

ESTUDO DE ESQUEMAS NUMÉRICOS SIMÉTRICO E ASSIMÉTRICO DE ALTA RESOLUÇÃO NA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS TRANSÔNICO E SUPERSÔNICO - PARTE I

Edisson Sávio de Góes Maciel *

* Departamento de Energia Nuclear
Universidade Federal de Pernambuco
Av. Prof. Luiz Freire, 1000 – Cidade Universitária – Recife – PE- Brasil – CEP 50740-540
e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br

Palavras-chaves: Esquemas Simétrico e Assimétrico de Alta Resolução, Equações de Euler, Volumes Finitos, Duas Dimensões, escoamentos Transônico e Supersônico.

Resumo. *O presente trabalho visa à comparação de um esquema numérico de discretização espacial simétrica e operador de dissipação artificial com um esquema numérico assimétrico de alta resolução. São estudados o algoritmo explícito de Jameson e Mavriplis, no contexto de uma discretização espacial simétrica e segunda ordem de precisão espacial, e o algoritmo também explícito de Harten, no contexto de uma discretização espacial assimétrica, utilizando o conceito de separação de diferenças de fluxos, com igual ordem de precisão espacial. São resolvidas as equações de Euler em forma conservativa, empregando uma formulação de volumes finitos e discretização espacial estruturada, em duas dimensões. São estudados os problemas físicos de estado estacionário do escoamento transônico em torno de um aerofólio NACA 0012 e do escoamento supersônico em torno da geometria de corpo rombudo, ambos sem ângulo de ataque. A marcha no tempo empregada no esquema de Jameson e Mavriplis foi o método de Runge-Kutta com segunda ordem de precisão, enquanto o algoritmo de alta resolução utilizou uma integração no tempo baseada no método de separação temporal. Os resultados obtidos apresentaram boa comparação entre os algoritmos estudados. Em particular, para o problema físico do aerofólio, foi percebido que a distribuição de contornos de número de Mach apresenta situação menos crítica para o esquema assimétrico do que para o esquema simétrico, não sendo detectadas regiões de escoamento supersônico. O campo de pressão para este problema também apresenta diferenças sensíveis. O problema do corpo rombudo apresenta uma melhor proximidade de resultados.*

1 INTRODUÇÃO

Algoritmos assimétricos de alta resolução têm sido desenvolvidos desde 1959, visando melhorar a qualidade da solução gerada, produzindo soluções mais precisas e códigos mais robustos. Os esquemas assimétricos de alta resolução podem ser do tipo separação de vetores de fluxo ou do tipo separação de diferenças de fluxo. No primeiro caso, algoritmos mais robustos são produzidos, enquanto maior precisão é obtida no segundo caso. Foram realizados vários estudos com algoritmos de alta resolução na literatura internacional.

Godunov¹ supôs que dados iniciais poderiam ser substituídos por um conjunto de estados constante por partes com descontinuidades em $\{x_{i+1/2}\}$. Ele encontrou a solução exata para este problema de Riemann simplificado. Depois de algum passo no tempo Δt , ele substituiu a solução exata por uma nova aproximação constante por partes, enquanto preservando propriedades integrais da variável conservada u .

Roe² apresentou um trabalho em que enfatizava que vários esquemas numéricos para solução das equações de conservação hiperbólica eram baseados em explorar a informação obtida na solução de uma seqüência de problemas de Riemann. Foi verificado que nos esquemas existentes a maior parte desta informação era degradada e que somente certos aspectos da solução eram salvos. Foi demonstrado que a informação poderia ser preservada construindo uma matriz com uma certa “propriedade U ”. Uma vez tendo construído esta matriz, seus autovalores podiam ser considerados como velocidades de onda do problema de Riemann e as projeções de U_E-U_D sobre os autovetores são os saltos que ocorrem entre estados intermediários.

Harten³ desenvolveu uma classe de novos esquemas de diferenças finitas, explícitos e com segunda ordem de precisão espacial para cálculo de soluções fracas das leis de conservação hiperbólicas. Estes esquemas altamente não lineares eram obtidos por aplicar um esquema de primeira ordem não oscilatório a uma apropriada função de fluxo modificada. Os esquemas de segunda ordem assim derivados alcançavam alta resolução enquanto preservavam a robustez do esquema de primeira ordem não oscilatório original.

Liou e Steffen⁴ proporam um novo esquema de separação de vetores de fluxo. Eles afirmaram que seu esquema era simples e sua precisão equivalia e, em alguns casos, superaria a precisão do esquema de Roe² nas soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes. O esquema era robusto e convergia tão rapidamente quanto o esquema de Roe². Eles proporam a definição aproximada de um número de Mach de advecção na face da célula, usando valores de suas células vizinhas via velocidades características associadas. Este número de Mach de interface era então usado para determinar a extrapolação assimétrica das quantidades convectivas.

Esquemas simétricos com um operador de dissipação artificial adequadamente formulado também podem conduzir a resultados satisfatórios, em termos da qualidade e da quantidade da solução gerada (Mavriplis⁵, Turkel e Vatsa⁶ e Maciel e Azevedo⁷). O esquema de Jameson e Mavriplis⁸ é um exemplo de um esquema estruturado, simétrico e com boa resolução, que pode conduzir a resultados satisfatórios utilizando um operador de dissipação adequado. O esquema foi desenvolvido para problemas em malhas estruturadas de triângulos, mas sua extensão para malhas de retângulos é direta.

