en oposición a las otras aproximaciones es más flexible aún para la malla no estructurada.

A diferencia de otros trabajos aquí se presentan a continuación los esfuerzos evaluados en los puntos de integración sobre todos los elementos de la malla. Los objetivos son los siguientes:

- Evaluar la continuidad de los resultados obtenidos usando los elementos sin rotaciones en comparación con elementos estándar

Elemento	Estructurada	No-Estructurada
BST	1.0081	0.98527
EBST	1.0081	0.97381
BBST	1.0081	0.99159
P & C	1.0149	1.02150
S3R	1.0051	1.00516

Tabla 1: Desplazamiento del punto central $\times 10^6$.

- Mostrar que el mayor inconveniente que deben afrontar los elementos sin rotaciones son los nudos irregulares y no la falta de uniformidad del tamaño de los elementos.

De los momentos flectores se ha elegido para graficar el momento principal máximo. En todos los casos el rango graficado es $[-14, 24]$. En tanto que para el esfuerzo de corte se ha elegido el esfuerzo Q_x con el rango $[-50, 20]$. Notar que el esfuerzo Q_y es simétrico al anterior. En las figuras el rojo más profundo indica valores por encima del valor del rango superior y el azul oscuro indica valores por debajo del rango inferior.

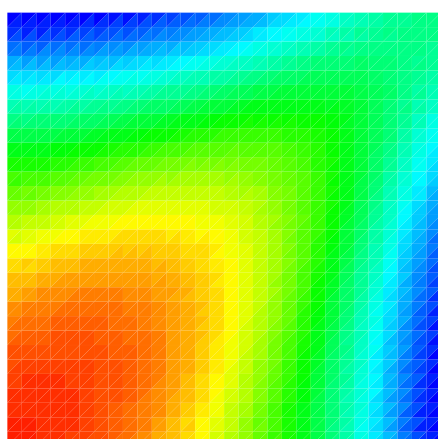
Para este primer ejemplo propuesto el elemento S3R triplica el número de Grados de Libertad de los modelos sin rotaciones. Del análisis de este ejemplo se desprenden las siguientes conclusiones:

- La evaluación de esfuerzos flexionales se deteriora significativamente en el entorno de nudos irregulares para los elementos sin rotaciones. Esto no es así en el elemento con rotaciones S3R.
- La mejora introducida por la aproximación de Phaal y Calladine no es sustancial. Si bien en algunas zonas con nudos irregulares puede notarse una mejor continuidad del momento esto no ocurre de la misma forma en todos los casos. En general una buena malla de triángulos implica elementos poco distorsionados y bien graduados pero no se hace mención a nudos irregulares.
- La evaluación del corte transversal puede tener picos muy marcados en mallas no-estructuradas, en particular alrededor de nudos irregulares.
- El corte transversal no muestra la misma suavidad que los momentos en el elemento S3R.
- El elemento BBST mejora un poco la evaluación del corte respecto a la aproximación más sencilla (BST estándar) pero está lejos de ser satisfactorio.

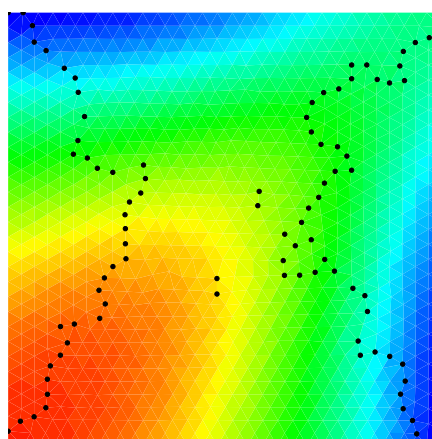
5.2. Cilindro rebajado bajo peso propio

En este caso el objetivo es comparar directamente los esfuerzos obtenidos con el elemento BBST y con el elemento S3R de Abaqus en un problema de láminas típico. A diferencia del caso anterior este ejemplo es un problema dominado por el comportamiento membranar. Además incluye borde articulados donde los elementos deformables por corte suelen mostrar problemas en la evaluación de los esfuerzos de corte.

