

COMPARAÇÃO ENTRE ALGORITMOS NÃO ESTRUTURADOS SIMÉTRICO E ASSIMÉTRICO DE ALTA RESOLUÇÃO NA SOLUÇÃO DE PROBLEMAS AEROESPACIAIS E ANÁLISE DE TÉCNICAS DE ACELERAÇÃO DE CONVERGÊNCIA – PARTE I

Edisson Sávio de Góes Maciel*

* Departamento de Energia Nuclear
Universidade Federal de Pernambuco,
Av. Prof. Luiz Freire, 1000 – Cidade Universitária – Recife – PE – Brasil – CEP 50.740-540
e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br

Palavras-chaves: Algoritmos Não Estruturados, Esquemas Simétrico e Assimétrico de Alta Resolução, Passo no Tempo Variável Espacialmente, Suavização de Resíduo Implícita, Amortecimento de Entalpia, Aumento do Número de CFL.

Resumo. *O presente trabalho visa inicialmente à comparação do esquema numérico de discretização espacial simétrica de Jameson e Mavriplis e operador de dissipação artificial de Mavriplis com o esquema numérico assimétrico de alta resolução de Frink, Parikh e Pirzadeh, ambos explícitos. São resolvidas as equações de Euler em forma conservativa, utilizando uma formulação de volumes finitos e uma discretização espacial não estruturada, em duas dimensões. São estudados os problemas de estado estacionário do escoamento supersônico em torno de uma configuração simplificada do VLS (Veículo Lançador de Satélites Brasileiro) e do escoamento hipersônico em torno da geometria de um corpo rombudo. A marcha no tempo empregou um método de Runge-Kutta. Os resultados obtidos foram satisfatórios, com melhores características de qualidade de solução e de aceleração de convergência encontradas no algoritmo de Jameson e Mavriplis. Posteriormente, este trabalho visa também o estudo de técnicas de aceleração de convergência aplicadas à solução de problemas de estado estacionário. São estudadas as técnicas de passo no tempo variável espacialmente, suavização de resíduo implícita, amortecimento de entalpia e aumento do número de CFL durante o processo iterativo. O algoritmo de Jameson e Mavriplis foi utilizado para realizar as experimentações. As técnicas foram comparadas entre si resolvendo o problema físico do escoamento transônico em torno de um aerofólio NACA 0012, sem ângulo de ataque. Os resultados obtidos demonstraram que a técnica de amortecimento de entalpia foi a que apresentou o maior ganho de convergência.*

1 INTRODUÇÃO

Nas indústrias aeronáutica e aeroespacial, a necessidade de testes práticos em diversos componentes aerodinâmicos de aeronaves e veículos aeroespaciais durante a fase de projeto é limitada pelo alto custo para construção de modelos em escalas e para realizar testes em túneis de vento. Outras dificuldades principais estão relacionadas ao elevado número de testes experimentais requeridos durante a otimização destes modelos. O desenvolvimento da tecnologia de computadores, permitindo a existência de máquinas com processadores de alta velocidade e alta capacidade de armazenamento, tem lançado CFD (do inglês: “Computational Fluid Dynamics”, Dinâmica dos Fluidos Computacional) em direção a um papel significativo em diversos setores da indústria. Tais setores requerem um nível baixo de custos de desenvolvimento experimental e produtos com o desempenho esperado.

Neste contexto, este trabalho apresenta, em primeira análise, alguns algoritmos numéricos usados na comunidade de CFD para resolver as equações de Euler aplicadas a problemas aeronáuticos e aeroespaciais tradicionais. Os problemas físicos do escoamento supersônico em torno de uma configuração simplificada do VLS (Veículo Lançador de Satélites Brasileiro) e do escoamento hipersônico em torno da geometria de um corpo rombudo são estudados segundo uma discretização não estruturada das equações do escoamento.

Um foco de grande pesquisa em CFD é o desenvolvimento de técnicas de aceleração de convergência para obter soluções de problemas de estado estacionário. Tais problemas provêm a grande quantidade de dados aerodinâmicos requeridos para o projeto de veículos aeronáuticos e aeroespaciais: Kutler¹ e Nicola, Tognaccini, Visingardi e Paparone²; entre outros. Técnicas de aceleração de convergência sempre foram grandes objetivos de CFD seguindo o desenvolvimento de códigos de solução para as equações da mecânica dos fluidos. Uma grande quantidade de técnicas foi elaborada e diversos trabalhos buscaram descrever ferramentas computacionais para aceleração de convergência que produzissem códigos mais eficientes e, ao mesmo tempo, menos custosos.

No contexto de ganhos de convergência, uma técnica eficiente que emergiu para cálculos numéricos foi o procedimento “multigrid”. Tal técnica foi inicialmente apresentada para obter soluções de estado estacionário de problemas envolvendo equações diferenciais parciais elípticas (Brandt³) e posteriormente foram extendidas para equações diferenciais parciais hiperbólicas. Alguns trabalhos que utilizaram esta técnica para aceleração de convergência foram: Jameson e Mavriplis⁴ e Mavriplis⁵, entre outros.

Técnicas mais simples e menos custosas para aceleração de convergência de esquemas explícitos e implícitos, quando aplicados à resolução das equações da mecânica dos fluidos, foram também investigadas: passo no tempo variável espacialmente, amortecimento de entalpia, suavização de resíduo e aumento do número de CFL durante o processo iterativo. O passo no tempo variável espacialmente visa à utilização do passo no tempo máximo permitido por um limite de estabilidade local em cada célula do domínio computacional. Este procedimento tem o efeito de assegurar que perturbações são propagadas através de todo o domínio computacional até o limite exterior, em um número de passos no tempo proporcional ao número de intervalos de malha, ou células, entre as fronteiras interna e externa. Alguns trabalhos que utilizaram esta técnica foram: Jameson e Mavriplis⁴ e Long, Khan e Sharp⁶.

A estratégia de amortecimento de entalpia é baseada no fato de que as equações de Euler não são dissipativas e, assim, a entalpia total permanece constante em todo o domínio computacional, na condição de estado estacionário, satisfazendo as equações de conservação de massa e de energia. Devido a este fato, termos forçantes proporcionais à diferença entre a entalpia total local durante o processo de convergência e a entalpia total de escoamento não perturbado são adicionados às equações de conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia, visando acelerar o processo de convergência para uma condição de estado estacionário. Este procedimento foi inicialmente sugerido por Jameson, Schmidt e Turkel⁷. Tal técnica foi aplicada em diversos trabalhos, como por exemplo: Baruzzi, Habashi e Hafez⁸ e Long, Khan e Sharp⁶.

O passo no tempo máximo que pode ser considerado é limitado pela condição de CFL (Courant, Friedrichs e Lewy⁹), que define que o domínio de dependência das equações discretizadas necessita no mínimo conter o domínio de dependência da equação diferencial original. Para atenuar esta restrição, uma suavização de resíduo implícita é desenvolvida para aumentar a estabilidade do esquema. Tal estratégia consistia em determinar um valor médio de resíduo, ponderado pelos valores de resíduo dos vizinhos. Trabalhos que usaram esta técnica foram: Mavriplis¹⁰ e Swanson e Radespiel¹¹.

Outra técnica de aceleração de convergência, mais simples do que as descritas acima, é o aumento do número de CFL durante o processo de convergência para atingir a condição de estado estacionário. Esta técnica consiste em aumentar o número de CFL toda vez que um número prescrito de iterações é alcançado. O usuário determina o número de iterações para aumentar o número de CFL como também o valor do aumento a ser considerado.