No presente trabalho, o esquema de Harten³ é implementado, no contexto de volumes finitos e utilizando uma discretização espacial assimétrica e estruturada, para resolver as equações de Euler, no espaço bidimensional, e é comparado ao esquema simétrico e estruturado de Jameson e Mavriplis⁸, fazendo uso do operador de dissipação de Mavriplis⁵. Eles são aplicados à solução dos problemas de escoamento transônico em torno de um aerofólio NACA 0012 e do escoamento supersônico em torno de um corpo rombudo. Os esquemas implementados são de segunda ordem de precisão espacial. Os algoritmos são acelerados para a solução de estado estacionário fazendo uso de um passo no tempo variável espacialmente. Os resultados demonstraram que o esquema de Jameson e Mavriplis⁸ produziu soluções mais realísticas do que o esquema de Harten³.

2 EQUAÇÕES DE EULER

O movimento fluido é descrito pelas equações de Euler, que expressam a conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia para um meio não viscoso, não condutor de calor e compressível, na ausência de forças externas. Na forma integral e conservativa, estas equações podem ser representadas por:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V Q dV + \int_S (E_e n_x + F_e n_y) dS = 0, \quad (1)$$

em que Q é escrito para um sistema Cartesiano, V é o volume de uma dada célula, n_x e n_y são as componentes do vetor normal à cada face de fluxo, S é a área de fluxo e E_e e F_e representam as componentes do vetor de fluxo convectivo. Q, E_e e F_e são representados por:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad E_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{Bmatrix} \quad e \quad F_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{Bmatrix}, \quad (2)$$

sendo ρ a densidade do fluido; u e v as componentes Cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y, respectivamente; e a energia total por unidade de volume do meio fluido; e p a pressão estática do meio fluido. Expressões para a área de fluxo S e para os volumes V de cada célula estão disponíveis em Maciel e Azevedo⁹ e em Maciel¹⁰.

Em todos os problemas as equações de Euler foram adimensionalizadas em relação à densidade de escoamento não perturbado, ρ_∞ , e à velocidade do som de escoamento não perturbado, a_∞ . Assim, a densidade é adimensionalizada em relação a ρ_∞ , as componentes de velocidade u e v são adimensionalizadas em relação a a_∞ e a pressão e a energia total são adimensionalizadas em relação ao produto $\rho_\infty (a_\infty)^2$. O sistema matricial de equações de Euler é fechado com a equação de estado $p = (\gamma - 1)[e - 0,5\rho(u^2 + v^2)]$, admitindo a hipótese de gás ideal e γ sendo a razão entre calores específicos. A entalpia total é determinada por $h = [\gamma/(\gamma - 1)](p/\rho) + 0,5(u^2 + v^2)$.

A Equação (1) descreve uma relação em que a taxa temporal de variação do vetor de

estado Q , dentro de um volume V , é balanceada pelo fluxo convectivo líquido que cruza a superfície de contorno S . O domínio de cálculo é dividido em um grande número de células retangulares e a Eq. (1) é aplicada à cada célula.

3 ALGORITMO DE JAMESON E MAVRIPLIS⁸

As equações de Euler em forma conservativa e integral, segundo uma formulação de volumes finitos, podem ser escritas, sob um contexto estruturado de discretização espacial (Jameson e Mavriplis⁸ e Jameson, Schmidt e Turkel¹¹), como:

$$d(V_{i,j}Q_{i,j})/dt + C(Q_{i,j}) = 0, \quad (3)$$

em que $C(Q_{i,j}) = \sum_{k=1}^4 [E_e(Q_{i,j,k})\Delta y_{i,j} - F_e(Q_{i,j,k})\Delta x_{i,j}]$ é a aproximação discreta da integral de fluxo da Eq. (1). Neste trabalho, foi adotado que:

$$Q_{i,j,k} = 0,5(Q_{i,j} + Q_k), \quad \Delta y_{i,j} = y_{n2} - y_{n1} \quad e \quad \Delta x_{i,j} = x_{n2} - x_{n1}, \quad (4)$$

com (i,j) indicando um dado volume da malha e “k” sendo seu respectivo vizinho; e n1 e n2 representam nós consecutivos do volume (i,j), em sentido anti-horário.

A discretização espacial proposta pelos autores é equivalente a um esquema centrado com segunda ordem de precisão, em um contexto de diferenças finitas. A introdução de um operador de dissipação “D” é necessária a fim de garantir a estabilidade numérica na presença, por exemplo, de desacoplamento par-ímpar de soluções e de instabilidades não lineares, como ondas de choque. Então, a Equação (3) é reescrita como:

$$d(V_{i,j}Q_{i,j})/dt + [C(Q_{i,j}) - D(Q_{i,j})] = 0. \quad (5)$$

A integração temporal é realizada utilizando um método explícito, de segunda ordem, tipo Runge-Kutta de cinco estágios e pode ser representado de forma generalizada por:

$$\begin{aligned} Q_{i,j}^{(0)} &= Q_{i,j}^{(n)} \\ Q_{i,j}^{(k)} &= Q_{i,j}^{(0)} - \alpha_k \Delta t_{i,j} / V_{i,j} [C(Q_{i,j}^{(k-1)}) - D(Q_{i,j}^{(m)})], \\ Q_{i,j}^{(n+1)} &= Q_{i,j}^{(k)} \end{aligned} \quad (6)$$

com $k = 1, \dots, 5$; $m = 0$ até 4; $\alpha_1 = 1/4$, $\alpha_2 = 1/6$, $\alpha_3 = 3/8$, $\alpha_4 = 1/2$ e $\alpha_5 = 1$. De acordo com Swanson e Radespiel¹², o operador de dissipação artificial deve ser avaliado apenas nos dois primeiros estágios ($m = 0$, $k = 1$, e $m = 1$, $k = 2$), visando economia de tempo de CPU. Ele é congelado para os estágios remanescentes, explorando os aspectos hiperbólicos destas equações, a fim de assegurar a convergência para a condição de estado estacionário.