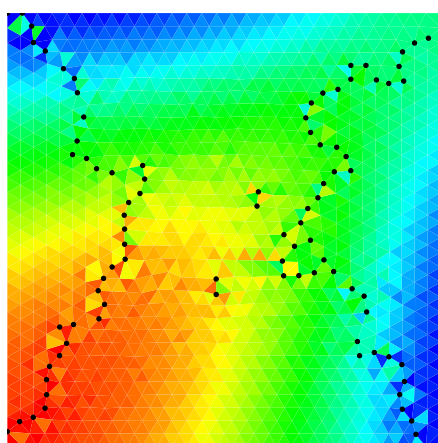
Se modela un cilindro rebajado apoyado en diafragmas en sus extremos y libre a lo largo de las generatrices. La longitud total del cilindro es 600, su radio es 300 y el espesor es 3.



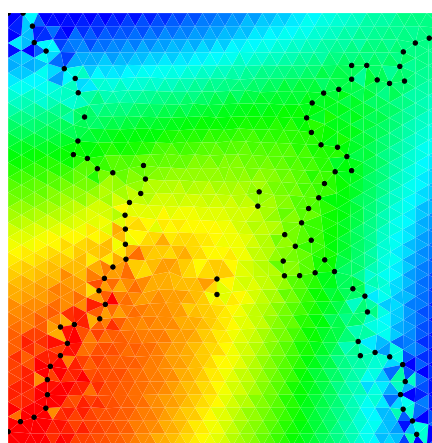
Malla estructurada



Elemento S3R de Abaqus.



Elemento BBST



Phaal y Calladine

Figura 4: Placa empotrada. Momento Flector Principal M_1

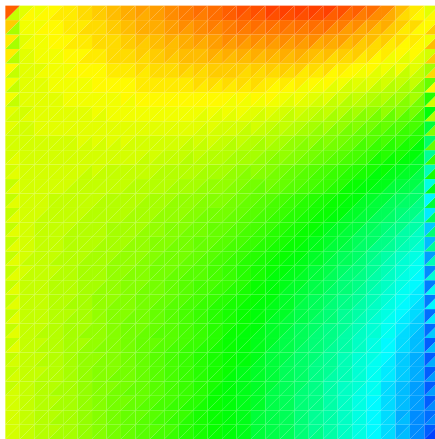
Las propiedades mecánicas son $E = 3. \times 10^6$ $\nu = 0,0$ y la carga aplicada por unidad de superficie es $q = 0,20833$. El desplazamiento teórico del punto central “A” es 0,5407 y el del punto “B” sobre el borde es $-3,61$.

Similarmente al ejemplo anterior se utilizan una malla estructurada y una no-estructurada con elementos de tamaño similar. La densidad de la malla es adecuada para obtener desplazamientos razonablemente similares a los teóricos.

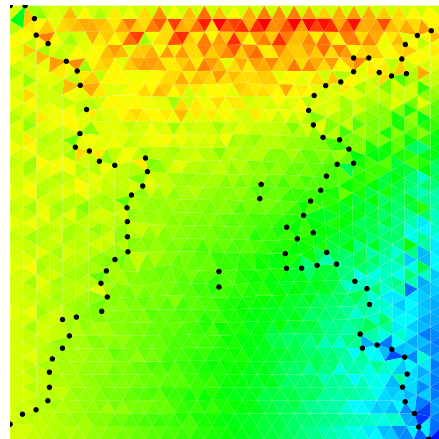
En la tabla 1 se indican los desplazamientos de los puntos “A” y “B” para ambas mallas usando el elemento BBST y el elemento S3R de Abaqus. El elemento BBST en general se muestra más rígido cuando se usan mallas no estructuradas, en cambio el elemento S3R es curiosamente más flexible.

De los momentos flectores se ha elegido para graficar el momento torsor M_{xy} . En todos los casos el rango graficado es $[0, 1300]$. En tanto que se ha graficado el esfuerzo de corte Q_y en el rango $[-15, 15]$

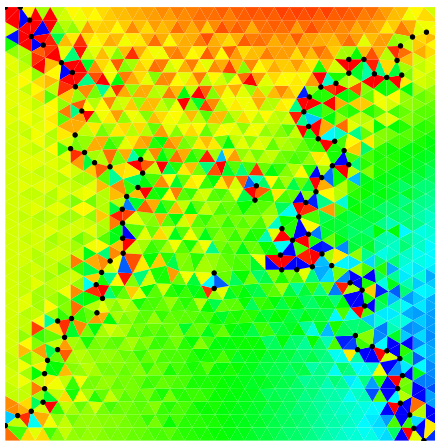
En este segundo ejemplo propuesto el elemento S3R duplica el número de Grados de Libertad de los modelos sin rotaciones, pero esto no es considerado significativo para la evaluación. Del análisis del segundo ejemplo donde se han utilizado mallas razonablemente finas se puede observar que:



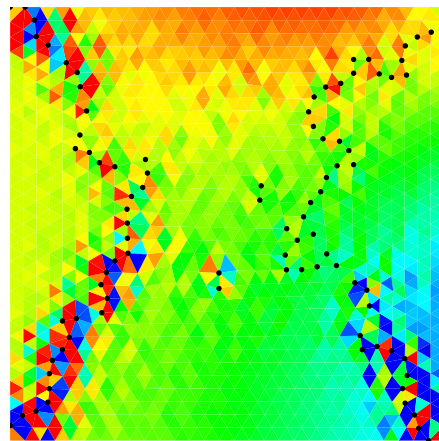
Malla estructurada



Elemento S3R de Abaqus



Elemento BBST



Phaal y Calladine.

Figura 5: Placa empotrada. Corte Transversal Q_x

- Para mallas estructuradas el elemento BBST muestra un comportamiento mucho mejor que el elemento S3R, asociado a una mejor velocidad de convergencia.
- El elemento S3R es menos sensible (pero no insensible) a los nudos irregulares
- El elemento S3R muestra notorias oscilaciones de los esfuerzos de corte en la cercanía del borde.

En la Figura 9 se grafican los mismos esfuerzos de corte de las Figuras 5 y 8 pero realizando un suavizado nodal y recuperando los valores en los centros de los elementos. Puede verse que este suavizado previo de los esfuerzos de corte conduce a una aproximación satisfactoria de tales esfuerzos.

En la Referencia [Cirak y Ortiz (2000)] al tratar subdivisión de superficies hacen notar que en el caso de nudos regulares es posible establecer propiedades de suavidad usando técnicas de Fourier. Estas técnicas no son aplicables en el caso de nudos irregulares razón por la cual dicha suavidad (continuidad de las derivadas segundas) no puede asegurarse. Por esta razón al utilizar elementos finitos de láminas el uso de triangulaciones con una importante cantidad de nudos irregulares parece desaconsejable, particularmente cuando los elementos se basan en

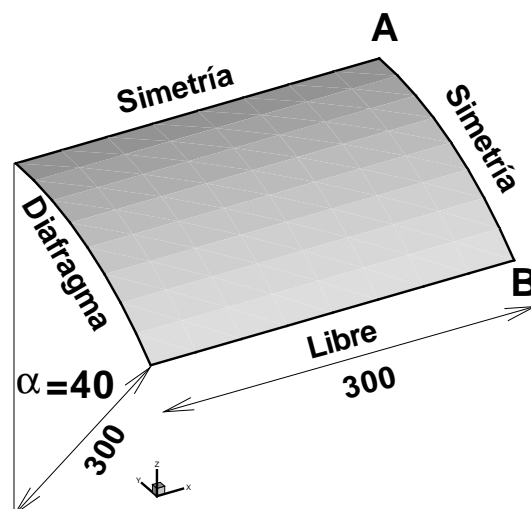


Figura 6: Cilindro rebajado bajo peso propio.

Elemento	Estructurada		No estructurada	
	Punto A	Punto B	Punto A	Punto B
BBST	0.54056	-3.5539	0.53503	-3.5100
S3R	0.52295	-3.4995	0.54287	-3.6033

Tabla 2: Cilindro rebajado bajo peso propio.

teorías clásicas de láminas delgadas. En el caso de geometrías generales no es posible evitar la existencia de nudos irregulares, lo que si es posible muchas veces es generar una malla gruesa inicial (que contendrá nudos irregulares) y luego proceder por cuadrisección a los fines de mantener fijos el número de puntos de puntos irregulares y aislados entres sí.

