

FORMULACIÓN DEL COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MEDIOS POROSOS PARCIALMENTE SATURADOS A PARTIR DE LA TEORÍA DE GRADIENTES

Javier L. Mroginski^a, Sonia M. Vrech^b y Guillermo Etse^b

^a*Departamento de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Nordeste,
Av Las Heras 727, Resistencia, Chaco, Argentina.*

javierm@ing.unne.edu.ar

^b*CONICET, Centro de Métodos Numéricos y Computacionales en Ingeniería (CEMNCI),
Universidad Nacional de Tucumán,*

Av. Independencia 1800, San Miguel de Tucumán, Tucumán, Argentina.

svrech@herrera.unt.edu.ar, getse@herrera.unt.edu.ar

Palabras clave: Teoría de gradientes, medios porosos, presión de poro, falla localizada, ablandamiento.

Resumen. Los problemas de localización del campo de deformaciones en los materiales cohesivos friccionales se relacionan íntimamente con el comportamiento mecánico de ablandamiento y la pérdida de estabilidad. En dicha situación se observa una dependencia patológica de la solución numérica respecto de la discretización empleada en elementos finitos, conduciendo a la pérdida de objetividad en la solución. Para remediar este inconveniente se requiere de una teoría constitutiva enriquecida, capaz de reproducir deformaciones no locales o gradientes de deformaciones de orden superior. Como consecuencia de la mejora en la formulación constitutiva del material surge una nueva variable que define la zona de influencia de la localización y se denomina longitud interna característica. En el caso de los medios porosos saturados o parcialmente saturados, caracterizados por estar constituidos por un esqueleto sólido y fluidos que ocupan los espacios intergranulares dejados entre las partículas sólidas, la longitud interna característica presenta una fuerte dependencia respecto de la presión de poro que es una variable de fundamental importancia en el comportamiento mecánico de medios porosos. En este trabajo se presenta una formulación constitutiva termodinámicamente consistente para describir el comportamiento de medios porosos en diferentes condiciones de saturación empleando la teoría de gradientes de orden superior.

1. INTRODUCCIÓN

La mecánica de medios porosos es una disciplina de gran relevancia en diversas áreas del conocimiento como ser en la geofísica, la ingeniería civil, la biomecánica y la ciencia de los materiales. La mecánica de medios porosos tiene por principal objetivo la determinación o predicción de la deformación del medio cuando le son aplicadas acciones exteriores. Los métodos tradicionales y aceptados por la comunidad científica para el estudio de este tipo de materiales están fundados en su mayoría por evidencias experimentales, sin embargo, carecen de un marco termodinámico consistente (Schrefler y Pesavento, 2004; Khalili y Loret, 2001).

Por otro lado, los problemas de localización del campo de deformaciones en medios porosos están íntimamente relacionados con el comportamiento mecánico de ablandamiento del material y se percibe una dependencia de la solución numérica respecto de la discretización empleada en elementos finitos, conduciendo a la pérdida de objetividad en la solución (Svedberg, 1999; Larsson, 1999). Para remediar este inconveniente se requiere de una teoría constitutiva enriquecida, capaz de reproducir deformaciones no locales o gradientes de deformaciones de orden superior.

En este trabajo se presenta una formulación matemática para describir el comportamiento mecánico de medios porosos regularizada mediante la teoría de gradientes de deformación de orden superior (Vrech, 2007). Los desarrollos teóricos se enmarcaron en las leyes de la Termodinámica para medios porosos (Coussy, 1995) consiguiendo así una formulación consistente sin términos de disipación de energía espurios. La clave para conseguir esta consistencia termodinámica surge de considerar al medio poroso como un sistema continuo termodinámica-mente abierto (Ehlers y Blome, 2003). En consecuencia, se pierde el carácter microscópico que diferentes autores caracterizan al medio (Gawin et al., 1995; Lewis y Schrefler, 1998; Di Rado et al., 2008).

Posteriormente se describe al medio poroso como un sistema termodinámico abierto y se definen las variables primarias que intervienen en el estudio. A continuación se presentan las leyes termodinámicas que deben ser adecuadamente cumplidas en formulaciones consistentes. La cuarta sección aborda la teoría elastoplástica de gradientes y conduce al módulo elasto-plástico tangente para medios porosos a partir de la teoría del flujo de la plasticidad y de la descomposición aditiva de la energía libre. La quinta sección analiza las diferentes formas de falla en materiales cuasifrágiles y extrapola la condición de falla localizada de continuos sólidos a medios porosos continuos, deduciendo la expresión analítica del tensor acústico de localización. La sexta sección plantea una discusión sobre como puede ser abordado el estudio de la no localidad en los medios porosos y la condición de falla localizada a diferentes niveles de observación. Por último, en la séptima sección, se presentan las conclusiones mas relevantes del presente trabajo.

2. DESCRIPCIÓN MACROSCÓPICA DEL MEDIO POROSO

Los medios porosos se caracterizan por estar constituidos a nivel microscópico por una matriz sólida y diferentes fluidos que ocupan los espacios intergranulares dejados entre las partículas sólidas (figura 1a). En este nivel de observación el medio poroso presenta numerosas discontinuidades debidas a las diferentes cinemáticas de las fases que lo componen. En el marco de la mecánica del continuo, el concepto primordial para modelar este tipo de medios con discontinuidades microscópicas es considerarlo como un sistema termodinámico abierto. Este tipo de análisis no requiere consideraciones diferenciadas para las distintas fases componentes, que sí deben ser tenidas en cuenta en las formulaciones basadas en la teoría de mezclas (Lewis

y Schrefler, 1998; Coussy et al., 1998). De este modo, el medio poroso es considerado como la superposición de dos o más medios continuos. El primero representa la fase fluida continua, formada por el fluido que no está ligado por la matriz sólida del medio, y la fase restante corresponde al esqueleto sólido (figura 1b).