3.1 Operador de Dissipação Artificial

O operador de dissipação artificial apresentado neste trabalho é baseado em Mavriplis⁵ e possui a seguinte estrutura:

$$D(Q_{i,j}) = d^{(2)}(Q_{i,j}) - d^{(4)}(Q_{i,j}), \quad (7)$$

em que: $d^{(2)}(Q_{i,j}) = \sum_{k=1}^4 0,5 \varepsilon_{i,j,k}^{(2)} (A_{i,j} + A_k) (Q_k - Q_{i,j})$, denominado de operador Laplaciano não dividido, fornece estabilidade numérica na presença de ondas de choque; e $d^{(4)}(Q_{i,j}) = \sum_{k=1}^4 0,5 \varepsilon_{i,j,k}^{(4)} (A_{i,j} + A_k) (\nabla^2 Q_k - \nabla^2 Q_{i,j})$, denominado operador bi-harmônico, fornece a estabilidade de campo (por exemplo, instabilidades do tipo desacoplamento par-ímpar). Neste último termo, $\nabla^2 Q_{i,j} = \sum_{k=1}^4 (Q_k - Q_{i,j})$. Sempre que “k” representar uma célula de contorno especial, denominada célula “fantasma”, sua contribuição em termos de $\nabla^2 Q_k$ é extrapolada do volume vizinho real. Os termos ε são definidos como segue:

$$\varepsilon_{i,j,k}^{(2)} = K^{(2)} \text{MAX} (v_{i,j}, v_k) \quad \text{e} \quad \varepsilon_{i,j,k}^{(4)} = \text{MAX} [0, (K^{(4)} - \varepsilon_{i,j,k}^{(2)})], \quad (8)$$

com $v_{i,j} = \sum_{k=1}^4 |p_k - p_{i,j}| / \sum_{k=1}^4 (p_k + p_{i,j})$ representando um sensor de pressão empregado para identificar regiões de gradientes elevados. As constantes $K^{(2)}$ e $K^{(4)}$ possuem valores típicos de 1/4 e 3/256, respectivamente. Novamente, sempre que “k” representar uma célula fantasma, é assumido que $v_f = v_{i,j}$. Os termos $A_{i,j}$ são contribuições do autovalor normal máximo das equações de Euler integrado ao longo de cada face da célula. Estes termos são definidos como:

$$A_{i,j} = \sum_{k=1}^4 \left[|u_{i,j,k} \Delta y_{i,j} - v_{i,j,k} \Delta x_{i,j}| + a_{i,j,k} (\Delta x_{i,j}^2 + \Delta y_{i,j}^2)^{0,5} \right], \quad (9)$$

em que $u_{i,j,k}$, $v_{i,j,k}$ e $a_{i,j,k}$ são calculados por média aritmética entre os valores da propriedade associados ao volume (i,j) e seu respectivo vizinho “k”.

4 ALGORITMO DE HARTEN³

O algoritmo de Harten³, com segunda ordem de precisão espacial, fica especificado pela determinação do vetor de fluxo numérico na interface $(i+1/2,j)$. A extensão dele para a interface $(i,j+1/2)$ é direta, sem complicações adicionais.

Segundo o formalismo de volumes finitos, que é equivalente a um sistema de coordenadas generalizadas, os volumes das células à direita e à esquerda, bem como o volume na interface, necessários a mudança de coordenadas, são definidos por:

$$V_D = V_{i+1,j}, \quad V_E = V_{i,j} \quad \text{e} \quad V_{int} = 0,5(V_D + V_E), \quad (10)$$

em que “D” e “E” representam direito e esquerdo, respectivamente. As componentes de área na interface são definidas por:

$$S_{x_int} = s'_x S \quad \text{e} \quad S_{y_int} = s'_y S. \quad (11)$$

Expressões para os versores de área s'_x e s'_y estão disponíveis em Maciel e Azevedo⁹ e em Maciel¹⁰. Os termos de métrica para esse sistema de coordenadas generalizadas são definidos como:

$$h_x = S_{x_int} / V_{int}, \quad h_y = S_{y_int} / V_{int} \quad \text{e} \quad h_n = S / V_{int}. \quad (12)$$

As propriedades calculadas na interface de fluxo são obtidas por média aritmética ou pela média de Roe². No presente trabalho, a média aritmética foi usada:

$$\rho_{int} = 0,5(\rho_D + \rho_E), \quad u_{int} = 0,5(u_D + u_E), \quad v_{int} = 0,5(v_D + v_E) \quad \text{e} \quad H_{int} = 0,5(H_D + H_E); \quad (13)$$

$$a_{int} = \sqrt{(\gamma - 1) \left[H_{int} - 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \right]}. \quad (14)$$

Os autovalores das equações de Euler, na direção ξ , para o fluxo convectivo são dados por:

$$U_{cont} = u_{int} h_x + v_{int} h_y, \quad \lambda_1 = U_{cont} - a_{int} h_x, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = U_{cont} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = U_{cont} + a_{int} h_x. \quad (15)$$

Os saltos das variáveis conservadas, necessários à construção da função de dissipação de Harten³, são dado por:

$$\Delta e = V_{int} (e_D - e_E), \quad \Delta \rho = V_{int} (\rho_D - \rho_E) \quad \text{e} \quad \Delta(\rho u) = V_{int} [(\rho u)_D - (\rho u)_E]; \\ \Delta(\rho v) = V_{int} [(\rho v)_D - (\rho v)_E]. \quad (16)$$