Neste trabalho, os esquemas explícitos de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹², este último usando a separação de diferenças de fluxo de Roe¹³, são comparados utilizando uma formulação de volumes finitos, segundo uma base de dados centrada na célula. Esta comparação pretende enfatizar aspectos importantes destes esquemas numéricos nos seguintes tópicos: desempenho computacional, alguns aspectos de qualidade de solução e propriedades de robustez. Além desse estudo, este trabalho também apresenta algumas técnicas de aceleração de convergência geralmente aplicadas na comunidade de CFD. Serão apresentados os melhores resultados obtidos em termos de taxa de convergência e custo computacional para as técnicas em estudo. Tais técnicas são: passo no tempo variável espacialmente, suavização de resíduo implícita, amortecimento de entalpia e aumento do número de CFL. O esquema de Jameson e Mavriplis⁴, em um contexto não estruturado, é usado para gerar resultados numéricos para comparação. Testes foram realizados com a configuração de um aerofólio NACA 0012, envolvendo escoamento transônico. Os resultados indicaram que o amortecimento de entalpia é aparentemente a melhor escolha possível para obter taxas de convergência elevadas e custos computacionais moderados.

Uma discretização não estruturada do domínio de cálculo é freqüentemente recomendada para configurações complexas, devido à facilidade e eficiência com os quais tais domínios podem ser discretizados (Mavriplis¹⁰ e Pirzadeh¹⁴). Contudo, a questão de geração de malhas não estruturadas não será estudada neste trabalho.

2 EQUAÇÕES DE EULER

O movimento fluido é descrito pelas equações de Euler, que expressam a conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia para um meio não viscoso, não condutor de calor e compressível, na ausência de forças externas. Na forma integral e conservativa, estas equações podem ser representadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S (E_e n_x + F_e n_y) dS = 0, \quad (1)$$

em que Q é escrito para um sistema Cartesiano, V é o volume de uma dada célula, n_x e n_y são as componentes do versor normal à cada face de fluxo, S é a área de fluxo e E_e e F_e representam as componentes do vetor de fluxo convectivo. Q, E_e e F_e são representados por:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad E_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{Bmatrix} \quad e \quad F_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

sendo ρ a densidade do fluido; u e v as componentes Cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y, respectivamente; e a energia total por unidade de volume do meio fluido; p a pressão estática do meio fluido. Expressões para os volumes V estão disponíveis em Maciel e Azevedo¹⁵ e Maciel¹⁶.

Em todos os problemas as equações de Euler foram adimensionalizadas em relação à densidade de escoamento não perturbado, ρ_∞ , e à velocidade do som de escoamento não perturbado, a_∞ . Assim, a densidade é adimensionalizada em relação a ρ_∞ , as componentes de velocidade u e v são adimensionalizadas em relação a a_∞ e a pressão e a energia total são adimensionalizadas em relação ao produto $\rho_\infty (a_\infty)^2$. O sistema matricial de equações de Euler é fechado com a equação de estado $p = (\gamma - 1)[e - 0,5\rho(u^2 + v^2)]$, admitindo a hipótese de gás ideal e γ sendo a razão entre calores específicos. A entalpia total é determinada por $h = [\gamma/(\gamma - 1)](p/\rho) + 0,5(u^2 + v^2)$.

3 ALGORITMO DE JAMESON E MAVRIPLIS⁴

As equações de Euler em forma conservativa e integral, segundo uma formulação de volumes finitos, podem ser escritas, sob um contexto não estruturado de discretização espacial (Jameson e Mavriplis⁴, Jameson, Schmidt e Turkel⁷ e Maciel e Azevedo¹⁵), como:

$$d(V_i Q_i)/dt + C(Q_i) = 0, \quad (3)$$

em que $C(Q_i) = \sum_{k=1}^3 [E_e(Q_{i,k}) \Delta y_{i,k} - F_e(Q_{i,k}) \Delta x_{i,k}]$ é a aproximação discreta da integral de fluxo da Eq. (1). Neste trabalho, foi adotado que:

$$Q_{i,k} = 0,5(Q_i + Q_k), \quad \Delta y_{i,k} = y_{n2} - y_{n1} \quad e \quad \Delta x_{i,k} = x_{n2} - x_{n1}, \quad (4)$$

com “i” indicando um dado volume da malha e “k” sendo seu respectivo vizinho; e n1 e n2 representam nós consecutivos do volume “i”, em sentido anti-horário.

A discretização espacial proposta pelos autores é equivalente a um esquema centrado com segunda ordem de precisão, em um contexto de diferenças finitas. A introdução de um operador de dissipação “D” é necessária a fim de garantir a estabilidade numérica na presença, por exemplo, de desacoplamento par-ímpar de soluções e de instabilidades não lineares, como ondas de choque. Então, a Equação (3) é reescrita como:

$$d(V_i Q_i)/dt + [C(Q_i) - D(Q_i)] = 0. \quad (5)$$

A integração temporal é realizada utilizando um método explícito, de segunda ordem, tipo Runge-Kutta de cinco estágios e pode ser representado de forma generalizada por:

$$\begin{aligned} Q_i^{(0)} &= Q_i^{(n)} \\ Q_i^{(k)} &= Q_i^{(0)} - \alpha_k \Delta t_i / V_i [C(Q_i^{(k-1)}) - D(Q_i^{(m)})], \\ Q_i^{(n+1)} &= Q_i^{(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

com $k = 1, \dots, 5$; $m = 0$ até 4; $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/6$, $\alpha_3 = 3/8$, $\alpha_4 = 1/2$ e $\alpha_5 = 1$. De acordo com Swanson e Radespiel¹¹, o operador de dissipação artificial deve ser avaliado apenas nos dois primeiros estágios ($m = 0$, $k = 1$, e $m = 1$, $k = 2$), visando economia de tempo de CPU. Ele é congelado para os estágios remanescentes, explorando os aspectos hiperbólicos destas equações, a fim de assegurar a convergência para a condição de estado estacionário.

3.1 Operador de Dissipação Artificial

O operador de dissipação artificial apresentado neste trabalho é baseado em Mavriplis¹⁰ e possui a seguinte estrutura:

$$D(Q_i) = d^{(2)}(Q_i) - d^{(4)}(Q_i), \quad (7)$$

em que: $d^{(2)}(Q_i) = \sum_{k=1}^3 0,5 \varepsilon_{i,k}^{(2)} (A_i + A_k) (Q_k - Q_i)$, denominado de operador Laplaciano não dividido, fornece estabilidade numérica na presença de ondas de choque; e $d^{(4)}(Q_i) = \sum_{k=1}^3 0,5 \varepsilon_{i,k}^{(4)} (A_i + A_k) (\nabla^2 Q_k - \nabla^2 Q_i)$, denominado operador bi-harmônico, fornece a estabilidade de campo (por exemplo, instabilidades do tipo desacoplamento par-ímpar). Neste último termo, $\nabla^2 Q_i = \sum_{k=1}^3 (Q_k - Q_i)$. Sempre que “k” representar uma célula de contorno especial, denominada célula “fantasma”, sua contribuição em termos de $\nabla^2 Q_k$ é extrapolada do volume vizinho real. Os termos ε são definidos como segue:

$$\varepsilon_{i,k}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX} (v_i, v_k) \text{ e } \varepsilon_{i,k}^{(4)} = \text{MAX} [0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,k}^{(2)})], \quad (8)$$

com $v_i = \sum_{k=1}^3 |p_k - p_i| / \sum_{k=1}^3 (p_k + p_i)$ representando um sensor de pressão empregado para identificar regiões de gradientes elevados. As constantes $K^{(2)}$ e $K^{(4)}$ possuem valores típicos de 1/4 e 3/256, respectivamente. Novamente, sempre que “k” representar uma célula fantasma, é assumido que $v_f = v_i$. Os termos A_i são contribuições do autovalor normal máximo das equações de Euler integrado ao longo de cada face da célula. Estes termos são definidos como:

$$A_i = \sum_{k=1}^3 \left[|u_{i,k} \Delta y_{i,k} - v_{i,k} \Delta x_{i,k}| + a_{i,k} (\Delta x_{i,k}^2 + \Delta y_{i,k}^2)^{0,5} \right], \quad (9)$$

em que $u_{i,k}$, $v_{i,k}$ e $a_{i,k}$ são calculados por média aritmética entre os valores da propriedade associados ao volume “i” e seu respectivo vizinho “k”.