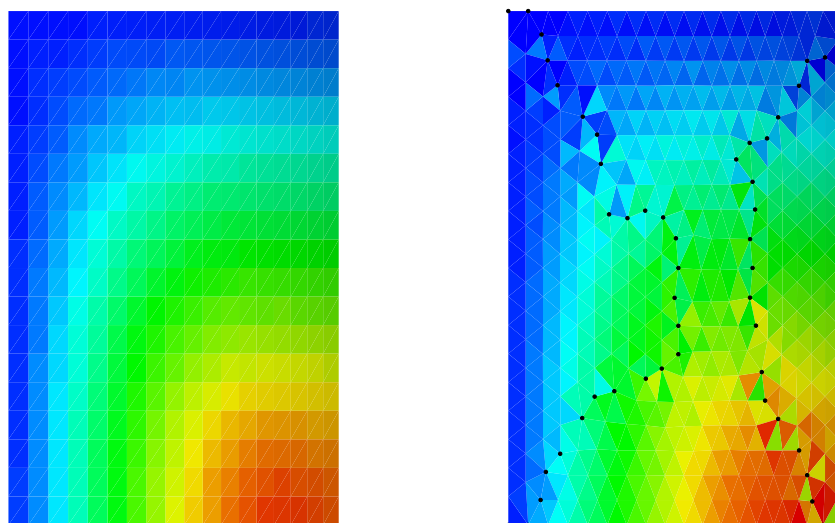
En la Figura 10 se muestra esfuerzos en los puntos de integración de una malla obtenida usando tres pasos de cuadrisección partiendo de una malla gruesa de 18 elementos generada con GiD-7.2 (2002). La malla tiene sólo seis nudos irregulares, uno en cada lado y dos en en interior. La malla final tiene 625 nudos y 1152 elementos. Puede notarse como las discontinuidades en los esfuerzos se restringen a la vecindad de los nudos irregulares y son particularmente más importantes en el borde, tal vez porque los algoritmos utilizados para generación (pesos) conducen a elementos más pequeños en los puntos irregulares internos y elementos más grandes en los nudos irregulares sobre el contorno.

AGRADECIMIENTOS

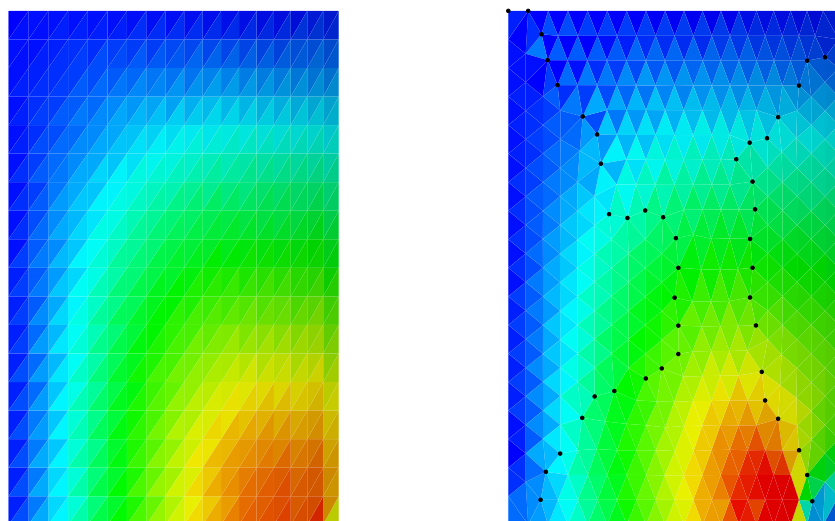
El autor agradece el apoyo financiero de CONICET (Argentina), de la SeCyT-UNC y del MCyT-Cba.

REFERENCIAS

- ABAQUS/SE. *User's Manual, version 6.6.2*. Dassault Systemes Simulia Corp, 2006. URL www.simulia.com.
- M. Brunet y F. Sabourin. Analysis of a rotation-free shell element. *International Journal for*



Elemento BBST



Elemento S3R

Figura 7: Cilindro rebajado. Momento torsor M_{xy}

Numerical Methods in Engineering, 66:1483–1510, 2006.

F. Cirak y M. Ortiz. Subdivision surfaces: a new paradigm for thin-shell finite-element analysis.

International Journal for Numerical Methods in Engineering, 47:2039–2072, 2000.

