

UMA ANÁLISE NUMÉRICA DA TRANSFERÊNCIA DE CALOR POR CONVECÇÃO NATURAL

Gisele Maria Ribeiro Vieira

*Centro Federal de Educação Tecnológica Celso Suckow da Fonseca - CEFET/RJ, 20271-110,
Rio de Janeiro, RJ, Brasil, gisel.vieira@gmail.com, <http://www.cefet-rj.br>*

Palavras-Chave: convecção natural, densidade máxima, volumes finitos.

Resumo. Este artigo apresenta uma investigação numérica sobre o processo de convecção natural em uma cavidade de seção quadrada. As temperaturas aplicadas nas paredes verticais fazem com que o processo de convecção natural seja afetado pela temperatura relativa à densidade máxima. As equações são resolvidas através do método de Volumes Finitos. Os resultados numéricos indicam que a variação não-linear da densidade influencia fortemente a estrutura do escoamento e a transferência de calor. As estruturas correspondentes a esse tipo de escoamento mostram que a densidade máxima gera uma estrutura complexa de escoamento com duas células de sentido contrário de importância significativa.

1 INTRODUÇÃO

Diversos trabalhos foram desenvolvidos para a melhor compreensão da convecção natural em ambientes fechados, como pode ser verificado através dos trabalhos de [Mariani e Belo \(2006\)](#), [Bravo et al. \(2000\)](#), [Ding et al. \(2004\)](#) e [Le Quéré \(1991\)](#). No entanto, a maior parte dos estudos considera fluidos cuja densidade varia linearmente com a temperatura.

Fluidos como a água, o antimônio, o bismuto líquido, o gálio e o telúrio exibem um máximo de densidade próximo ao ponto de congelamento. Nestes casos, a hipótese de que a densidade varia de forma linear com a temperatura não pode ser aplicada. Este fenômeno ocorre com a água próximo à temperatura de 4°C, ou seja, uma temperatura frequentemente encontrada em diversas aplicações tecnológicas e na natureza (oceanos, lagos, fusão de icebergs). Este é um assunto de grande interesse. Entre os trabalhos numéricos e experimentais envolvendo o máximo de densidade e convecção natural térmica estão os trabalhos de [Lin e Nansteel \(1987\)](#), [Bennacer et al. \(1993\)](#) e [Vieira et al. \(1999\)](#). [Kalabin e Zubkov \(2002\)](#) apresentaram um estudo numérico que trata da influência das condições de contorno sobre o processo de convecção natural da água em uma cavidade quadrada. [Braga e Viskanta \(1992\)](#) analisaram experimentalmente o efeito da densidade máxima na solidificação da água em uma cavidade retangular. [Tsai et al. \(1998\)](#) apresentaram um trabalho numérico e experimental envolvendo o efeito do máximo de densidade sobre escoamentos laminares em tubos com solidificação interna, envolvendo convecção mista.

O presente trabalho analisa numericamente a influência do máximo de densidade sobre o processo de convecção natural da água em uma cavidade de seção quadrada considerando dois intervalos de temperaturas para diferentes números de Rayleigh.

2 MODELO MATEMÁTICO

O problema físico está representado na [Figura 1](#). A substância de trabalho é a água. H é o comprimento das paredes da cavidade de seção quadrada. A parede vertical esquerda é mantida isotérmica a T_c , enquanto a parede vertical direita é mantida isotérmica a T_h . As paredes horizontais são adiabáticas. As hipóteses assumidas são: O escoamento é laminar e bi-dimensional e se dá em regime permanente. O fluido de trabalho é newtoniano e incompressível. Considerando que a diferença de temperatura ($T_c - T_h$) é suficientemente pequena com relação a T_c , pode-se utilizar a aproximação de Boussinesq. Nesta aproximação, a variação de densidade do fluido nos termos de inércia da equação do movimento é desprezada, mas é considerada no termo de força de empuxo. Além disso, considera-se que com exceção da densidade no termo de força de empuxo da equação da quantidade de movimento, todas as outras propriedades físicas do fluido são constantes e que a dissipação viscosa é desprezível. [Watson \(1972\)](#) menciona que tal aproximação é perfeitamente justificável uma vez que $\Delta T \ll (1/\text{coeficiente de expansão térmica})$, o que corresponde aos casos estudados numericamente no presente artigo.