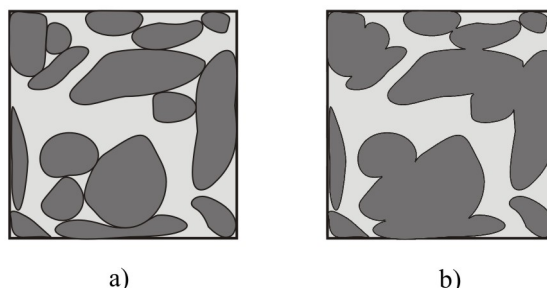


Figura 1: Descripción del medio poroso: a) Nivel microscópico b) Nivel macroscópico

2.1. Tensor de tensiones en el esqueleto sólido

El comportamiento mecánico de los medios porosos parcialmente saturados, como los suelos, se describe usualmente en función del tensor de tensiones efectivo σ' que viene dado por

$$\sigma' = \sigma - p_w \mathbf{I} = \sigma_n + s \quad (1)$$

con

$$s = (p_a - p_w) \mathbf{I} \quad (2)$$

$$\sigma_n = \sigma - p_a \mathbf{I} \quad (3)$$

donde σ es el tensor de tensiones totales, σ_n se define como el tensor de tensiones neto, s es el tensor succión, \mathbf{I} es el tensor unitario de segundo orden, p_a y p_w son las presiones de poro de aire y agua, respectivamente. En muchos casos geotécnicos la presión de poro de aire es igual a la atmosférica y permanece constante, por lo que la succión se iguala a la presión de poro de agua, o simplemente a la presión de poro p .

2.2. Poroplasticidad

Cuando durante un proceso de carga-descarga el medio poroso experimenta cambios irreversibles, el tensor de deformaciones ε y el contenido de masa de fluido m , no son suficientes para caracterizar el estado actual del sistema termodinámico. Por lo tanto, deben incorporarse nuevas variables (internas) para describir estas evoluciones irreversibles. Las variables internas adoptadas son la deformación plástica ε^p , la porosidad plástica ϕ^p o la variación contenido plástico de masa del fluido m^p y la entropía específica irreversible s^p .

La configuración inicial del sistema (figura 2a), donde la deformación $\varepsilon = 0$ y la variación contenido de masa del fluido $m = 0$, esta definida por las tensiones iniciales σ_0 , la presión p_0 y la temperatura absoluta θ_0 . Debido a la acción de factores externos la configuración inicial en equilibrio del medio continuo se ve alterada produciéndose modificaciones en sus variables de estado (figura 2b). Si al cesar dichas acciones no se restituyen los valores iniciales de las variables se dice que la transformación es irreversible (figura 2c). Por este motivo las variables

termodinámicas que intervienen deben ser descompuestas en una parte reversible (ε^e, m^e, s^e) y en otra irreversibles (ε^p, m^p, s^p), en forma aditiva:

$$\begin{aligned}\varepsilon &= \varepsilon^e + \varepsilon^p \\ m &= m^e + m^p \\ s &= s^e + s^p\end{aligned}\quad (4)$$

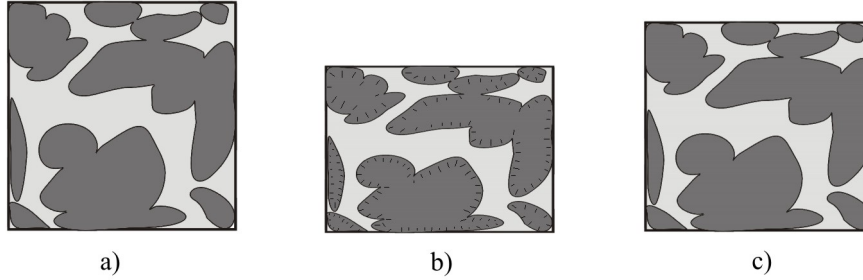


Figura 2: Diferentes estados del medio poroso: a) Estado inicial ($\sigma_0, p_0, \theta_0, \varepsilon = m = 0$); b) Estado actual ($\sigma, p, \theta, \varepsilon, m$); c) Estado final luego de la descarga ($\sigma_0, p_0, \theta_0, \varepsilon = \varepsilon^p, m = m^p$)

La deformación plástica del esqueleto ε^p , está relacionada únicamente con la evolución irreversible del mismo. Sin embargo, el contenido plástico de masa de fluido m^p puede relacionarse con ε^p . Sea ϕ^p la porosidad plástica definida por

$$\phi^p = \frac{m^p}{\rho_0^{fl}} \quad (5)$$

donde ρ_0^{fl} es la densidad de masa del fluido en el estado de referencia. El contenido de masa del fluido puede ser expresado a partir de la configuración lagrangiana de la expresión de conservación de masa (Coussy, 1995)

$$m = J \rho_0^{fl} \phi - \rho_0^{fl} \phi_0 \quad (6)$$

donde J es el Jacobiano, y para transformaciones infinitesimales se aproxima a

$$J \equiv 1 + \varepsilon \quad (7)$$

con $\varepsilon = \text{tr}(\varepsilon)$. La variación del contenido plástico de la masa del fluido puede expresarse de la siguiente manera

$$m^p = J^p \rho_0^{fl} \phi^d - \rho_0^{fl} \phi_0 \quad (8)$$

siendo $J^p = (1 + \varepsilon^p)$, $\varepsilon^p = \text{tr}(\varepsilon^p)$ y ϕ^d la porosidad residual luego de un proceso de descarga completa, y dado que luego de la descarga la densidad de la masa del fluido se restituye a la densidad inicial $\rho^{fl} = \rho_0^{fl}$.