4 ALGORITMO DE FRINK, PARIKH E PIRZADEH¹²

Neste esquema, o vetor de fluxo numérico é calculado utilizando a separação de diferenças de fluxo de Roe^{13,17}. O fluxo que atravessa cada face de célula “k” é calculado usando a fórmula de Roe:

$$F_k = 1/2 \left[F(Q_E) + F(Q_D) - \tilde{A} |Q_D - Q_E|_k \right]. \quad (10)$$

Na Equação (10), Q_D e Q_E são variáveis de estado à direita e à esquerda da interface de fluxo “k”, respectivamente. A matriz \tilde{A} é determinada pela avaliação de $A = \partial F / \partial Q$ com as propriedades do escoamento obtidas pela média de Roe:

$$\tilde{\rho} = \sqrt{\rho_E \rho_D}, \quad \tilde{u} = (u_E + u_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}) \quad \text{e} \quad \tilde{v} = (v_E + v_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}); \quad (11)$$

$$\tilde{h} = (h_E + h_D \sqrt{\rho_D / \rho_E}) / (1 + \sqrt{\rho_D / \rho_E}) \quad \text{e} \quad \tilde{a}^2 = (\gamma - 1) [\tilde{h} - 0,5(\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2)] \quad (12)$$

de tal forma que $F(Q_D) - F(Q_E) = \tilde{A}(Q_D - Q_E)$ é satisfeita exatamente. Introduzindo as matrizes de diagonalização \tilde{T} e \tilde{T}^{-1} e a matriz diagonal de autovalores Λ , a matriz $|\tilde{A}|$ é definida como $|\tilde{A}| = \tilde{T} |\tilde{\Lambda}| \tilde{T}^{-1}$. O termo

$$|\tilde{A}|(Q_D - Q_E) = \tilde{T} |\tilde{\Lambda}| \tilde{T}^{-1} \Delta Q, \quad (13)$$

na fórmula do vetor de fluxo numérico de Roe, pode ser reescrito em termos de três componentes de fluxo, cada um associado a um autovalor distinto:

$$\tilde{T}|\tilde{A}|\tilde{T}^{-1}\Delta Q = |\Delta\tilde{F}_1| + |\Delta\tilde{F}_3| + |\Delta\tilde{F}_4|, \quad (14)$$

em que:

$$|\Delta\tilde{F}_1| = |\tilde{U}| \left\{ \left(\Delta p - \frac{\Delta p}{\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \frac{\tilde{u}^2 + \tilde{v}^2}{2} \end{bmatrix} + \tilde{p} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta u - n_x \Delta U \\ \Delta v - n_y \Delta U \\ \tilde{u} \Delta u + \tilde{v} \Delta v - \tilde{U} \Delta U \end{bmatrix} \right\} \text{ e } |\Delta\tilde{F}_{3,4}| = |\tilde{U} \pm \tilde{a}| \left(\frac{\Delta p \pm \tilde{\rho} \tilde{a} \Delta U}{2\tilde{a}^2} \right) \begin{bmatrix} 1 \\ \tilde{u} \pm n_x \tilde{a} \\ \tilde{v} \pm n_y \tilde{a} \\ \tilde{h} \pm \tilde{U} \tilde{a} \end{bmatrix}, \quad (15)$$

com $\tilde{U} = \tilde{u}n_x + \tilde{v}n_y$ e $\Delta U = n_x \Delta u + n_y \Delta v$.

A integração temporal é realizada utilizando um método explícito de Runge-Kutta, segunda ordem de precisão e cinco estágios, descrito pela Eq. (6).

5 TÉCNICAS DE ACELERAÇÃO DE CONVERGÊNCIA

5.1 Passo no Tempo Variável Espacialmente

A idéia básica deste procedimento consiste em manter constante o número de CFL em todo o domínio de cálculo, permitindo, assim, o uso de passos no tempo apropriados para cada região específica da malha durante o processo de convergência. Desta forma, e de acordo com a definição do número de CFL, é possível escrever:

$$\Delta t_{célula} = CFL(\Delta s)_{célula} / c_{célula}, \quad (16)$$

em que CFL é o número de “Courant-Friedrichs-Lewy” para prover estabilidade numérica ao esquema; $c_{célula} = \left[(u^2 + v^2)^{0,5} + a \right]_{célula}$ é a velocidade característica máxima de propagação de informações no domínio de cálculo; e $(\Delta s)_{célula}$ é um comprimento característico de transporte de informações. Em um contexto de volumes finitos, $(\Delta s)_{célula}$ é escolhido como o menor valor encontrado entre a menor distância de centróides, envolvendo a célula “i” e um vizinho “k”, e o menor comprimento de lado da célula.

5.2. Suavização de Resíduo Implícita

A técnica de suavização de resíduo implícita empregada neste trabalho segue o artigo de Jameson e Mavriplis⁴. O resíduo, neste contexto, é inicialmente definido como segue:

$$R(Q) = I/V [C(Q) - D(Q)]. \quad (17)$$

A suavização é realizada substituindo o resíduo associado com uma dada malha computacional pelo resíduo médio \bar{R} , obtido pela solução da equação:

$$\bar{R} - \varepsilon \nabla^2 \bar{R} = R, \quad (18)$$

em que para um dado esquema com propriedades físicas definidas no centróide da célula,

$$\nabla^2 \bar{R} = \sum_{k=1}^{ntc} (\bar{R}_k - \bar{R}), \quad (19)$$

com “k” sendo o índice da célula vizinha da respectiva célula em estudo e “ntc” é o número total de células vizinhas. A Equação (17) representa um sistema diagonal dominante e devido a seu custo elevado para solução, Jameson e Mavriplis⁴ sugerem que algumas iterações com o método de Jacobi são suficientes para obter a suavização de resíduo. O algoritmo resultante para solução da Eq. (17) é escrito como:

$$(1 + ntc \times \varepsilon) \bar{R}^{(m)} = R + \varepsilon \sum_{k=1}^{ntc} \bar{R}_k^{(m-1)}, \quad (20)$$

em que $\bar{R}^{(0)} = R$. Para problemas de estado estacionário, Jameson e Mavriplis⁴ sugerem que somente duas iterações são necessárias para solucionar a Eq. (19). Estes autores também sugerem que a suavização de resíduo implícita seja realizada em estágios alternados do método de integração temporal com o propósito de reduzir custos computacionais. Valores de ε variam entre 0,0 e 1,0, sendo 0,5 o valor sugerido por Jameson e Mavriplis⁴.

5.3. Amortecimento de Entalpia

A técnica de amortecimento de entalpia sugerida no trabalho de Jameson, Schmidt e Turkel⁷ é aplicada às equações de Euler para acelerar o processo de obtenção de soluções de estado estacionário. Nesta técnica, termos forçantes proporcionais à diferença entre a entalpia total local e a entalpia total de escoamento não perturbado são adicionados a cada uma das equações de conservação. Neste trabalho, será empregado este procedimento.