O sistema de coordenadas adotado é adimensionalizado da seguinte forma:

$$X = x/H \tag{1}$$

$$Y = y/H$$

As condições de contorno são especificadas em X e Y . Ao longo da parede vertical esquerda, onde $X=0$, tem-se:

$$\theta(0, Y) = \theta_0 = 0; \quad U(0, Y) = V(0, Y) = 0 \tag{2}$$

sendo U e V as componentes horizontal e vertical, respectivamente, do vetor velocidade adimensional \bar{V} , dadas por: $U = uH/\alpha$ e $V = vH/\alpha$. Nas expressões anteriores, a difusividade térmica é representada por α e as componentes horizontal e vertical da velocidade dimensionais são dadas por u e v , respectivamente. A temperatura adimensional é dada por $\theta = (T - T_c)/(T_h - T_c)$.

Ao longo da parede vertical direita, ou seja, a parede aquecida, onde $X=1$, tem-se:

$$\theta(1, Y) = \theta_1 = 1; \quad U(1, Y) = V(1, Y) = 0 \quad (3)$$

Ao longo da parede horizontal superior, onde $Y=1$, tem-se:

$$\partial\theta(X, 1)/\partial Y = 0; \quad U(X, 1) = V(X, 1) = 0 \quad (4)$$

Ao longo da parede horizontal inferior, onde $Y=0$, tem-se:

$$\partial\theta(X, 0)/\partial Y = 0; \quad U(X, 0) = V(X, 0) = 0 \quad (5)$$

A **Figura 1** apresenta o sistema de coordenadas e o modelo físico de interesse.

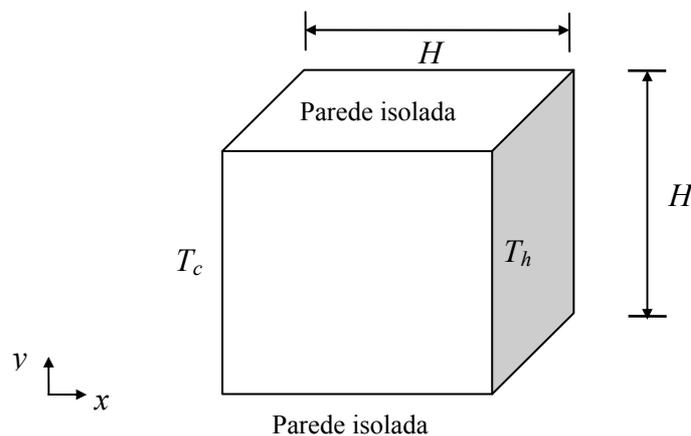


Figura 1: Modelo físico e sistema de coordenadas

2.1 Equações de Governo

As equações de governo são, respectivamente, a equação da continuidade, Eq.(6), a equação da quantidade de movimento, Eqs. (7) e (8), e a equação da energia, Eq. (9), que em suas formas dimensionais são representadas por:

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} = 0 \quad (6)$$

$$\frac{\partial(\rho uu)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial x} \quad (7)$$

$$\frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vv)}{\partial y} = \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) - \frac{\partial p}{\partial y} - \rho(T)g \quad (8)$$

$$\frac{\partial(\rho u T)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v T)}{\partial y} = \frac{k}{c_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \quad (9)$$

onde μ é a viscosidade absoluta, k é a condutividade térmica e c_p é o calor específico. A forma adimensional da pressão p é dada por $P = \frac{pH^2}{\rho\alpha^2 Pr}$, sendo o número de Prandtl dado por $Pr = \nu/\alpha$, onde ν é a viscosidade cinemática. A densidade ρ é constante em todos os termos, com exceção do termo de força de corpo. Na equação de conservação da energia considera-se que a dissipação viscosa é desprezível.

As equações anteriores estão apresentadas para regime permanente, pois o número de Grashof envolvido é menor do que 10^9 , ou seja, o escoamento é laminar. Como já foi mostrado por [Bejan e Lage \(1990\)](#), o parâmetro determinante que indica a transição do escoamento laminar para o turbulento, neste caso, é o número de Grashof.