Os vetores α para a interface $(i+1/2, j)$ são calculados pelas seguintes expressões:

$$\alpha_1 = 0,5(aa - bb), \quad \alpha_2 = \Delta \rho - aa, \quad \alpha_3 = cc \quad \text{e} \quad \alpha_4 = 0,5(aa + bb), \quad (17)$$

com:

$$aa = (\gamma - 1) / a_{int}^2 \left[\Delta e + 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \Delta \rho - u_{int} \Delta(\rho u) - v_{int} \Delta(\rho v) \right]; \quad (18)$$

$$bb = 1 / a_{int} \left[h'_x \Delta(\rho u) - (h'_x u_{int} + h'_y v_{int}) \Delta \rho + h'_y \Delta(\rho v) \right]; \quad (19)$$

$$cc = h'_x \Delta(\rho v) + (h'_y u_{int} - h'_x v_{int}) \Delta \rho - h'_y \Delta(\rho u); \quad (20)$$

$$h'_x = h_x / h_n \quad \text{e} \quad h'_y = h_y / h_n. \quad (21)$$

A função de dissipação de Harten³ é construída utilizando a seguinte matriz:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ u_{int} - h'_x a_{int} & u_{int} & -h'_y & u_{int} + h'_x a_{int} \\ v_{int} - h'_y a_{int} & v_{int} & h'_x & v_{int} + h'_y a_{int} \\ H_{int} - h'_x u_{int} a_{int} - h'_y v_{int} a_{int} & 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) & h'_x v_{int} - h'_y u_{int} & H_{int} + h'_x u_{int} a_{int} + h'_y v_{int} a_{int} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

A condição de entropia é implementada da seguinte forma:

$$v_l = \Delta t \lambda_l = Z_l; \quad (23)$$

$$\psi^l = \begin{cases} |Z_l|, & se |Z_l| \geq \delta_f \\ 0,5(Z_l^2 + \delta_f^2) / \delta_f, & se |Z_l| < \delta_f \end{cases}, \quad (24)$$

com “l” variando de 1 até 4 (espaço bidimensional) e δ_f assumindo valores entre 0,1 e 0,5, sendo 0,2 o valor recomendado por Harten³.

A função \tilde{g} é definida por:

$$\tilde{g}^l = 0,5(\psi^l - Z_l^2) \alpha_l. \quad (25)$$

A função g, de compressibilidade artificial, é dada por:

$$g^l = \sin \alpha_l \times \text{MÁX}(0,0; \text{MÍN}(|\tilde{g}_{i,j}^l|, \tilde{g}_{i-1,j}^l \times \sin \alpha_l)), \quad (26)$$

em que $\sin \alpha_l$ vale 1,0 se $\tilde{g}^l \geq 0,0$ e -1,0 caso contrário. A função ϕ^l é definida por:

$$\phi^l = \begin{cases} (g_{i+1,j}^l - g_{i,j}^l) / \alpha_l, & se \alpha_l \neq 0,0 \\ 0,0, & se \alpha_l = 0,0 \end{cases}. \quad (27)$$

A função de entropia é redefinida considerando ϕ^l : $Z_l = v_l + \phi^l$, e ψ^l é recalculada de acordo com a Eq. (24). Finalmente, a função de dissipação de Harten³, para segunda ordem de precisão espacial, é construída pelo seguinte produto matriz-vetor:

$$\{D_{Harten}\}_{i,j} = [R]_{i,j} \left\{ \frac{(\phi_{i,j} + \phi_{i+1,j} - \psi_{i,j} \alpha_{i,j})}{\Delta t_{i,j}} \right\}. \quad (28)$$

O vetor de fluxo numérico convectivo para a interface $(i+1/2,j)$ é descrito por:

$$F_{i+1/2,j}^{(l)} = (E_{int}^{(l)} h_x + F_{int}^{(l)} h_y) \mathcal{V}_{int} + 0,5 D_{Harten}^{(l)}, \quad (29)$$

com:

$$E_{int}^{(l)} = 0,5(E_D^{(l)} + E_E^{(l)}) \quad e \quad F_{int}^{(l)} = 0,5(F_D^{(l)} + F_E^{(l)}). \quad (30)$$

A integração no tempo segue o método da separação temporal (do inglês: “time splitting”), que a divide em dois passos, cada um associado a uma direção coordenada específica. No passo inicial, é possível escrever:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{i,j}^* &= -\Delta t / V_{i,j} (F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n); \\ Q_{i,j}^* &= Q_{i,j}^n + \Delta Q_{i,j}^*; \end{aligned} \quad (31)$$

e no passo final:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{i,j}^{n+1} &= -\Delta t / V_{i,j} (F_{i,j+1/2}^* - F_{i,j-1/2}^*); \\ Q_{i,j}^{n+1} &= Q_{i,j}^* + \Delta Q_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (32)$$

5 PASSO NO TEMPO VARIÁVEL ESPACIALMENTE

A idéia básica deste procedimento consiste em manter constante o número de CFL em todo o domínio de cálculo, permitindo, assim, o uso de passos no tempo apropriados para cada região específica da malha durante o processo de convergência. Desta forma, e de acordo com a definição do número de CFL, é possível escrever:

$$\Delta t_{i,j} = CFL(\Delta s)_{i,j} / c_{i,j}, \quad (33)$$

em que CFL é o número de “Courant-Friedrichs-Lewy” para prover estabilidade numérica ao esquema; $c_{i,j} = \left[(u^2 + v^2)^{0,5} + a \right]_{i,j}$ é a velocidade característica máxima de propagação de informações no domínio de cálculo; e $(\Delta s)_{i,j}$ é um comprimento característico de transporte de informações. Em um contexto de volumes finitos, $(\Delta s)_{i,j}$ é escolhido como o menor valor encontrado entre a menor distância de centróides, envolvendo a célula “(i,j)” e um vizinho “k”, e o menor comprimento de lado da célula.