Combinando las expresiones (5) y (8), la porosidad residual puede expresarse como

$$\phi^p = J^p \phi^d - \phi_0 \quad (9)$$

Para transformaciones infinitesimales ε^p representa la deformación volumétrica plástica. Teniendo presente que el Jacobiano relaciona la configuración (o volumen) de referencia $d\Omega$ con el actual $d\Omega_t$ según:

$$d\Omega_t = Jd\Omega \quad (10)$$

Considerando la ec. (7), el diferencial de volumen del sistema finalizado el proceso de descarga resulta

$$d\Omega^d = J^p d\Omega \quad (11)$$

y multiplicando la expresión (9) por $d\Omega$ y teniendo en cuenta la ec. (11) puede establecerse

$$\phi^p d\Omega = \phi^d d\Omega^d - \phi_0 d\Omega \quad (12)$$

Esta última expresión justifica la terminología de porosidad plástica, dado que a partir de la misma, ϕ^p representa la variación irreversible del volumen del poro por unidad de volumen infinitesimal $d\Omega$. El contenido de masa del fluido m , el contenido plástico de masa del fluido m^p y la porosidad plástica ϕ^p son variables Lagrangianas debido a que están referidas a la configuración inicial de referencia $d\Omega$.

3. TERMODINÁMICA DE MEDIOS POROSOS

Se presentan en esta sección las relaciones termodinámicas básicas correspondientes a materiales porosos disipativos en el marco de la teoría de gradientes.

3.1. Primera ley de la Termodinámica

La primera ley de la termodinámica establece la conservación de la energía. Para un cuerpo que ocupa un dominio Ω y cuyo borde es $\partial\Omega$ se expresa

$$\dot{E} + \dot{K} = P + Q \quad (13)$$

siendo

$$\begin{aligned} E &= \int_{\Omega} (\rho e + pm) d\Omega \\ K &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} \rho |\dot{\mathbf{u}}|^2 d\Omega \\ P &= \int_{\Omega} \rho \mathbf{b}_m \cdot \dot{\mathbf{u}} d\Omega + \int_{\partial\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} d\partial\Omega \\ Q &= \int_{\Omega} \rho r d\Omega - \int_{\partial\Omega} \mathbf{h} \cdot \mathbf{n} d\partial\Omega \end{aligned} \quad (14)$$

Donde E y K son las energías interna y cinemática del cuerpo respectivamente, mientras P y Q representan las fuentes de energía mecánica y térmica, e es la densidad de energía interna (por unidad de masa), \mathbf{b}_m es la fuerza volumétrica, $\boldsymbol{\sigma}$ la tensión, r la densidad de calor y \mathbf{h} el flujo del calor. \mathbf{u} es el desplazamiento, \mathbf{n} es la normal a $\partial\Omega$, ρ la densidad de masa, p es la presión de poro y m es la variación del contenido de masa del fluido. Suponiendo que la ec.

(13) vale para un sector arbitrario del dominio y utilizando la ecuación de equilibrio, se obtiene la forma local (espacialmente local) de la ecuación de la energía para medios porosos

$$\rho \dot{e} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho r + p \dot{m} - \nabla \cdot \mathbf{h} \quad (15)$$

siendo ésta la formulación usual de la teoría de continuos locales, y donde $\boldsymbol{\varepsilon}$ representa la deformación total. Como la ec. (15) no incluye explícitamente el argumento e , se concluye que es válida tanto para teorías locales como para teorías no locales de gradientes.

3.2. Segunda ley de la Termodinámica

La segunda ley de la termodinámica establece que la entropía de un sistema termodinámico no puede disminuir. Esta ley puede expresarse como

$$\dot{S} + Q_\theta \geq 0 \quad (16)$$

con

$$\dot{S} = \int_{\Omega} \rho s d\Omega ; \quad Q_\theta = \int_{\Omega} \frac{\rho r}{\theta} d\Omega - \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{h}}{\theta} d\partial\Omega \quad (17)$$

donde S es la entropía del cuerpo, Q_θ representa el flujo de entropía, s es la densidad de entropía por unidad de masa y θ es la temperatura absoluta. Sustituyendo las expresiones (17) en la ec. (16) y teniendo en cuenta la ec. (15) se obtiene la forma integral de la desigualdad de Clausius Duhem

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left(\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho \theta \dot{s} + p \dot{m} - \rho \dot{e} - \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \theta}{\theta} \right) d\Omega \geq 0 \quad (18)$$

que, considerando la expresión de energía libre Helmholtz $\Psi = e - \theta s^e$, conduce a la relación

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left[\boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \rho \theta \dot{s} + p \dot{m} - \rho \left(\dot{\Psi} + \theta \dot{s}^e + \dot{\theta} s^e \right) - \frac{\mathbf{h} \cdot \nabla \theta}{\theta} \right] d\Omega \geq 0 \quad (19)$$

3.3. Disipación plástica en medios porosos

En base a estudios desarrollados por Coussy (1995), el estado de un sistema poroso continuo queda perfectamente definido por las variables locales temperatura absoluta θ , deformación elástica $\boldsymbol{\varepsilon}^e$, variación del contenido elástico de masa fluida m^e y las variables internas q_i (por simplicidad se considerarán solo variables escalares). Para que el sistema sea capaz de describir efectos no locales de la deformación debe ser considerado el gradiente de las variables internas ∇q_i (Svedberg, 1999). En consecuencia, la energía libre es función de las siguientes variables

$$\Psi = \Psi (\theta, \boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e, q_i, \nabla q_i) \quad (20)$$