Embora não tenha sido feito para este artigo, após a convergência obtida com o procedimento numérico, pode-se calcular o número médio de Nusselt sobre a parede vertical aquecida. Este cálculo fornece informações adicionais sobre a transferência de calor média trocada para cada caso. Para tal, utiliza-se a seguinte equação:

$$\overline{Nu} = \frac{Dh}{(\theta_1 - \theta_0)} \int_0^1 Nu_x dY \quad (10)$$

onde Dh é o diâmetro hidráulico e $Nu_x = (\partial\theta/\partial X)_{X=1}$ é o número de Nusselt local sobre a parede aquecida.

2.1.1 Aproximação Proposta para a Densidade no Termo de Força de Corpo

Como já foi mencionado, para fluidos que atingem um valor extremo de densidade a uma temperatura específica, não convém utilizar a hipótese de que a densidade varia linearmente com a temperatura. A formulação que leva em conta o máximo de densidade prediz um escoamento bicelular, ao contrário da aproximação linear que prediz um escoamento unicelular. Com relação à água, a Eq. (10), proposta por [Gebhart e Mollendorf \(1977\)](#), fornece resultados muito bons para uma faixa de temperatura inferior a 10°C :

$$\rho(T) = \rho_{ref} \cdot \left(1 - \gamma \cdot |T - T_{ref}|^q \right) \quad (11)$$

O termo ρ_{ref} é igual à densidade máxima do fluido, também denominada ρ_M ; onde γ é o coeficiente fenomenológico; dado por $\gamma = 9,297 \times 10^{-6} \text{ }^\circ\text{C}^{-2}$ e $q=1,895$; e T_{ref} é igual à temperatura do máximo de densidade, também denominada T_M . Para a água $T_M = 4,029^\circ\text{C}$.

O efeito da variação de ρ é aproximadamente simétrico com relação ao máximo de densidade. A variação relativa da densidade, que induz o escoamento em cada uma das células, está ligada diretamente ao parâmetro de distribuição de densidade representado por:

$$R = \frac{T_M - T_c}{T_h - T_c} \quad (12)$$

Definiu-se um número de Rayleigh modificado da seguinte forma:

$$Ra_{\text{mod}} = \frac{\rho_M \cdot g \cdot H^3 \cdot \gamma \cdot |T_h - T_c|^2}{\rho \cdot \nu \cdot \alpha} \quad (13)$$

3 PROCEDIMIENTO NUMÉRICO DE SOLUCIÓN

O procedimento de solução das equações de governo é baseado no método de Volumes Finitos, descrito detalhadamente por Patankar (1980). Neste método o domínio de solução é dividido em pequenos volumes de controle finitos. As equações são integradas sobre cada um destes volumes de controle. As equações integradas são em seguida discretizadas aplicando-se um esquema híbrido. O acoplamento pressão-velocidade é resolvido através do algoritmo SIMPLE (Semi Implicit Linked Equations). A solução das equações discretizadas é obtida com o procedimento ADI, um método implícito de direções alternadas. A malha definida no domínio computacional é espaçada de forma regular. Dentre os tipos de malha testados, escolheu-se a malha 19 x 19 para a apresentação dos resultados, baseando-se no compromisso entre precisão dos resultados e tempo computacional.

A solução do problema descrito foi desenvolvida na forma de uma sub-rotina utilizada por uma versão acadêmica do programa de volumes finitos. Para acelerar a convergência utilizou-se sub-relaxação para as velocidades, temperatura e pressão. Os valores numéricos relativos às condições de contorno são implementados através de um arquivo de entrada lido por esta sub-rotina. Além disso, com relação ao procedimento numérico, faz-se o uso de volumes fictícios para que a malha seja construída de forma que as paredes verticais estejam à meia distância de dois nós extremos da malha.

O método numérico usado no presente trabalho foi comparado de forma qualitativa a outros trabalhos existentes na literatura, como o trabalho experimental de Seki *et al.* (1978), e o trabalho numérico de Gebhart e Jaluria (1988), apresentando sempre uma boa concordância com os mesmos.