6 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNOS

6.1 Condições Iniciais

Para todos os problemas físicos estudados neste trabalho, valores de escoamento não perturbado são adotados para todas as propriedades como condição inicial, em todo o domínio de cálculo (Jameson e Mavriplis⁸). Por isso, o vetor de variáveis conservadas é definido como:

$$Q_{i,j} = \left\{ 1 \quad M_\infty \cos \alpha \quad M_\infty \sin \alpha \quad \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)} + 0,5M_\infty^2 \right\}^T, \quad (34)$$

sendo M_∞ o número de Mach de escoamento não perturbado e α o ângulo de ataque do escoamento.

6.2 Condições de Contornos

As condições de contorno são basicamente de quatro tipos: parede sólida, entrada, saída e continuidade. Estas condições de contorno são implementadas, como comentado anteriormente, em células fantasmas.

(a) Condição de parede: Impõe a condição de tangência do escoamento à parede sólida. Esta condição é satisfeita considerando a componente de velocidade da célula fantasma tangente à parede como sendo igual à respectiva componente de velocidade de sua célula real vizinha. Da mesma forma, a componente de velocidade da célula fantasma normal à parede é igualada em valor, mas com sinal oposto, à respectiva componente de sua célula real vizinha.

O gradiente de pressão do fluido normal à parede é assumido ser igual a zero segundo uma formulação não viscosa. A mesma hipótese é aplicada para o gradiente de temperatura normal à parede. Destas considerações, a densidade e a pressão do volume fantasma são extrapoladas dos respectivos valores de seu volume real vizinho (extrapolação de ordem zero). A energia total é obtida da equação de estado para o gás ideal.

(b) Condição de entrada:

(b.1) Escoamento subsônico: Três propriedades são especificadas e uma é extrapolada, baseado na análise de propagação de informações ao longo de direções características no domínio de cálculo (Maciel¹⁰ e Maciel e Azevedo^{13,14}). Em outras palavras, para escoamento subsônico, três direções características de propagação de informações têm sentidos para dentro do domínio computacional e devem ser fixadas. Somente a direção característica associada à velocidade “ (q_n-a) ” não pode ser especificada e deve ser determinada por informação interior ao domínio de cálculo. Para os problemas estudados, a pressão foi a variável extrapolada do volume real vizinho. Densidade e componentes de velocidade tiveram seus valores determinados pelo escoamento não perturbado. A energia total por unidade de volume do fluido é determinada pela equação de estado do gás ideal.

(b.2) Escoamento supersônico: Todas as variáveis são fixadas com os valores de escoamento não perturbado, na entrada do contorno.

(c) Condição de saída:

(c.1) Escoamento subsônico: Três direções características de propagação de informações têm sentidos para fora do domínio computacional, devendo, então, serem extrapoladas a partir de informações do interior. A direção característica associada à velocidade “ (q_n-a) ” deve ser especificada, pois penetra no domínio de cálculo. Neste caso, a pressão do volume fantasma é especificada por seu valor inicial. Densidade e componentes de velocidade são extrapoladas e a energia total obtida pela equação de estado do gás ideal.

(c.2) Escoamento supersônico: Todas as variáveis são extrapoladas do domínio interior devido ao fato de todas as quatro direções características de propagação de informações das equações de Euler estarem saindo do domínio de cálculo e, com isso, nada podendo ser fixado.

(d) Condição de continuidade: Para o problema físico do aerofólio, é necessário que a continuidade do escoamento no bordo de fuga seja satisfeita (condição de Kutta). Esta condição é garantida impondo que o vetor de variáveis conservadas seja igual tanto para o

intradorso como para o extradorso.

7 RESULTADOS

Testes foram realizados em um microcomputador CELERON-1,2GHz e 128 Mbytes de memória RAM. Resultados convergidos ocorreram para 4 ordens de redução no valor do resíduo máximo. O valor usado para γ foi 1,4. Para todos os problemas, o ângulo de ataque foi adotado igual a $0,0^\circ$.

7.1 Problema Físico do Aerofólio

Para este problema físico foi utilizada uma malha de tipologia “O” com 49×80 pontos ou constituída de 3.792 volumes retangulares e 3.920 nós. Foi utilizado um estiramento exponencial de 5% na direção normal à superfície do aerofólio. As fronteiras de entrada e saída do escoamento foram posicionadas a 10,0 cordas do bordo de ataque do aerofólio. O número de Mach de escoamento não perturbado adotado para a simulação foi 0,8, caracterizando um regime de escoamento transônico. O esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁸ atingiu a solução de estado estacionário em 2.983 iterações, utilizando um número de CFL de 1,0. O esquema de Harten³ utilizou um número de CFL igual a 0,4 e o número total de iterações para a convergência foi de 4.787.

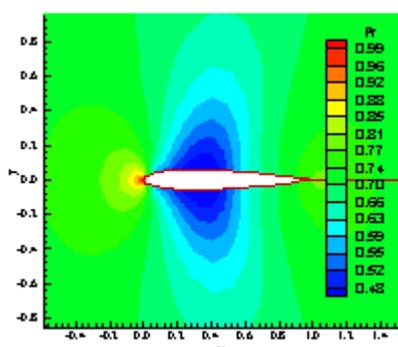


Figura 1. Campo de pressão (JM⁸).

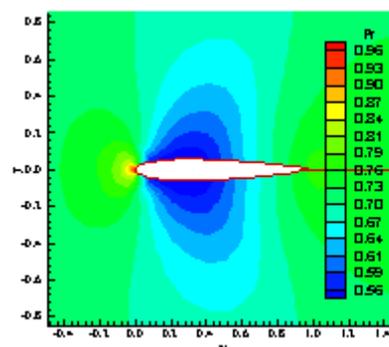


Figura 2. Campo de pressão (H³).