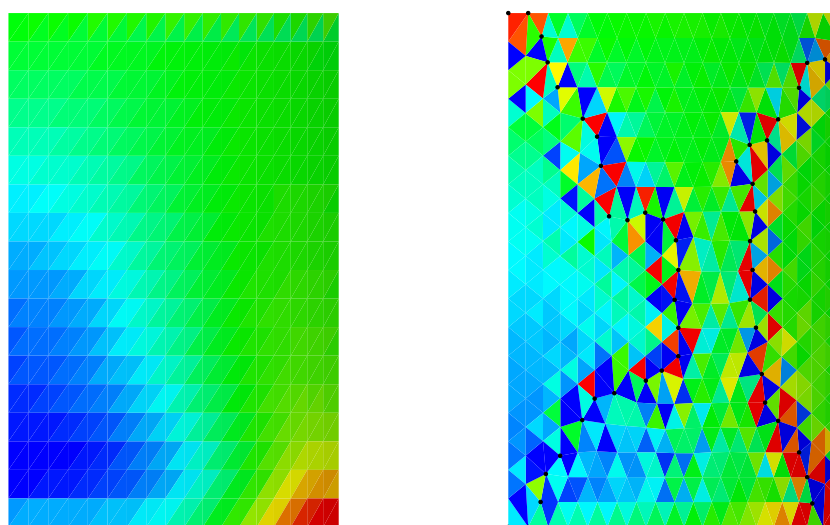
F.G. Flores y C.F. Estrada. A rotation free thin shell quadrilateral. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:2631–2646, 2007.

F.G. Flores y E. Oñate. A basic thin shell triangle with only translational dofs for large strain plasticity. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 51:57–93, 2001.

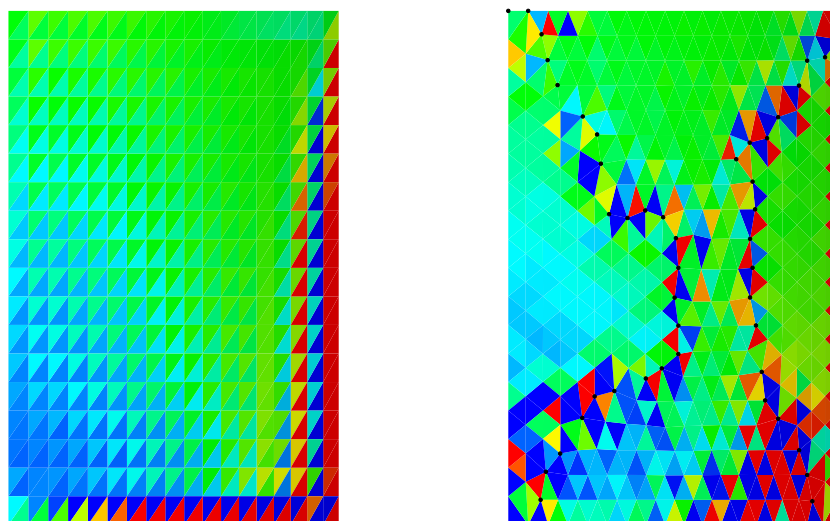
F.G. Flores y E. Oñate. Improvements in the membrane behaviour of the three node rotation-free bst shell triangle using an assumed strain approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 194:907–932, 2005.

F.G. Flores y E. Oñate. A rotation-free shell triangle for the analysis of kinked and branching shells. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 69:1521–1551, 2007.

M. Gardsback y G. Tibert. A comparison of rotation-free triangular shell elements for unstructured meshes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 196:5001–5015,



Elemento BBST



Elemento S3R

Figura 8: Cilindro rebajado. Corte Transversal Q_y

2007.

GiD-7.2. *The personal pre and post processor*. International Center for Numerical Methods in Engineering, UPC, Barcelona, 2002. URL <http://gid.cimne.upc.es>.

Y.Q. Guo, W. Gati, H.Ñaceur, y J.L. Batoz. An efficient dkt rotation free shell element for springback simulation in sheet metal forming. *Computers and Structures*, 80:2299–2312, 2002.

E. Oñate y M. Cervera. Derivation of thin plate bending elements with one degree of freedom per node. *Engineering Computations*, pages 553–561, 1993.

E. Oñate y F. Zárte. Rotation-free plate and shell triangles. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 47:557–603, 2000.

R. Phaal y C.R. Calladine. A simple class of finite elements for plate and shell problems. i: Elements for beams and thin plates. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 35:955–977, 1992.

RADIOSS. Mecalog Group. URL www.radiooss.com.