3.1 Informações Adicionais

3.1.1 Arranjo das Variáveis Dependentes na Malha

No presente trabalho, optou-se pelo arranjo desencontrado de variáveis. Neste arranjo, conhecido como “*staggered grid*”, o volume de controle da velocidade na equação da quantidade de movimento é deslocado em relação ao volume de controle das demais propriedades. As pressões estão localizadas de forma que seu gradiente funcione como uma força motriz da velocidade localizada entre dois pontos de pressão. Este arranjo é mais consistente, fisicamente, que o anterior. No balanço de massa, por exemplo, as velocidades estão armazenadas adequadamente no volume de controle, cujo ponto nodal central é a pressão.

Como pode ser melhor ilustrado através das figuras a seguir, a equação da continuidade e da energia, que são equações escalares, são aplicadas nos volumes de controles originais, também chamados de principais. Para as equações da quantidade de movimento, utiliza-se volumes de controles deslocados em relação ao principal.

A Figura 2 mostra a malha utilizada na integração da equação da energia, também chamada de malha principal. O volume de controle elementar (Ω) para um ponto nodal P e seus vizinhos é também chamado de volume de controle principal. As faces do volume de controle são representadas pelas letras minúsculas n , s , e e w . As velocidades v e w são armazenadas nas faces dos volumes de controle e são supostamente conhecidas.

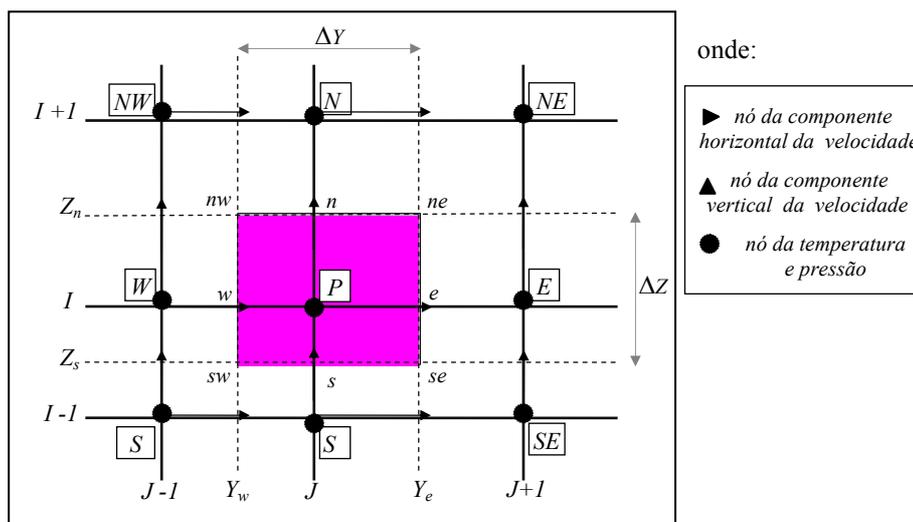


Figura 2 - Volume de controle elementar para a equação em θ e p'

Na integração da equação da quantidade de movimento segundo a direção horizontal, o componente v da velocidade é calculado nos nós e e w . Conseqüentemente, o volume de controle usado para esta situação é um deslocamento do volume de controle principal na direção horizontal, como mostra a Figura 3.