As Figuras 1 e 2 exibem os contornos de pressão obtidos pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³. O campo de pressão gerado pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁸ é mais severo do que o gerado pelo esquema de Harten³. Além disso, o campo de pressão se desenvolve em uma extensão maior na solução gerada pelo esquema de Harten³.

As Figuras 3 e 4 exibem os contornos de número de Mach obtidos pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³. Como é possível constatar observando estes contornos, o campo de número de Mach é mais intenso na solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁸, atingindo regime de escoamento supersônico no intradorso e extradorso do aerofólio. O esquema de Harten³ não prevê regime de escoamento supersônico ao longo do aerofólio, sendo, portanto, menos conservador do que o esquema de Jameson e Mavriplis⁸.

As Figuras 5 e 6 exibem a distribuição do negativo do coeficiente de pressão ao longo do

aerofólio gerada por ambos os esquemas de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, respectivamente. É possível perceber que a solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁸ prevê um choque ocorrendo a 40% da corda, em relação ao bordo de ataque da configuração. O esquema de Harten³ simula um choque a 30% da corda e menos intenso. O perfil de $-C_p$ na solução gerada pelo esquema de Jameson e Mavriplis⁸ é simétrico enquanto o perfil gerado pelo esquema de Harten³ apresenta ligeira assimetria, não muito significativa.

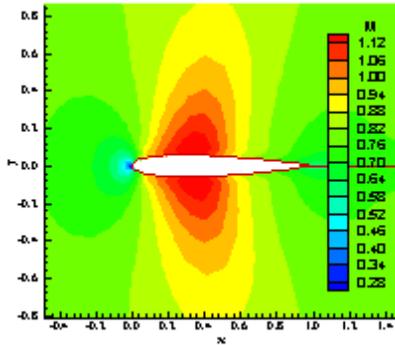


Figura 3. Campo de No. de Mach (JM⁸).

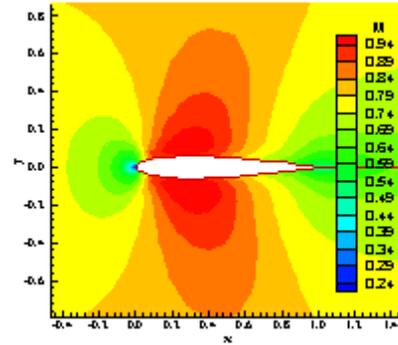


Figura 4. Campo de No. de Mach (H³).

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto assumiram os seguintes valores para o esquema de Jameson e Mavriplis⁸: $c_s = 3,5 \times 10^{-9}$ e $c_A = 1,8 \times 10^{-10}$; enquanto o esquema de Harten³ produziu os seguintes valores: $c_s = -2,0 \times 10^{-2}$ e $c_A = -2,7 \times 10^{-4}$. Ou seja, o esquema de Harten³ prevê que o choque no extradorso é mais severo do que o choque no intradorso, originando assimetria e uma resultante de sustentação para baixo (ou negativa). Como a condição inicial não impõe assimetria, a solução gerada pelo esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁸ é mais correta do que a gerada pelo esquema de Harten³.

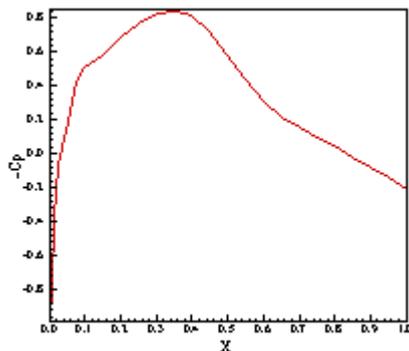


Figura 5. Distribuição de $-C_p$ (JM⁸).

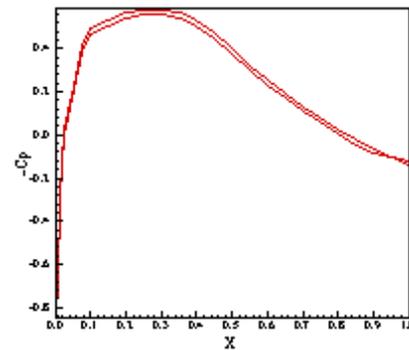


Figura 6. Distribuição de $-C_p$ (H³).

Por fim, as Figuras 7 e 8 exibem as histórias de convergência de cada algoritmo para a solução de estado estacionário. O custo computacional dos algoritmos foi de 0,0000196s para o esquema de Jameson e Mavriplis⁸ e de 0,0000494s para o esquema de Harten³. Ou seja, o esquema de Harten³ é cerca de 152% mais caro do que o algoritmo de Jameson e Mavriplis⁸.

O ganho de convergência do esquema de Jameson e Mavriplis⁸ para este problema foi de 37,7% em relação ao esquema de Harten³.

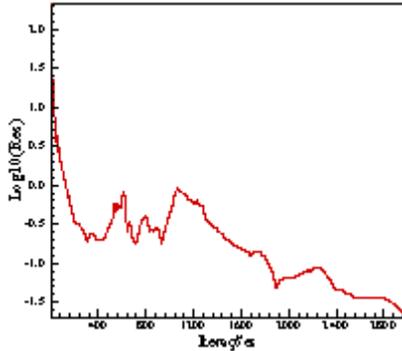


Figura 7. História de convergência (JM⁸).