Derivando el potencial de energía libre según la regla de la cadena de acuerdo a

$$\dot{\Psi} = \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \dot{\theta} + \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \dot{m}^e + \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \dot{q}_i + \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_i} \nabla \dot{q}_i \quad (21)$$

considerando las expresiones (4) y sustituyendo en la ec. (19) se obtiene

$$\int_{\Omega} \frac{1}{\theta} \left[\left(\boldsymbol{\sigma} - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \right) \dot{m} - \rho \left(\frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + s^e \right) \dot{\theta} + \right. \\ \left. + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \dot{m}^p + \rho \theta \dot{s}^p - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial q} \dot{q}_i - \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_i} \nabla \dot{q}_i \right] d\Omega \geq 0 \quad (22)$$

La expresión anterior conduce a las relaciones de Coleman para medios porosos continuos

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^e} \\ p &= \rho \frac{\partial \Psi}{\partial m^e} \\ s^e &= - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (23)$$

Teniendo en cuenta además la tasa de la variación del contenido plástico de masa de fluido a partir de la derivada respecto del tiempo de la ec.(5),

$$\dot{m}^p = \rho_0^{fl} \dot{\phi}^p \quad (24)$$

los términos restantes de la ec. (22) constituyen la disipación plástica del sistema

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho_0^{fl} p \dot{\phi}^p + \rho \theta \dot{s}^p + \sum Q_i \dot{q}_i \geq 0 \quad (25)$$

con

$$Q_i = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} - \nabla \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_i} \right) \quad (26)$$

4. TEORÍA ELASTOPLÁSTICA DE GRADIENTES

En esta sección se deducen las relaciones constitutivas elastoplásticas para medios porosos a partir de la teoría de gradientes para tener en consideración efectos no locales en la deformación.

4.1. Relación constitutiva

Basado en los trabajos de Peet et al. (1997), Svedberg (1999) y Etse y Vrech (2006), se desarrolla una formulación elastoplástica termodinámicamente consistente regularizada de acuerdo a la teoría de gradientes de deformaciones de orden superior. Se considera elastoplasticidad isotérmica, con lo cual las variables θ , s^e y s^p se convierten en cantidades irrelevantes para el estudio. Para el potencial de energía libre se adopta la descomposición aditiva

$$\Psi(\boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e, q_i, \nabla q_i) = \Psi^e(\boldsymbol{\varepsilon}^e, m^e) + \Psi^{p,loc}(q_i) + \Psi^{p,nloc}(\nabla q_i) \quad (27)$$

donde Ψ^e es la energía elástica del medio poroso definida por Coussy (1995)

$$\Psi^e = \boldsymbol{\sigma}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e + p_0 \frac{m^e}{\rho_0^{fl}} + 3\alpha_m \theta M \frac{m^e}{\rho_0^{fl}} + \frac{1}{2} \boldsymbol{\varepsilon}^e : C_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \frac{1}{2} \mathbf{M} \left(\mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}^e - \frac{m^e}{\rho_0^{fl}} \right)^2 \quad (28)$$

Los potenciales $\Psi^{p,loc}$ y $\Psi^{p,nloc}$ constituyen las contribuciones locales y no locales, respectivamente, debidas al comportamiento disipativo de endurecimiento/ablandamiento isótropo, expresadas en término de las variables internas q_i y su gradiente ∇q_i .

A partir de las ecuaciones (23) despreciado las tensiones y presiones iniciales se puede obtener las siguientes ecuaciones

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}_0 : \boldsymbol{\varepsilon}^e - \mathbf{MB} \frac{m^e}{\rho_0^{fl}} \quad (29)$$

$$p = -\mathbf{MB} : \boldsymbol{\varepsilon}^e + \mathbf{M} \frac{m^e}{\rho_0^{fl}} \quad (30)$$

con

$$\mathbf{C}_0 = \mathbf{C} - \mathbf{MB} \otimes \mathbf{B} \quad (31)$$

donde \mathbf{C} es el tensor de constitutivo elástico de cuarto orden que relaciona linealmente las tensiones y las deformaciones, \mathbf{M} es el módulo de Biot y $\mathbf{B} = b\mathbf{I}$ siendo b el coeficiente de Biot.

La disipación plástica se expresa como

$$D = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p + \rho_0^{fl} p \dot{\phi}^p + \sum Q_i \dot{q}_i \geq 0 \quad (32)$$

donde las tensiones disipativas Q_i pueden ser descompuestas en un término local y otro no local

$$Q_i = Q_i^{loc} + Q_i^{nloc} \quad (33)$$

siendo las tensiones disipativas

$$Q_i^{loc} = -\rho \frac{\partial \Psi}{\partial q_i} \quad (34)$$

$$Q_i^{nloc} = -\nabla \left(\rho \frac{\partial \Psi}{\partial \nabla q_i} \right)$$

El estado plástico quedará entonces definido por una superficie convexa β tal que

$$\beta = \{(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_i) | \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_i) \leq 0\} \quad (35)$$

donde $\Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_i)$ es la función de fluencia convexa.