O sistema de equações de conservação é escrito como:

$$\partial/\partial t \int_V Q dV + \int_S (E_e n_x + F_e n_y) dS - \int_V Z dV = 0, \quad (21)$$

em que $Z = -(H - H_\infty) \beta [\rho \quad \rho u \quad \rho v \quad \rho H]^t$, sendo β um coeficiente especificado pelo usuário. Os termos forçantes não alteram a solução de estado estacionário se o problema físico satisfaz a condição de entalpia total constante.

Em esquemas simétricos, o operador de dissipação artificial tende a introduzir variações na entalpia total, produzindo um efeito não conservativo para esta propriedade. Com o propósito de eliminar tal efeito numérico e permitir, assim, a aplicabilidade da técnica de amortecimento de entalpia, Mavriplis⁵ sugere que a dissipação artificial provida pelo operador na equação da energia seja imposta utilizando como variável conservada a entalpia total por unidade de volume “ ρH ”, garantindo assim que a entalpia total permaneça constante.

5.4. Aumento do Número de CFL

Este procedimento consiste em aumentar o número de CFL durante o processo de

convergência toda vez que um determinado número de iterações seja realizado pelo código de solução. O usuário especifica o número de iterações para aumentar o número de CFL, bem como o aumento em seu valor.

6 CONDIÇÕES INICIAS E DE CONTORNOS

6.1 Condições Iniciais

Para todos os problemas físicos estudados neste trabalho, valores de escoamento não perturbado são adotados para todas as propriedades como condição inicial, em todo o domínio de cálculo (Jameson e Mavriplis⁴). Por isso, o vetor de variáveis conservadas é definido como:

$$Q_i = \left\{ 1 \quad M_\infty \cos \alpha \quad M_\infty \sin \alpha \quad \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + 0,5M_\infty^2 \right\}^T, \quad (22)$$

sendo M_∞ o número de Mach de escoamento não perturbado e α o ângulo de ataque do escoamento.

6.2 Condições de Contornos

As condições de contorno são basicamente de quatro tipos: parede sólida, entrada, saída e continuidade. Estas condições de contornos são implementadas, como comentado anteriormente, em células fantasmas.

(a) Condição de parede: Impõe a condição de tangência do escoamento à parede sólida. Esta condição é satisfeita considerando a componente de velocidade da célula fantasma tangente à parede como sendo igual à respectiva componente de velocidade de sua célula real vizinha. Da mesma forma, a componente de velocidade da célula fantasma normal à parede é igualada em valor, mas com sinal oposto, à respectiva componente de sua célula real vizinha.

O gradiente de pressão do fluido normal à parede é assumido ser igual a zero segundo uma formulação não viscosa. A mesma hipótese é aplicada para o gradiente de temperatura normal à parede. Destas considerações, a densidade e a pressão do volume fantasma são extrapoladas dos respectivos valores de seu volume real vizinho (extrapolação de ordem zero). A energia total é obtida da equação de estado para o gás ideal.

(b) Condição de entrada:

(b.1) Escoamento subsônico: Três propriedades são especificadas e uma é extrapolada, baseado na análise de propagação de informações ao longo de direções características no domínio de cálculo (Maciel e Azevedo^{18,19}). Em outras palavras, para escoamento subsônico, três direções características de propagação de informações têm sentidos para dentro do domínio computacional e devem ser fixadas. Somente a direção característica associada à velocidade “(q_n-a)” não pode ser especificada e deve ser determinada por informação interior ao domínio de cálculo. Para os problemas estudados, a pressão foi a variável extrapolada do volume real vizinho. Densidade e componentes de velocidade tiveram seus valores determinados pelo escoamento não perturbado. A energia total por unidade de volume do

fluido é determinada pela equação de estado do gás ideal.

(b.2) Escoamento supersônico: Todas as variáveis são fixadas com os valores de escoamento não perturbado, na entrada do contorno.

(c) Condição de saída:

(c.1) Escoamento subsônico: Três direções características de propagação de informações têm sentidos para fora do domínio computacional, devendo, então, serem extrapoladas a partir de informações do interior. A direção característica associada à velocidade “ $(q_n - a)$ ” deve ser especificada, pois penetra no domínio de cálculo. Neste caso, a pressão do volume fantasma é especificada por seu valor inicial. Densidade e componentes de velocidade são extrapoladas e a energia total obtida pela equação de estado do gás ideal.

(c.2) Escoamento supersônico: Todas as variáveis são extrapoladas do domínio interior devido ao fato de todas as quatro direções características de propagação de informações das equações de Euler estarem saindo do domínio de cálculo e, com isso, nada podendo ser fixado.

(d) Condição de continuidade: Para o problema físico do aerofólio, é necessário que a continuidade do escoamento no bordo de fuga seja satisfeita (condição de Kutta). Esta condição é garantida impondo que o vetor de variáveis conservadas seja igual tanto para o intradorso como para o extradorso.

7 RESULTADOS – PARTE 1

Testes foram realizados em um microcomputador CELERON-1,2GHz e 128 Mbytes de memória RAM. Resultados convergidos ocorreram para 4 ordens de redução no valor do resíduo máximo. O valor usado para γ foi 1,4. Para todos os problemas, o ângulo de ataque foi adotado igual a $0,0^\circ$.

7.1 Problema Físico do VLS

Neste problema físico, uma malha gerada algebricamente de 253×70 pontos, ou constituída de 34.776 volumes triangulares e 17.710 nós, foi utilizada. Não foi implementado qualquer estiramento na malha. O número de Mach de escoamento não perturbado adotado para a simulação foi 4,0, caracterizando um regime de escoamento supersônico. O esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁴ atingiu a solução de estado estacionário em 978 iterações, utilizando um número de CFL de 0,9. O esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² utilizou um número de CFL igual a 0,6 e o número total de iterações para a convergência foi de 3.037.

As Figuras 1 e 2 exibem os contornos de pressão obtidos pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². O campo de pressão obtido pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴ é mais severo do que o obtido pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². Além disso, os contornos de pressão são mais simétricos na solução apresentada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴.

As Figuras 3 e 4 exibem os contornos de número de Mach obtidos pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². É possível notar que os contornos de número de Mach são mais simétricos na solução gerada pelo esquema de Jameson e

Mavriplis⁴, com comportamento semelhante ao apresentado nos contornos de pressão. Além disso, o campo de número de Mach é mais intenso na solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴.

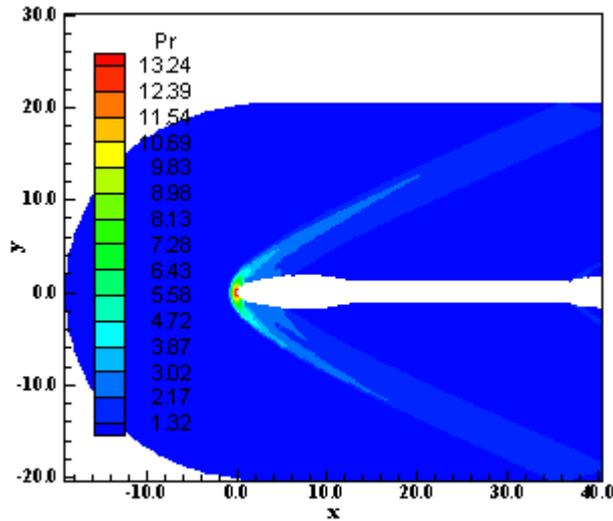


Figura 1. Campo de pressão (JM⁴).