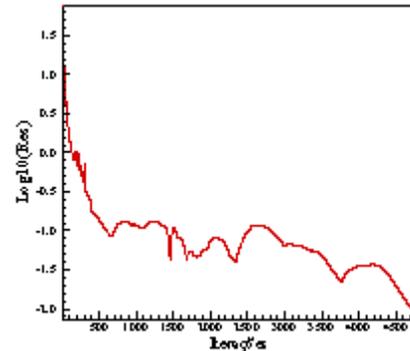


Figura 8. História de convergência (H³).

7.2 Problema Físico do Corpo Rombudo

Para o problema físico do corpo rombudo foi utilizada uma malha gerada algebricamente de 103x80 pontos ou constituída de 8.058 volumes retangulares e 8.240 nós. O número de Mach de escoamento não perturbado adotado para a simulação foi 5,0, caracterizando um regime de escoamento supersônico. O esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁸ atingiu a solução de estado estacionário em 336 iterações, utilizando um número de CFL de 2,0. O esquema de Harten³ utilizou um número de CFL igual a 0,9 e o número total de iterações para a convergência foi de 834.

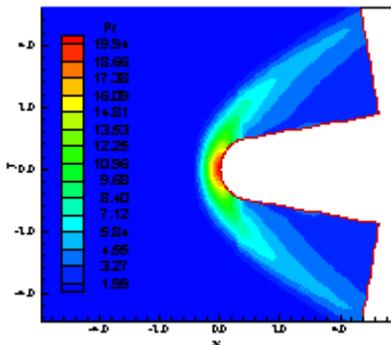


Figura 9. Campo de pressão (JM⁸).

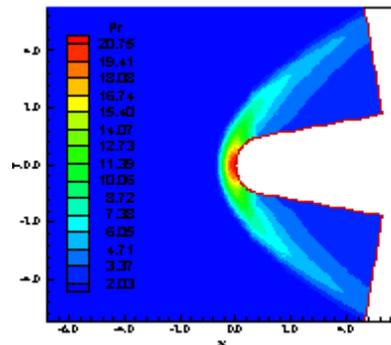


Figura 10. Campo de pressão (H³).

As Figuras 9 e 10 exibem os contornos de pressão gerados pelos algoritmos de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, respectivamente. O campo de pressão agora é mais severo na solução gerada pelo esquema de Harten³. As Figuras 9 e 10 são bastante similares no tocante à forma dos contornos, não havendo diferenças significativas.

As Figuras 11 e 12 exibem os contornos de número de Mach obtidos pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, respectivamente. Novamente o campo de número de Mach

é menos intenso para a solução gerada pelo esquema de Harten³.

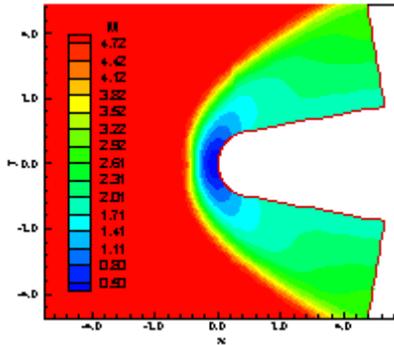


Figura 11. Campo de No. de Mach (JM⁸).

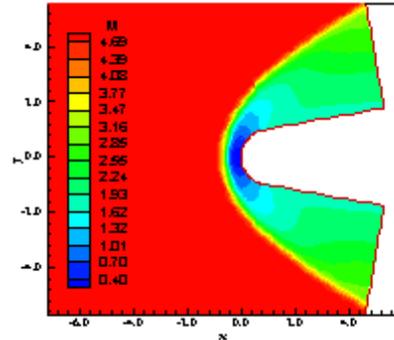


Figura 12. Campo de No. de Mach (H³).

As Figuras 13 e 14 exibem as distribuições de $-C_p$ ao longo do corpo rombudo, geradas pelos esquemas de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, respectivamente. A Figura 14 indica que o choque normal no nariz da configuração é mais intenso na solução gerada pelo esquema de Harten³, ratificando o comportamento destacado na Fig. 10.

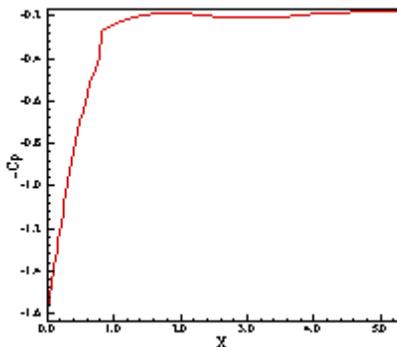


Figura 13. Distribuição de $-C_p$ (JM⁸).

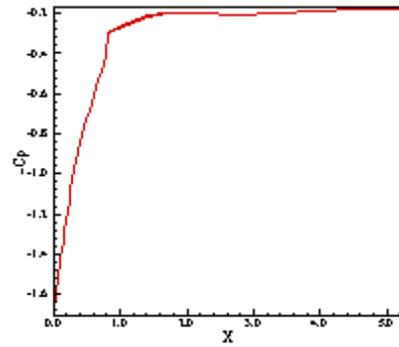
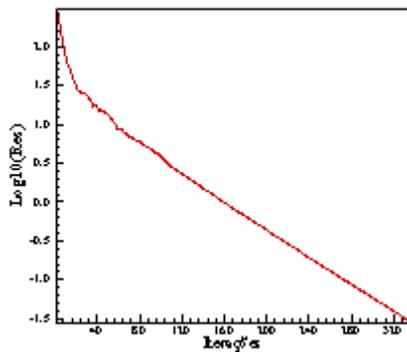
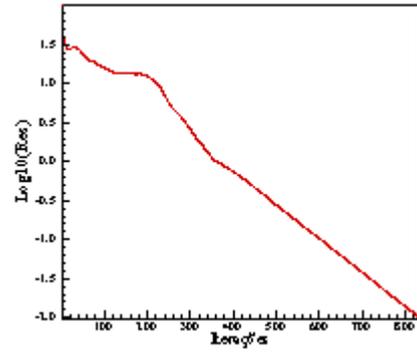


Figura 14. Distribuição de $-C_p$ (H³).