4.2. Regla de flujo plástico

Del mismo modo que para la teoría local, se plantean las leyes de evolución de las variables internas en forma incremental. Para el caso de flujo plástico y leyes de endurecimiento/ablandamiento isótropo, se introduce un potencial disipativo Φ^* tal que

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (36)$$

$$\dot{m}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (37)$$

$$\dot{q}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \quad (38)$$

Para completar la formulación del problema en el dominio Ω deben cumplirse las condiciones complementarias de Kuhn-Tucker dadas por las relaciones

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad , \quad \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_i) \leq 0 \quad , \quad \dot{\lambda} \Phi(\boldsymbol{\sigma}, p, Q_i) = 0 \quad (39)$$

4.3. Ecuación constitutiva

Derivando las ecuaciones ecs.(29) y (30) respecto del tiempo y considerando la descomposición aditiva del potencial de energía libre de ec. (27) y las leyes de flujo de las variables internas ecs. (36), (37) y (38) puede obtenerse las siguientes expresiones para la tasa del tensor de tensiones $\dot{\boldsymbol{\sigma}}$ y para la tasa de presión de poro \dot{p}

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - C_0 : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{MB} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} + \mathbf{MB} \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (40)$$

$$\dot{p} = -\mathbf{MB} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{MB} : \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{M} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} - \mathbf{M} \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (41)$$

Derivando respecto del tiempo la ec. (33) y aplicando la regla de derivación en cadena, resulta (Svedberg, 1999)

$$\dot{Q}_i = \dot{Q}_i^{loc} + \dot{Q}_i^{nloc} \quad (42)$$

con

$$\dot{Q}_i^{loc} = -\dot{\lambda} H \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \quad (43)$$

$$\dot{Q}_i^{grad} = l^2 \nabla \cdot \left(\mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla \dot{\lambda} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \right) + l^2 \nabla \cdot \left(\dot{\lambda} \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla Q_i \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_i^2} \right) \quad (44)$$

En estas expresiones se introdujeron el módulo de endurecimiento/ablandamiento local isótropo H que representa la pendiente del endurecimiento o ablandamiento, y el tensor de gradiente no local \mathbf{H}^{grad} , definidos como (Peet et al., 1997)

$$H = \rho \frac{\partial^2 \Psi^{p,loc}}{\partial q_i^2} \quad , \quad \mathbf{H}^{grad} = \rho \frac{1}{l^2} \frac{\partial^2 \Psi^{p,nloc}}{\partial \nabla q_i \otimes \partial \nabla q_i} \quad (45)$$

\mathbf{H}^{grad} es un tensor de segundo orden definido positivo. El significado y la interpretación física de la longitud característica l y del tensor de gradiente no local \mathbf{H}^{grad} fue expuesto en reiterados artículos (Pamin, 1994; Svedberg, 1999; Vrech y Etse, 2005).

4.4. Ecuación diferencial del multiplicador plástico

A partir de la condición de Kuhn-Tucker ec. (39) y de la condición de consistencia plástica

$$\dot{\Phi} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \dot{\boldsymbol{\sigma}} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} \dot{p} + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \dot{Q}_i = 0 \quad (46)$$

considerando además flujo plástico asociado $\Phi = \Phi^*$ y las ecuaciones diferenciales (40), (41), (43) y (44), se obtiene la siguiente ecuación diferencial en $\dot{\lambda}$

$$\begin{aligned} \dot{\Phi} = \dot{\lambda} \left[-\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{B} : \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} + \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{B} : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - H \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \right] \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{B} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} - \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} \\ + \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left[l^2 \nabla \cdot \left(H^g \nabla \lambda \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \right) + l^2 \nabla \cdot \left(\lambda H^g \nabla Q_i \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_i^2} \right) \right] \end{aligned} \quad (47)$$

Ordenando los términos de la ecuación anterior, ec.(47), puede expresarse como

$$-\dot{\Phi}^{grad} + (h + h^{grad}) \dot{\lambda} = \dot{\Phi}^e - \dot{\Phi} \quad (48)$$

donde la función de carga local

$$\dot{\Phi}^e = \dot{\Phi}_s^e + \dot{\Phi}_p^e \quad (49)$$

está compuesta por los términos $\dot{\Phi}_s^e$, referido al esqueleto sólido, y $\dot{\Phi}_p^e$, referido a la fase porosa.

$$\dot{\Phi}_s^e = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (50)$$

$$\dot{\Phi}_p^e = \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} \left(\mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{B} \right) - \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (51)$$

$\dot{\Phi}^{grad}$ es la función de carga de gradientes, calculada de acuerdo a

$$\dot{\Phi}^{grad} = l^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left\{ \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \left[\mathbf{H}^{grad} : \nabla^2 \lambda + (\nabla \cdot \mathbf{H}^{grad}) \cdot \nabla \lambda \right] + 2 \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_i^2} \nabla Q_i \cdot \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla \lambda \right\} \quad (52)$$

h_s es el módulo plástico generalizado,

$$h = h_s + h_p + \bar{H} \quad (53)$$

$$h_s = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (54)$$

$$h_p = \mathbf{M} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{B} : \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} + \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{B} : \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \right) \quad (55)$$

$$\bar{H} = H \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \quad (56)$$

$$(57)$$

y h^{grad} el módulo plástico de gradientes, de acuerdo a la expresión

$$h^{grad} = -l^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \left\{ \frac{\partial^2 \Phi^*}{\partial Q_i^2} \left[\mathbf{H}^{grad} : \nabla^2 Q_i + (\nabla \cdot \mathbf{H}^{grad}) \cdot \nabla Q_i \right] + \frac{\partial^3 \Phi^*}{\partial Q_i^3} \nabla Q_i \cdot \mathbf{H}^{grad} \cdot \nabla Q_i \right\} \quad (58)$$