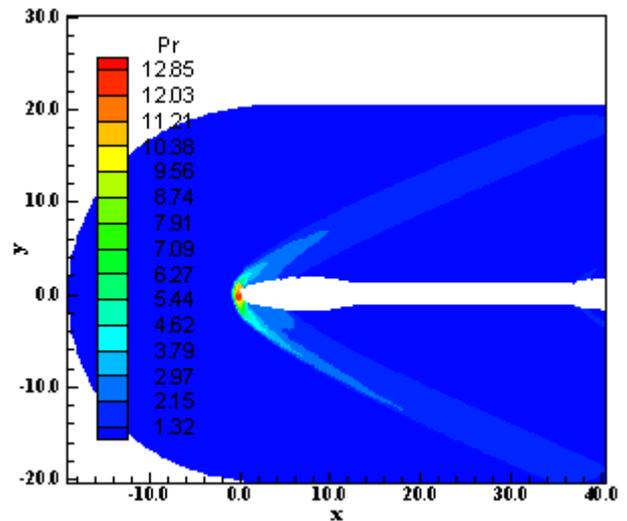


Figura 2. Campo de pressão (FPP¹²).

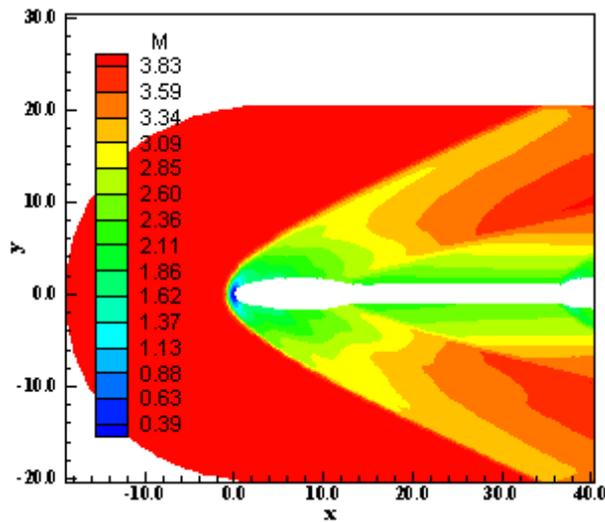


Figura 3. Campo de No. de Mach (JM⁴).

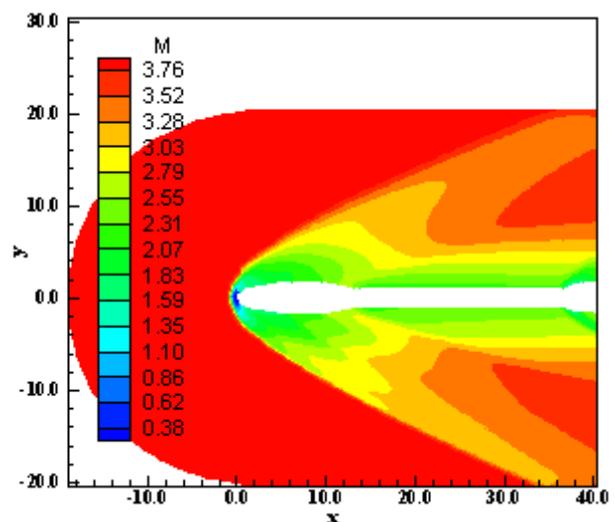


Figura 4. Campo de No. de Mach (FPP¹²).

As Figuras 5 e 6 exibem a distribuição de $-C_p$ em torno desta configuração do VLS. As soluções apresentadas pelos algoritmos são aproximadamente iguais, evidenciando as qualidades do esquema de alta resolução de Frink, Parikh e Pirzadeh¹², mesmo tendo apenas primeira ordem de precisão espacial.

O custo computacional do esquema de Jameson e Mavriplis⁴ foi calculado em 0,0001438s, enquanto o do esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² foi estimado em 0,0001903s. Ou seja, o esquema de Jameson e Mavriplis⁴ é cerca de 24,4% mais barato do que o esquema de Frink,

Parikh e Pirzadeh¹².

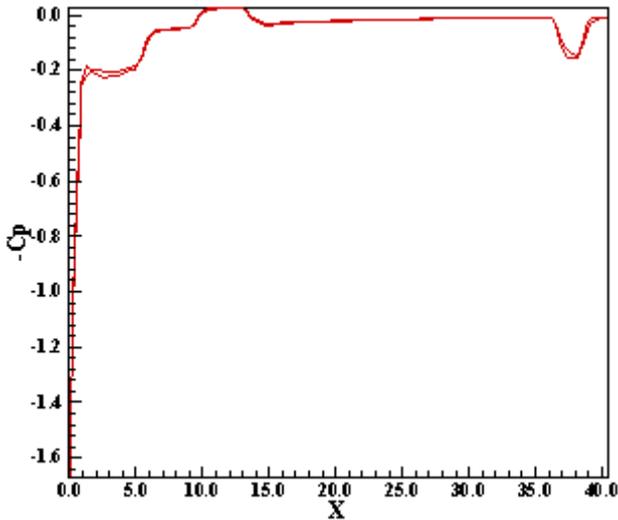


Figura 5. Distribuição de $-C_p$ (JM^4).

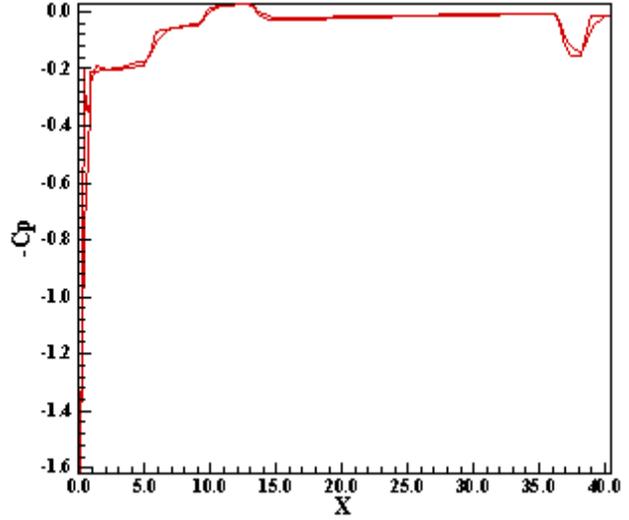


Figura 6. Distribuição de $-C_p$ (FPP^{12}).

7.2 Problema Físico do Corpo Rombudo

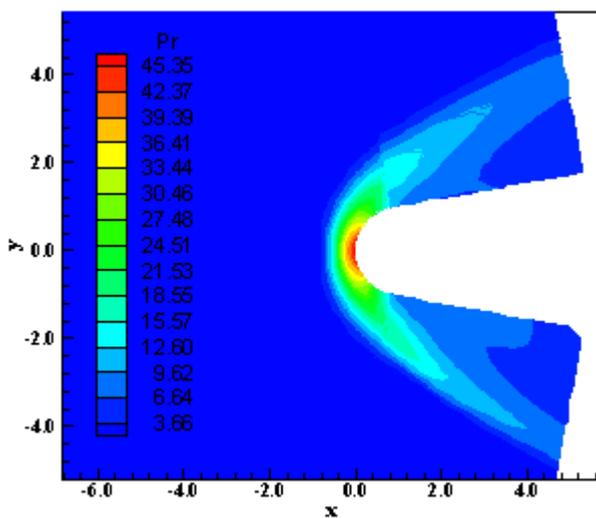


Figura 7. Campo de pressão (JM^4).

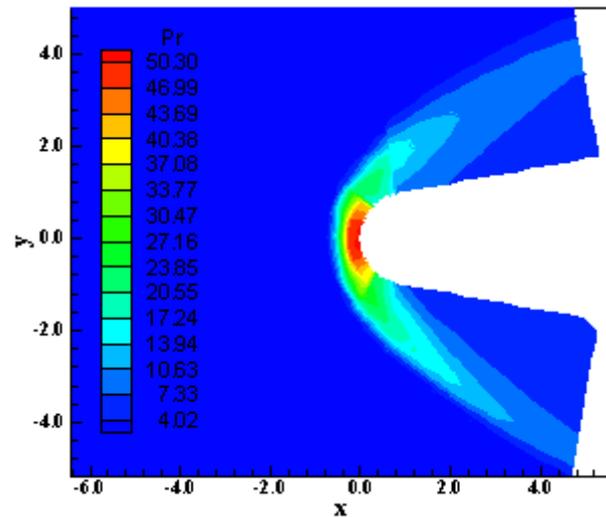


Figura 8. Campo de pressão (FPP^{12}).