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto assumiram os seguintes valores para o esquema de Jameson e Mavriplis⁸: $c_S = 0,0$ e $c_A = 0,0$; enquanto o esquema de Harten³ produziu os seguintes valores: $c_S = -2,2 \times 10^{-4}$ e $c_A = -1,2 \times 10^{-5}$. Assim, novamente o esquema de Harten³ prevê que o choque no extradorso é mais severo do que o choque no intradorso, originando assimetria e uma resultante de sustentação para baixo (ou negativa). Como a condição inicial não impõe assimetria, novamente a solução gerada pelo esquema numérico de Jameson e Mavriplis⁸ é mais correta do que a gerada pelo esquema de Harten³.

As Figuras 15 e 16 exibem as histórias de convergência geradas pelos algoritmos de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, respectivamente. É possível perceber que a convergência do esquema de Jameson e Mavriplis⁸ é praticamente linear para este problema. O ganho de convergência do esquema de Jameson e Mavriplis⁸ em relação ao esquema de Harten³ para este problema físico foi de 59,7%.

Figura 15. História de convergência (JM⁸).Figura 16. História de convergência (H³).

8 CONCLUSÕES

O presente trabalho apresenta uma comparação entre um algoritmo simétrico com operador de dissipação artificial e um algoritmo assimétrico de alta resolução. Foram implementados os esquemas explícitos e estruturados de Jameson e Mavriplis⁸ e de Harten³, no espaço bidimensional. Eles foram aplicados à resolução de um escoamento transônico em torno de um aerofólio NACA 0012 e de um escoamento supersônico em torno de um corpo rombudo. Uma técnica de passo no tempo variável espacialmente foi empregada visando acelerar o processo de convergência para a solução de estado estacionário.

Os dois algoritmos apresentaram soluções interessantes. No problema do aerofólio, o esquema de Jameson e Mavriplis⁸ apresentou um campo de número de Mach mais intenso do que o gerado pelo esquema de Harten³, desenvolvendo regiões supersônicas, não detectadas pelo esquema de Harten³. Deste ponto de vista, o esquema de Harten³ foi menos conservador do que o esquema de Jameson e Mavriplis⁸. No problema do corpo rombudo, diferenças significativas não foram percebidas. O esquema de Harten³ também prevê, para ambos os problemas, coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto diferentes do valor zero, resultado não esperado para uma condição inicial simétrica. O custo do algoritmo de Harten³ é cerca de 152% mais caro do que o do esquema de Jameson e Mavriplis⁸ e este esquema apresenta um ganho de convergência, em relação ao algoritmo de Harten³, de no mínimo 38%. Ambos os algoritmos apresentaram soluções convergidas no espaço bidimensional e ambos possuem características particulares que podem determinar a escolha por um ou outro. O esquema de Harten³, por ser do tipo separação de diferenças de fluxo TVD, apresenta dissipação inerente, o que introduz menor flexibilidade na estabilidade do esquema. Contudo, ele apresenta uma condição de entropia implementada que sempre o conduz a soluções fisicamente relevantes.

9 REFERÊNCIAS

- [1] S. K. Godunov, “A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics”, *Math. Sb.*, Vol. 47, p. 271 (1959).
- [2] P. L. Roe, “Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes”,

- Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372 (1981).
- [3] A. Harten, “High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357-393 (1983).
- [4] M. Liou e C. J. Steffen Jr., “A New Flux Splitting Scheme”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 107, pp. 23-39 (1993).
- [5] D. J. Mavriplis, “Accurate Multigrid Solution of the Euler Equations on Unstructured and Adaptive Meshes”, *AIAA Journal*, Vol. 28, No. 2, pp. 213-221 (1990).
- [6] E. Turkel e V. N. Vatsa, “Effect of Artificial Viscosity on Three-Dimensional Flow Solutions”, *AIAA Journal*, Vol. 32, No. 1, pp. 39-45 (1994).
- [7] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Modelos de Dissipação Artificial na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do V Congresso de Engenharia Mecânica Norte-Nordeste (V CEM – NNE)*, Vol. 3, Fortaleza, CE, pp 604-611 (1998).
- [8] A. Jameson e D. Mavriplis, “Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh”, *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 611-618 (1986).
- [9] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Solution of Aerospace Problems Using Structured and Unstructured Strategies”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XXIII, No. 2, pp. 155-178 (2001).
- [10] E. S. G. Maciel, “Simulação Numérica de Escoamentos Supersônicos e Hipersônicos Utilizando Técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional”, *Tese de Doutorado*, ITA, CTA, São José dos Campos, SP, Brasil, 258 p (2002).
- [11] A. Jameson, W. Schmidt e E. Turkel, “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes”, *AIAA Paper 81-1259* (1981).
- [12] R. C. Swanson e R. Radespiel, “Cell Centered and Cell Vertex Multigrid Schemes for the Navier-Stokes Equations”, *AIAA Journal*, Vol. 29, No. 5, pp. 697-703 (1991).
- [13] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Algoritmos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do 14th Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica* (disponível em CD-ROM), Bauru, SP, Brasil (1997).
- [14] E. S. G. Maciel e J. L. F., Azevedo, “Comparação entre Vários Esquemas Implícitos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XX, No. 3, pp. 353-380 (1998).

10 AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos sob o no. de processo 304318/2003-5, DCR/1F.