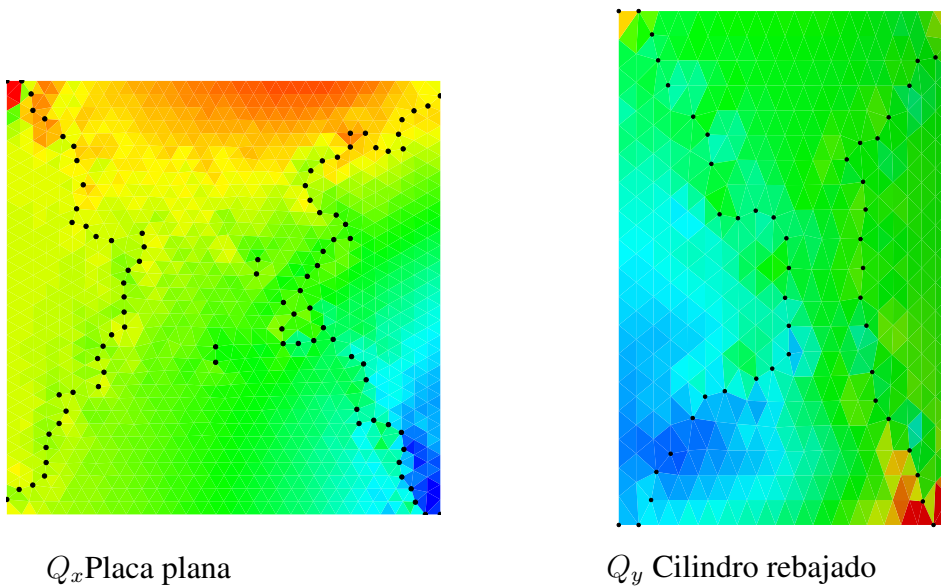


Figura 9: Elemento BBST. Esfuerzos de corte suavizados

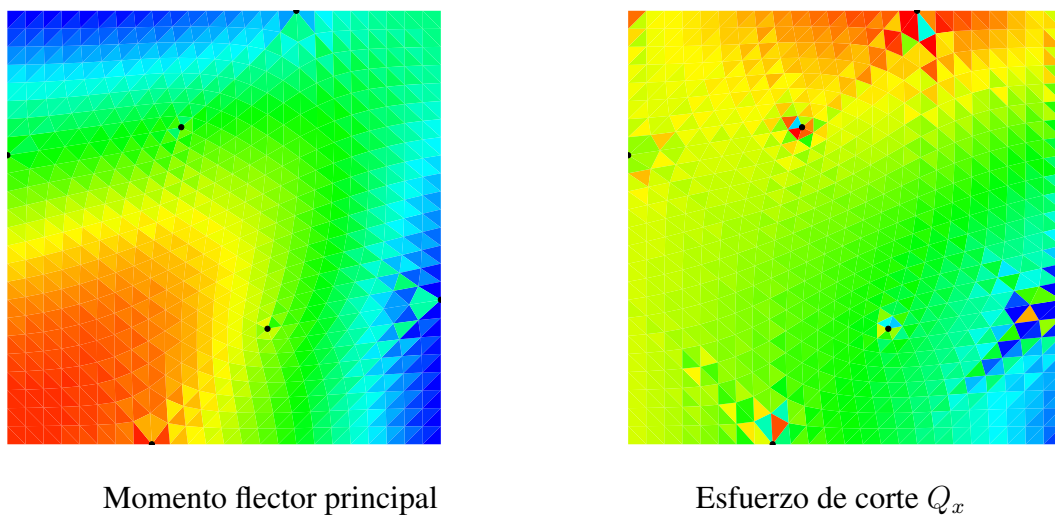


Figura 10: Placa cuadrada. Esfuerzos en una malla obtenida por quadriseción

- F. Sabourin y M. Brunet. Analysis of plates and shells with a simplified three-node triangular element. *Thin Walled Structures*, 21:206–223, 1993.
- F. Sabourin y M. Brunet. Detailed formulation of the rotation-free triangular element “s3” for general purpose shell analysis. *Engineering Computations*, 23:460–502, 2006.
- STAMPACK. *A General Finite Element System for Sheet Stamping and Forming Problems, v6.0.0*. Quantech ATZ, Barcelona, Espaa, 2006. URL www.quantech.es.