Para o problema físico do corpo rombudo foi utilizada uma malha gerada algebricamente de 103×70 pontos ou constituída de 14.076 volumes triangulares e 7.210 nós. O número de Mach de escoamento não perturbado adotado para a simulação foi 8,0, caracterizando um regime de escoamento hipersônico. O esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁴ atingiu a solução de estado estacionário em 497 iterações, utilizando um número de CFL de 1,3. O esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² utilizou um número de CFL igual a 0,7 e o número

total de iterações para a convergência foi de 3.242.

As Figuras 7 e 8 exibem os contornos de pressão gerados pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². O campo de pressão gerado pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² é mais severo do que o gerado pelo esquema de Jameson e Mavriplis (1986). Ambas as soluções pecam pela falta de simetria.

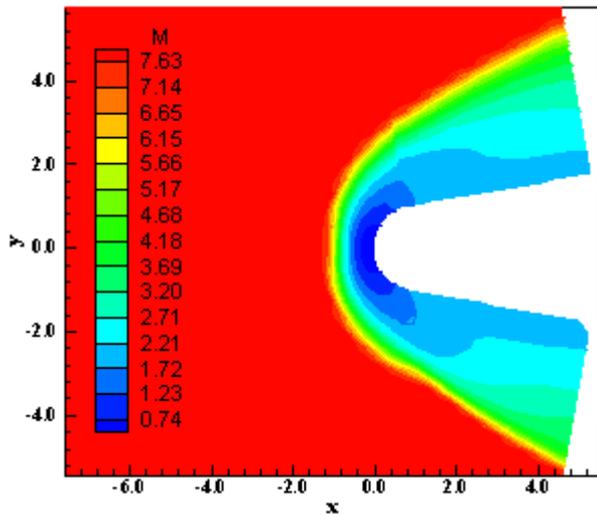


Figura 9. Campo de No. de Mach (JM⁴).

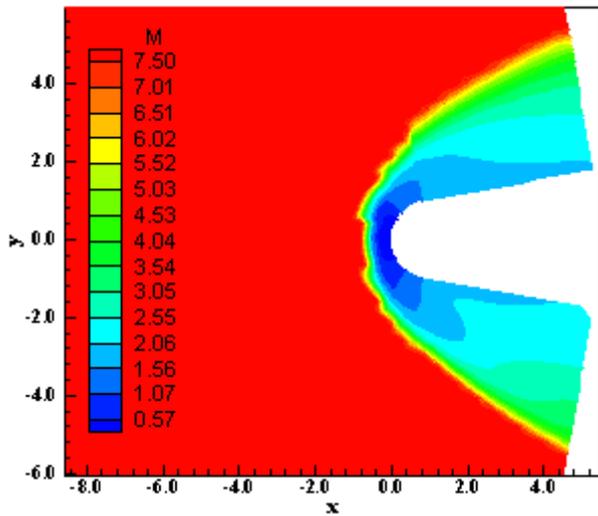


Figura 10. Campo de No. de Mach (FPP¹²).

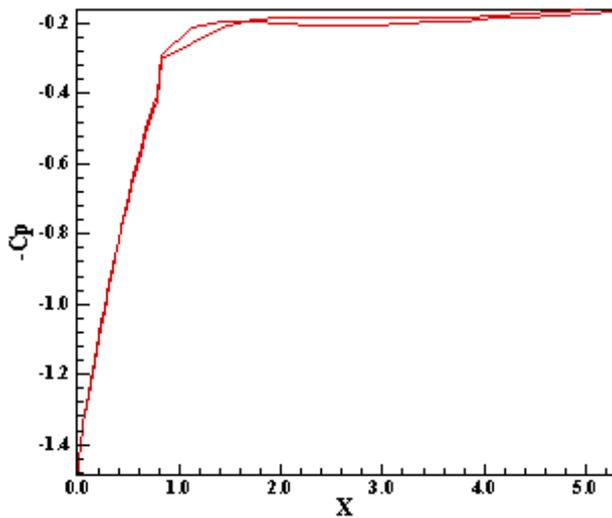


Figura 11. Distribuição de -Cp (JM⁴).

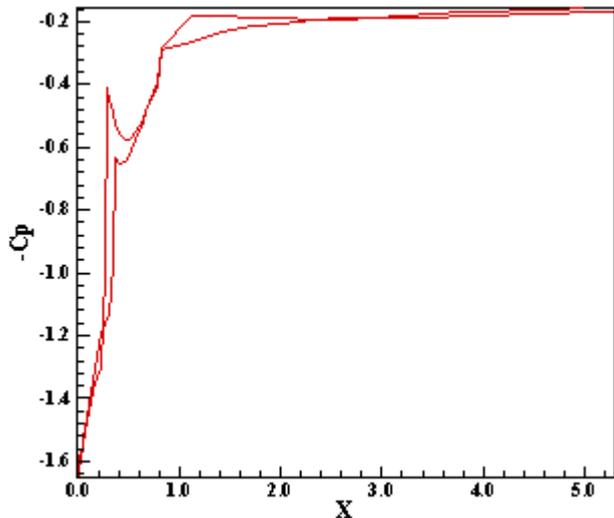


Figura 12. Distribuição de -Cp (FPP¹²).

As Figuras 9 e 10 exibem os contornos de número de Mach para este problema, gerados pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². Claramente a solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴ é mais simétrica do que a gerada pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². O campo de número de Mach também é mais intenso na solução

gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴.

As Figuras 11 e 12 exibem a distribuição do negativo do coeficiente de pressão em função do comprimento do corpo rombudo. A solução gerada pelo esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² apresenta um choque mais intenso em $x = 0$, seguido de uma redução brusca no valor de pressão até um pico em $x = 0,4\text{m}$, tanto no intradorso quanto no extradorso, uma recuperação de pressão pequena e depois a redução mais suave para o patamar $C_p = 0,2$. A solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴ apresenta um choque menos intenso e uma redução suave para o valor $C_p = 0,2$. Como não existe motivo para o surgimento dos picos na solução de Frink, Parikh e Pirzadeh¹², é constatado, então, um erro do algoritmo. Outros estudos foram realizados com este esquema e resultados melhores foram obtidos. Contudo, neste problema específico, o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² apresenta este erro numérico.

8 RESULTADOS – PARTE 2

8.1 Problema Físico do Aerofólio

Para este problema físico foi utilizada uma malha de tipologia “O” com 49×100 pontos ou constituída de 9.504 volumes triangulares e 4.900 nós, em torno de um aerofólio NACA 0012. Foi utilizado um estiramento exponencial de 5% na direção normal à superfície do aerofólio. As fronteiras de entrada e saída do escoamento foram posicionadas a 10,0 cordas do bordo de ataque do aerofólio.