Para estados homogéneos de las variables de estado se verifica que $\partial^2 \Phi^* / \partial Q_i^2 = 0$, y en consecuencia

$$h^{grad} = 0 \quad \text{y} \quad \dot{\Phi}^{grad} = l^2 \frac{\partial \Phi}{\partial Q_i} \frac{\partial \Phi^*}{\partial Q_i} \mathbf{H}^{grad} : \nabla^2 \dot{\lambda} \quad (59)$$

La ecuación diferencial lineal en $\dot{\lambda}$ (Svedberg, 1999) resulta

$$-\dot{\Phi}^{grad} + h\dot{\lambda} = \dot{\Phi}^e - \dot{\Phi} \quad (60)$$

4.5. Módulo elastoplástico tangente

La tasa del multiplicador plástico $\dot{\lambda}$ puede ser obtenida a partir de la ecuación diferencial (60) de acuerdo a

$$\dot{\lambda} = \frac{\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{grad}}{h} \quad (61)$$

y luego, al reemplazarse en las expresiones de las relaciones constitutivas en tasas correspondientes a las ecs. (40) y (41) se obtiene

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}_0 : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{C}_0 : \frac{(\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{grad})}{h} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{M}\mathbf{B} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} + \mathbf{M}\mathbf{B} \frac{(\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{grad})}{h} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (62)$$

$$\dot{p} = -\mathbf{M}\mathbf{B} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{M}\mathbf{B} : \frac{(\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{grad})}{h} \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} + \mathbf{M} \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} - \mathbf{M} \frac{(\dot{\Phi}^e + \dot{\Phi}^{grad})}{h} \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} \quad (63)$$

Teniendo presente la función de carga local de ecs. (50) y (51), y reordenando se obtiene

$$\dot{\Phi}^e = \dot{\Phi}_s^e + \dot{\Phi}_p^e = \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 - \mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} : \mathbf{B} \right) : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \left(\mathbf{M} \frac{\partial \Phi}{\partial p} - \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{B} \right) \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} \quad (64)$$

$$\dot{\Phi}^e = \dot{\Phi}_\varepsilon^e : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \dot{\Phi}_m^e \frac{\dot{m}}{\rho_0^{fl}} \quad (65)$$

Reemplazando la ec.(65) en las ecs.(62) y (63), y reordenando los términos resulta

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{E}_s^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \mathbf{B}_s^{ep} \frac{\dot{m}}{\rho^{fl}} + \mathbf{G}_s^g \dot{\Phi}^{grad} \quad (66)$$

$$\dot{p} = \mathbf{E}_p^{ep} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} - \mathbf{B}_p^{ep} \frac{\dot{m}}{\rho^{fl}} + \mathbf{G}_p^g \dot{\Phi}^{grad} \quad (67)$$

siendo

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_s^{ep} &= C_0 + \frac{MB\dot{\Phi}_\varepsilon^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - C_0\dot{\Phi}_\varepsilon^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma}}{h} \\
 \mathbf{E}_p^{ep} &= -MB + \frac{MB\dot{\Phi}_\varepsilon^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} - M\dot{\Phi}_\varepsilon^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial p}}{h} \\
 \mathbf{B}_s^{ep} &= -MB + \frac{MB\dot{\Phi}_m^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - C_0\dot{\Phi}_m^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma}}{h} \\
 \mathbf{B}_p^{ep} &= M + \frac{MB\dot{\Phi}_m^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} - M\dot{\Phi}_m^e \frac{\partial \Phi^*}{\partial p}}{h} \\
 \mathbf{G}_s^g &= MB \frac{\partial \Phi^*}{\partial p} - C_0 \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} \\
 \mathbf{G}_p^g &= MB \frac{\partial \Phi^*}{\partial \sigma} - M \frac{\partial \Phi^*}{\partial p}
 \end{aligned} \tag{68}$$

5. FALLA LOCALIZADA EN MEDIOS POROSOS

La falla global en un medio continuo se produce generalmente como consecuencia de fallas locales en zonas o regiones donde se verifica que el material constituyente está sometido a un estado tensional post-pico (Etse, 1992).

La mecánica de medios continuos cuenta con numerosos estudios sobre el proceso de falla de los materiales, e identifica una sucesión de eventos que se inician en escala microscópica y provocan el deterioro progresivo del medio, que inicialmente es tratado como un continuo, hasta transformarlo en un medio discontinuo.

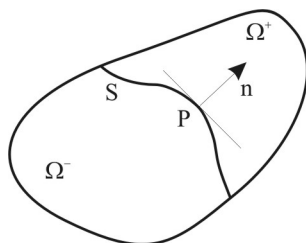


Figura 3: Superficie de discontinuidad S

Dado un dominio Ω, la falla o discontinuidad ∂S que separa los subdominios Ω+ y Ω-, queda caracterizada por la normal n en el punto P (ver figura 3). Dicha discontinuidad puede ser analizada desde perspectivas diferentes según el enfoque que se desee realizar. Se definen tres tipos de fallas:

- *Falla discreta o frágil*: este tipo de análisis escapa a la mecánica del medio continuo y debe ser abordado por la mecánica de fracturas. La discontinuidad se presenta en el campo de velocidad de desplazamiento, es decir $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq 0$.¹
- *Falla localizada*: El campo $\dot{\mathbf{u}}$ permanece continuo mientras que la discontinuidad se presenta en el campo de sus gradientes, las deformaciones. Es decir $[[\dot{\mathbf{u}}]] = 0$ y $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] \neq 0$.

¹donde $[[\bullet]]$ es el operador salto y se define como $[[\bullet]] = \bullet^+ - \bullet^-$

- *Falla difusa:* Es propia de materiales dúctiles. En este caso tanto el campo $\dot{\mathbf{u}}$ como $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}$ permanecen continuos, es decir $[[\dot{\mathbf{u}}]] = 0$ y $[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = 0$.