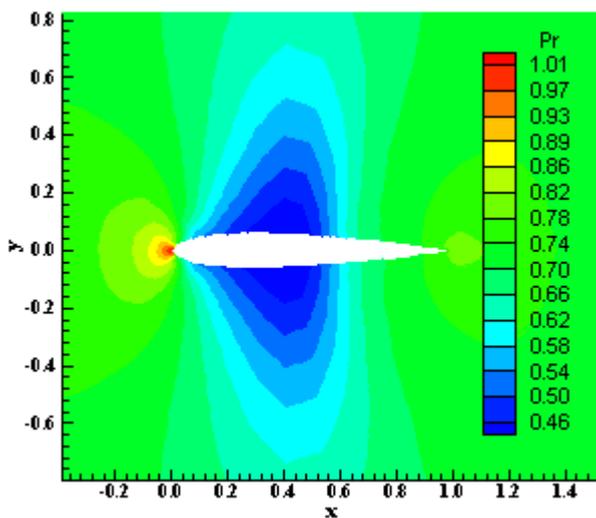


Figura 13. Campo de pressão.

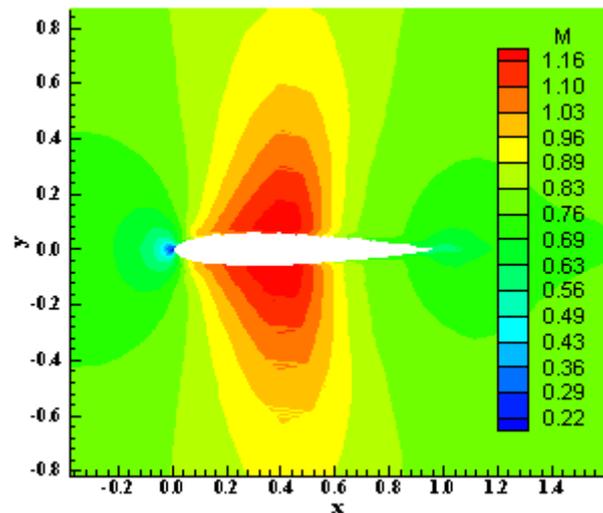


Figura 14. Campo de nº de Mach.

O número de Mach de escoamento não perturbado adotado para a simulação foi 0,8, caracterizando um regime de escoamento transônico. Um número de CFL = 0,7 foi utilizado pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁴, com passo no tempo constante, gerando convergência em 6.199 iterações.

As Figuras 13 e 14 exibem os contornos de pressão e de número de Mach e as Figs. 15 e 16 exibem a distribuição de $-C_p$ em torno do aerofólio e a história de convergência do algoritmo, respectivamente. O custo computacional do algoritmo é de 0,0000186s. Como pode ser observado na Fig. 15, o choque, tanto no intradorso como no extradorso, ocorre em aproximadamente $X = 0,7m$ ou 70% da corda. Este ponto, onde ocorre a transição do escoamento supersônico para o subsônico, não está muito claro devido ao número pequeno de pontos sobre a superfície do aerofólio. Contudo, a transição ainda é observada nesta figura. Uma transição mais bem definida pode ser observada com o uso de maior número de pontos sobre a superfície do aerofólio. Mesmo com a transição não tão clara, a dificuldade na passagem do escoamento supersônico para subsônico pode ser constatada observando o número de iterações para a convergência, mais de 5.000 iterações, e pelas oscilações no histórico de convergência.

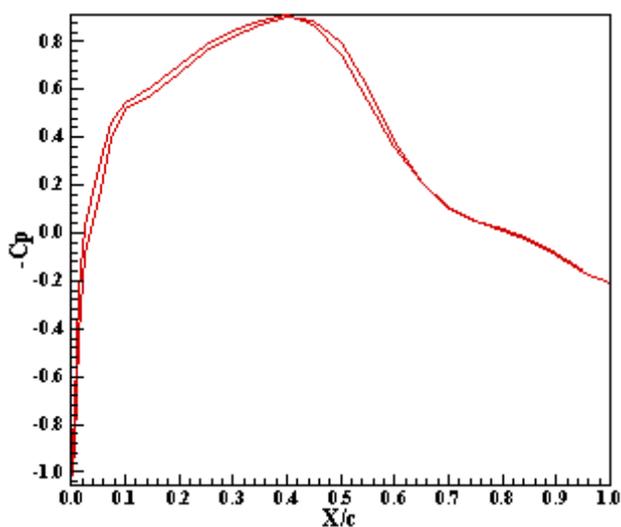


Figura 15. Distribuição de $-C_p$.

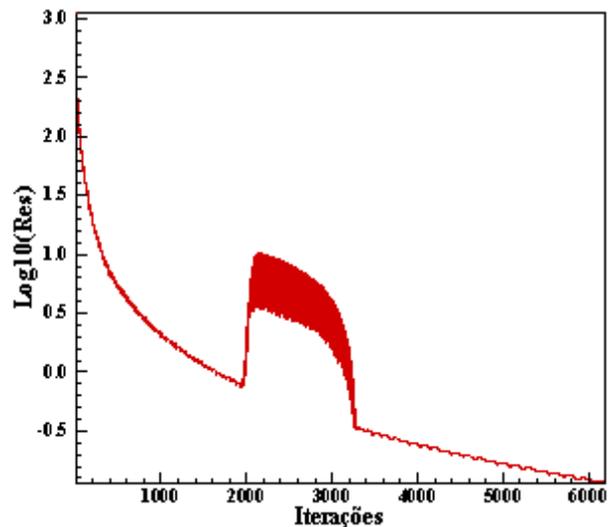


Figura 16. História de convergência.

8.2 Passo no Tempo Variável Espacialmente

O passo no tempo variável espacialmente acelerou o processo de convergência do algoritmo de Jameson e Mavriplis⁴. Foi utilizado um número de CFL = 0,5, menor do que o utilizado no caso do passo de tempo constante, e a convergência ocorreu em 4.920 iterações, com um custo computacional de 0,0000558s. O valor de CFL = 0,5 foi o máximo permitido pela técnica de passo no tempo variável espacialmente. Este custo é cerca de 200% mais caro do que o obtido com o passo no tempo constante, sem técnica de aceleração de convergência. O ganho em termos de iterações para a convergência é de 20,6%. Ou seja, o custo computacional é alto, mas existe um ganho de convergência significativo.

8.3 Suavização de Resíduo Implícita

A técnica de suavização de resíduo implícita foi empregada para acelerar a convergência

do esquema de Jameson e Mavriplis⁴. O procedimento para utilizar esta técnica consistiu em manter constante o passo no tempo e realizar a suavização de resíduos nos estágios ímpares da integração temporal.

O número de CFL utilizado foi 0,7, mantido constante durante os experimentos numéricos. A Tabela 1 exibe os valores de ε utilizados e o número de iterações para convergência. O melhor resultado ocorreu para $\varepsilon = 0,18$, apresentando convergência em 4.686 iterações.

O custo computacional desta técnica foi de 0,0000581s, o que corresponde a cerca de 212,4% mais caro do que o uso do passo no tempo constante. O ganho computacional, levando em consideração o melhor desempenho, conduz a um ganho de 24,4%, o que é melhor do que o ganho do passo no tempo variável espacialmente, as custas de um maior tempo de CPU.

Tabela 1. Valores de ε e respectivas iterações para convergência.

Valor de ε :	Iterações para convergência:	Valor de ε :	Iterações para convergência:
0,10	5.218	0,17	4.774
0,15	4.874	0,18	4.686

8.4 Amortecimento de Entalpia

A técnica de amortecimento de entalpia foi também aplicada visando aumentar a razão de convergência do esquema de Jameson e Mavriplis⁴. O passo no tempo foi mantido constante, com um número de CFL = 0,7 utilizado nas simulações. A Tabela 2 indica valores de β com o respectivo número de iterações para atingir a condição de estado estacionário. Valores de β variaram de 0,1 até 1,0. O máximo valor de 1,0 para este parâmetro foi determinado pela condição de não alterar os campo de pressão e de número de Mach significativamente. Embora valores de β maiores pudessem ser utilizados, os contornos de pressão e de número de Mach sofriam consideráveis modificações.

Tabela 2. Valores de β e respectivas iterações para convergência.

Valor de β :	Iterações para convergência:	Valor de β :	Iterações para convergência:
0,10	5.882	0,60	4.768
0,20	5.587	0,70	4.549
0,30	5.311	0,80	4.429
0,40	5.157	0,90	4.307
0,50	4.914	1,00	4.195

O custo computacional desta técnica é de 0,0000431s, sendo cerca de 131,7% mais caro do que o custo com passo no tempo constante. O ganho computacional em termos de aceleração de convergência foi de 32,3%, em relação a melhor convergência, superior às duas técnicas

iniciais. Um fator limitante desta técnica consiste no fato de só poder ser empregada na solução das equações de Euler, caso em que a entalpia total permanece constante em todo o domínio computacional.

8.5 Aumento de CFL

A última técnica a ser escolhida para análise não proporcionou resultados convergidos; ou melhor, a idéia de aumentar o número de CFL a cada 500 iterações, 1.000 iterações, 2.000 iterações e mesmo 3.000 iterações resultou em divergência do algoritmo. Este fato limita o uso desta técnica a problemas em que a convergência é mais fácil. O caso do aerofólio é mais crítico porque existe um choque que se forma a 40% do bordo de ataque e o regime de escoamento é transônico, o que conduz a uma maior dificuldade do algoritmo em tratar as informações que se propagam no domínio de cálculo.

9 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresentou, em primeiro plano, as características computacionais dos esquemas numéricos de Jameson e Mavriplis⁴ e de Frink, Parikh e Pirzadeh¹², ambos no contexto de uma discretização não estruturada do domínio de cálculo, esquemas explícitos, integração temporal utilizando um método de Runge-Kutta de cinco estágios e apresentando segunda e primeira ordem de precisão espacial, respectivamente. Um passo no tempo variável espacialmente foi utilizado a fim de acelerar a convergência para a solução de estado estacionário dos problemas físicos do escoamento supersônico em torno de uma configuração simplificada do VLS e do escoamento hipersônico em torno de um corpo rombudo.

Os resultados apresentados neste trabalho evidenciaram o esquema de Jameson e Mavriplis⁴ como apresentando melhores características de eficiência e de qualidade de solução em comparação com o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹². Embora o esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh¹² seja de primeira ordem de precisão, as soluções apresentadas neste trabalho evidenciaram boa qualidade em comparação com o esquema de Jameson e Mavriplis⁴.

O esquema de Frink, Parikh e Pirzadeh⁴ apresentou um custo computacional cerca de 32,3% maior do que o esquema de Jameson e Mavriplis⁴, o que limita sua utilização embora, como mencionado acima, suas soluções sejam de boa qualidade.

Em segundo plano, foram apresentadas quatro técnicas para aceleração de convergência do esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁴, no contexto de uma discretização não estruturada das equações de Euler. Inicialmente foi apresentada a solução com o uso do passo no tempo constante sem uso de técnicas de aceleração de convergência. Posteriormente, as técnicas foram aplicadas, considerando sempre o passo no tempo constante para que pudesse ocorrer a comparação com os resultados iniciais. Foi analisado o problema físico do escoamento transônico em torno de um aerofólio NACA 0012. Este problema apresenta uma dificuldade maior para convergência, pois existe um choque que se forma e existe a transição de escoamento subsônico para supersônico.

Os experimentos numéricos demonstraram que a técnica de amortecimento de entalpia é a

que apresenta melhor relação custo-benefício das que geraram resultados convergidos. Infelizmente a técnica de aumento de CFL propiciou a divergência do algoritmo de cálculo, não possibilitando, assim, a averiguação de sua potencialidade. Ao mesmo tempo, isto demonstra sua maior limitação para problemas físicos mais complexos.

O ganho de 32,3% da técnica de amortecimento de entalpia é significativo mesmo às custas de um gasto maior de tempo de CPU do que se fosse utilizado o passo no tempo constante sem técnica de aceleração. Em segundo lugar ficou a técnica de suavização de resíduo implícita, com ganho de 24,4% e em terceiro a técnica de passo no tempo variável espacialmente, com ganho de 20,6%. Todas as três técnicas que apresentaram soluções convergidas possuem um certo grau de empirismo, quer seja na escolha do CFL inicial, quer seja na escolha dos parâmetros ε ou β . A escolha fica a cargo do usuário. A técnica de amortecimento de entalpia possui a limitação de só poder ser aplicada às equações potencial ou de Euler.

10 REFERÊNCIAS

- [1] P. Kutler, “A Perspective of Theoretical and Applied Computational Fluid Dynamics”, *AIAA Journal*, Vol. 23, No. 3, pp. 328-341 (1985).
- [2] C. Nicola, R. Tognaccini, P. Visingardi e L. Paparone, “Progress in the Aerodynamic Analysis of Inviscid Supersonic Flow Fields around Complex Aircraft Configurations”, *AIAA Paper 94-1821-CP* (1994).
- [3] A. Brandt, “Guide to Multigrid Development”, *Lecture Notes in Mathematics*, Vol. 960, Springer-Verlag, Berlin, pp. 220-312 (1981).
- [4] A. Jameson e D. J. Mavriplis, “Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh”, *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 611-618 (1986).
- [5] D. J. Mavriplis, “Multigrid Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on Unstructured Triangular Meshes”, *AIAA Journal*, Vol. 26, No. 7, pp. 824-831 (1988).
- [6] L. N. Long, M. N. S. Khan e H. T. Sharp, “Massively Parallel Three-Dimensional Euler / Navier-Stokes Method”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 5, pp. 657-666 (1991).
- [7] A. Jameson, W. Schmidt e E. Turkel, “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes”, *AIAA Paper 81-1259* (1981).
- [8] G. S. Baruzzi, W. G. Habashi e M. M. Hafez, “Finite Element Solutions of the Euler Equations for Transonic External Flows”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 11, pp. 1886-1893 (1991).
- [9] R. Courant, K. O. Friedrichs e H. Lewy, “Ueber Die Differenzgleichungen Der Mathematischen Physik”, *Mathematical Annual*, Vol. 100, p. 32 (1928).
- [10] D. J. Mavriplis, “Accurate Multigrid Solution of the Euler Equations on Unstructured and Adaptive Meshes”, *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 2, pp. 213-221 (1990).
- [11] R. C. Swanson e R. Radespiel, “Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 5, pp. 697-703 (1991).
- [12] N. T. Frink, P. Parikh e S. Pirzadeh, “Aerodynamic Analysis of Complex Configurations

- Using Unstructured Grids”, *AIAA 91-3292-CP* (1991).
- [13] P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372 (1981).
- [14] S. Pirzadeh, “Structured Background Grids for Generation of Unstructured Grids by Advancing Front Method”, *AIAA Paper 91-3233-CP* (1991).
- [15] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Solution of Aerospace Problems Using Structured and Unstructured Strategies”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XXIII, No. 2, pp. 155-178 (2001).
- [16] E. S. G. Maciel, “Simulação Numérica de Escoamentos Supersônicos e Hipersônicos Utilizando Técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional”, *Tese de Doutorado*, ITA, CTA, São José dos Campos, SP, Brasil, 258 p. (2002).
- [17] P. L. Roe, “Characteristic Based Schemes for the Euler Equations”, *Annual Review of Fluid Mechanics*, Vol. 18, pp. 337-365 (1986).
- [18] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Algoritmos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do 14th Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica* (disponível em CD-ROM), Bauru, SP, Brasil (1997).
- [19] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Esquemas Implícitos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XX, No. 3, pp. 353-380 (1998).

11 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos sob o no. de processo 304318/2003-5, DCR/1F.