Estos conceptos de la mecánica de sólidos pueden ser extrapolados a la mecánica de medios porosos sin mayores dificultades teniendo presente a la presión de poro, variable que caracteriza a estos medios.

Cabe aclarar que los efectos plásticos (deformaciones) que introducen posibles localizaciones en el medio poroso conciernen pura y exclusivamente al esqueleto sólido y no al fluido. El fluido sometido a fuertes gradientes de presión experimenta un proceso de difusión espontánea, disipando rápidamente dichas presiones. En consecuencia, la tasa de la presión de poro no presenta un salto discontinuo.

Cuando se analiza la falla localizada en medios porosos se debe cumplir:

$$\begin{aligned} [[\dot{\mathbf{u}}]] &= \dot{\mathbf{u}}^+ - \dot{\mathbf{u}}^- = 0 \\ [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] &= [[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \nabla\dot{\mathbf{u}}^+ - \nabla\dot{\mathbf{u}}^- \neq 0 \\ [[\dot{p}]] &= \dot{p}^+ - \dot{p}^- = 0 \end{aligned} \quad (69)$$

Aplicando el teorema de Maxwell al operador salto del gradiente de velocidad se obtiene

$$[[\nabla\dot{\mathbf{u}}]] = \gamma \mathbf{n} \otimes \mathbf{m} \quad (70)$$

donde \mathbf{m} es la dirección y γ es la magnitud del salto. Luego, considerando la definición del tensor de deformaciones, se obtiene el salto de la tasa del tensor de deformación total

$$[[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] = \frac{1}{2} (\nabla\dot{\mathbf{u}} + \nabla\dot{\mathbf{u}}^T) = \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{n} \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m} \otimes \mathbf{n}) \quad (71)$$

Admitiendo continuidad en la tasa de presión poro es posible suponer también la continuidad en la variación del contenido de masa de fluido m (Coussy, 1995)

$$[[\dot{p}]] = 0 \Rightarrow [[\dot{m}]] = 0 \quad (72)$$

Considerando además que a ambos lados de la superficie donde se produce la singularidad el medio se encuentra en estado plástico y recordando la ec.(66), el salto de la tasa del tensor de tensiones estará dado

$$[[\dot{\boldsymbol{\sigma}}]] = \mathbf{E}_s^{ep} : [[\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}]] + \mathbf{G}_s^g \left[[[\dot{\Phi}^{grad}]] \right] \quad (73)$$

En consecuencia, la condición de falla localizada en medios porosos no difiere de la deducida por Svedberg (1999) para continuos sólidos y requiere del análisis de las propiedades espectrales del tensor acústico correspondiente a plasticidad regularizada con gradientes definido como

$$\mathbf{Q}^g = \mathbf{Q} - \frac{1}{h + h^g} \mathbf{a}^* \otimes \mathbf{a} \quad (74)$$

Siendo \mathbf{Q} el tensor de localización elástico y los vectores \mathbf{a}^* y \mathbf{a} dados por

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n} \quad (75)$$

$$\mathbf{a}^* = \frac{\partial \Phi^*}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n} \quad (76)$$

$$\mathbf{a} = \frac{\partial \Phi}{\partial \boldsymbol{\sigma}} : \mathbf{C}_0 \cdot \mathbf{n} \quad (77)$$

Para determinar la condición de localización es necesario realizar el análisis espectral de \mathbf{Q}^g , para lo cual conviene premultiplicar a la ec. (74) por \mathbf{Q}^{-1}

$$\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g = 1 - \mathbf{Q}^{-1} \frac{\mathbf{a}^* \otimes \mathbf{a}}{h + h^g} \quad (78)$$

La solución de autovalores mínimos de $\det [\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g]$ resulta

$$\lambda_{min} [\mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{Q}^g] = 1 - d_G \quad \text{con} \quad d_G = \frac{\mathbf{a}^* \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a}}{h + h^g} \quad (79)$$

y define la condición de localización para plasticidad regularizada con gradientes para medios porosos como

$$1 - d_G \doteq 0 \Rightarrow \mathbf{a}^* \cdot \mathbf{Q}^{-1} \cdot \mathbf{a} = h + h^g \quad (80)$$

La expresión (73) implica que para el análisis de la falla localizada en medios porosos las fases fluidas pueden ser ignoradas y el análisis debe realizarse sobre el esqueleto sólido únicamente. La presión de poro contribuye al fenómeno de localización solamente a través de su influencia en el criterio de plasticidad empleado y en la modificación del módulo plástico generalizado.

6. DISCUSIÓN SOBRE LA ESCALA DE OBSERVACIÓN

Otro tipo de análisis de la mecánica de los medios porosos está basado en un estudio a nivel microscópico donde cada componente del medio (partículas sólidas, sustancias líquidas, gases e incluso poluentes) es tratado en forma individual empleando la teoría de mezclas para tener en cuenta el efecto acoplado de los mismos (Schrefler y Pesavento, 2004; Mroginski et al., 2007; Di Rado et al., 2008). Este tipo de análisis requiere del conocimiento de un número superior de propiedades microscópicas del medio y no admiten la descripción llevada a cabo en la sección 2 para el esqueleto sólido (ver figura 1), sino que la fase sólida se considera constituida por la matriz sólida (o granos). Aquí no son válidas las leyes termodinámicas de medios continuos abiertos empleados por Coussy (1995) y Ehlers y Blome (2003), ya que las fases presentan discontinuidades microscópicas.

En los modelos microscópicos la descripción de la no linealidad física se centra en el análisis del comportamiento de la fase sólida dado que las fases fluidas no poseen comportamientos plásticos. Por este motivo, la incorporación de una teoría no local, como la teoría de gradientes superiores, en modelos microscópicos de medios porosos podría llevarse a cabo únicamente en la fase sólida, y no revestiría mayores exigencias que las requeridas para los medios continuos tradicionales (Svedberg, 1999; Vrech, 2007). Es decir, podría considerarse el comportamiento no local del medio desacoplando el efecto de la fase sólida respecto del comportamiento de los fluidos restantes.

7. CONCLUSIONES

En este trabajo se ha adaptado la teoría constitutiva de gradiente termodinámicamente consistente propuesto por Peet et al. (1997); Vrech (2007) a medios porosos compuestos por un esqueleto sólido y fluidos circundantes. El estudio del medio poroso fue llevado a cabo desde un enfoque macroscópico, considerándolo un sistema termodinámico abierto que adolece

de subregiones ocluidas. Dicho enfoque ha permitido formular una relación constitutiva termodinámicamente consistente regularizada mediante la teoría de gradientes.

Por otro lado, siguiendo el procedimientos de análisis de procesos de falla en materiales cuasi frágiles se extendió la teoría local de continuos sólidos a medios porosos llegando a la expresión analítica del tensor acústico que define la condición de localización para plasticidad regularizada con gradientes en medios porosos.

A partir de esta formulación constitutiva es posible modelar el comportamiento mecánico de medios porosos sometidos a estados tensionales próximos al coláps, definido por la condición de localización. La regularización que surge de incorporar la teoría no local de gradientes de deformación en la formulación de medios porosos contínuos permite independizar los resultados numericos de la discretización empleada en el Método de Elementos Finitos. El empleo de este modelo termodinámicamente consistente permite, a su vez, evaluar la incidencia o no de disipaciones energéticas espurias en modelos que no cumplen con dicha consistencia.

Las aplicaciones de la presente formulación se extienden a medios porosos en general, como hormigón, suelo, huesos, etc., sin embargo, debido a las hipótesis realizadas en la sección 2 donde se considera al medio como un sistema termodinámico abierto, necesario para conseguir la consistencia termodinámica del modelo, es posible que se presenten dificultades al intentar describir fases discontinuas. Un ejemplo característico se da cuando en el modelado de suelos parcialmente saturados se establece que la permeabilidad del medio varía con el contenido de humedad, en cuyo caso la fase gaseosa puede presentar discontinuidades.

REFERENCIAS

- O. Coussy. *Mechanics of Porous Continua*. John Wiley & Sons, 1995.
- O. Coussy, L. Dormieux, y E. Detournay. From mixture theory to Biot's approach for porous media. *International Journal of solid and structures*, 35(34):4619–4635, 1998.
- H.A. Di Rado, P.A. Beneyto, J.L. Mroginski, y A.M. Awruch. Influence of the saturation-suction relationship in the formulation of non-saturated soils consolidation models. *Mathematical and Computer Modelling (in press DOI: 10.1016/j.mcm.2008.03.019)*, 2008.
- W. Ehlers y P. Blome. A triphasic model for unsaturated soil based on the theory of porous media. *Mathematical and Computer Modelling*, 37:507–513, 2003.
- G. Etse. *Theoretische und numerische untersuchung zum diffusen und lokalisierten versagen in beton*. Ph.D. Thesis, University of Karlsruhe, Germany, 1992.
- G. Etse y S. Vrech. Geometrical method for localization analysis in gradient-dependent J2 plasticity. *Journal of Applied Mechanics, ASCE*, 73(6):1026–1030, 2006.
- D. Gawin, P. Baggio, y B.A. Schrefler. Coupled heat, water and gas flow in deformable porous media. *International Journal for numerical methods in fluids*, 20:969–987, 1995.
- N. Khalili y B. Loret. An elasto-plastic model for non-isothermal analysis of flow and deformation in unsaturated porous media: formulation. *International Journal of solid and structures*, 38(46-47):8305–8330, 2001.
- J. Larsson. *On the Modelling of Porous Media with emphasis on localization*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- R.W. Lewis y B.A. Schrefler. *The Finite Element Method in the Static and Dynamic Deformation and Consolidation of Porous Media*. John Wiley & Sons, 1998.
- J.L. Mroginski, H.A. Di Rado, P.A. Beneyto, y A.M. Awruch. Pollutant transport modelling in partially saturated deformable porous media. *Mecánica Computacional*, 26:3614–3631, 2007.
- J. Pamin. *Gradient-dependent plasticity in numerical simulation of localization phenomena*.

- TU-Delft, The Netherlands, 1994.
- R. Peet, T. Svedberg, y K. Runesson. A thermodynamically consistent theory of gradient-regularized plasticity coupled to damage. *International Journal of Plasticity*, 13(6):669–696, 1997.
- B.A. Schrefler y F. Pesavento. Multiphase flow in deforming porous material. *Computers and Geotechnics*, 31:237–250, 2004.
- T. Svedberg. *On the Modelling and Numerics of Gradient-Regularized Plasticity Coupled to Damage*. Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1999.
- S. Vrech. *Simulación Computacional de Procesos de Falla Localizada basada en Teoría de Gradientes*. Tesis doctoral, Universidad Nacional de Tucumán, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología, Argentina, 2007.
- S. Vrech y G. Etse. Geometrical localization analysis of gradient-dependent parabolic drucker-prager elatoplasticity. *International Journal of Plasticity*, 22:943–964, 2005.