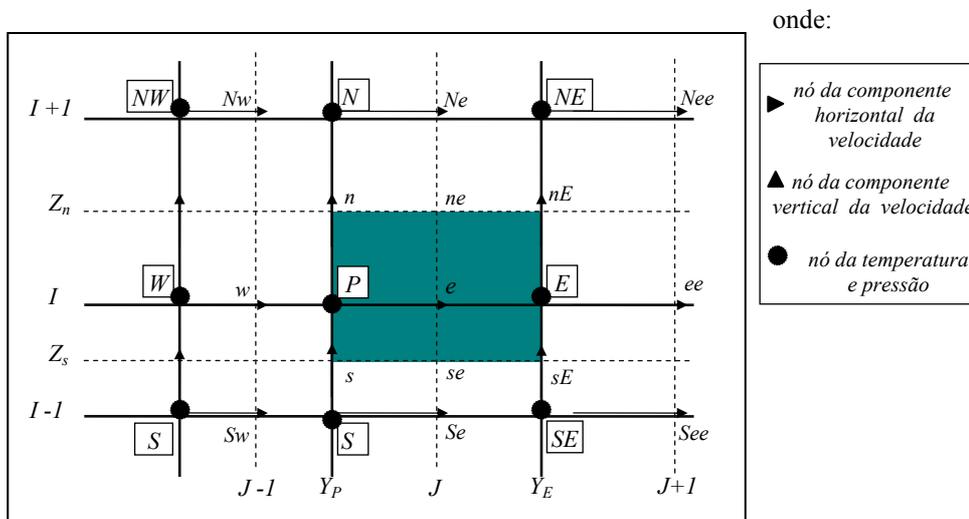


Figura 3 - Volume de controle elementar para o componente horizontal da velocidade na equação de *momentum*

Na integração da equação da quantidade de movimento segundo a direção vertical, o componente w da velocidade é calculado nos nós n e s . Conseqüentemente, o volume de controle usado para esta situação é um deslocamento do volume de controle principal na direção vertical, como mostra a Figura 4.

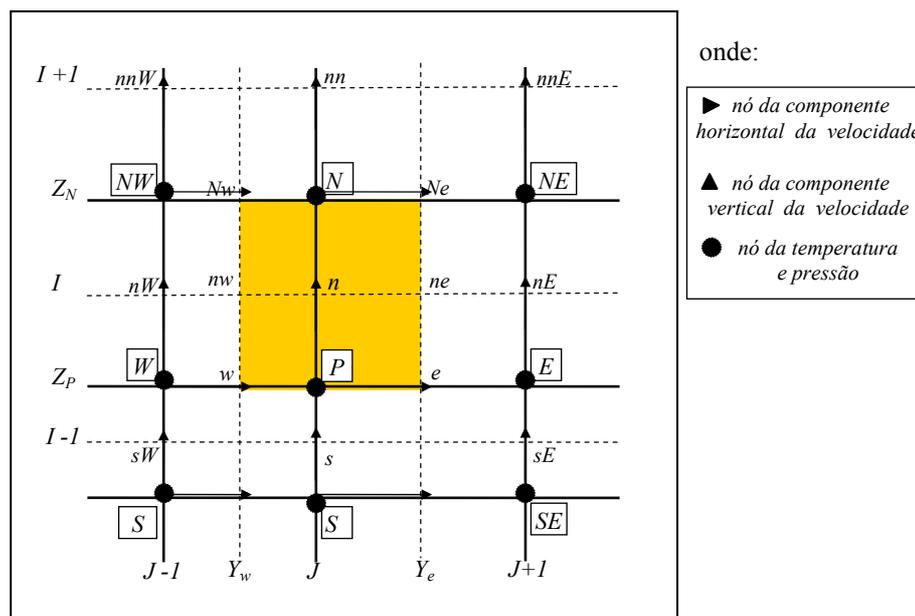


Figura 4 - Volume de controle elementar para o componente vertical da velocidade na equação de *momentum*

3.1.2 Equação Geral de Discretização

A forma geral da equação de discretização para o caso bidimensional é dada por:

$$A_P \cdot \phi_P = A_N \cdot \phi_N + A_S \cdot \phi_S + A_E \cdot \phi_E + A_W \cdot \phi_W + B \tag{14}$$

onde:

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W$$

$$B = \rho \cdot \phi_P^0 \cdot \left(\frac{A_Z \cdot A_Y}{\Delta t} \right) + S_P^0 \cdot A_Z \cdot A_Y$$

Na Eq. (14), os coeficientes A_N , A_S , A_E , A_W representam a influência da advecção e da difusão no volume de controle. Como no problema em estudo admitiu-se regime permanente, o termo relativo a variação de tempo pode ser desprezado.

3.1.3 Resolução Numérica do Sistema de Equações Discretizadas

A Eq. (14) linear deve ser resolvida sobre toda a malha de espaço. Assim, na realidade, deseja-se solucionar um sistema de equações discretizadas. Este sistema pode ser descrito na forma matricial por:

$$[A] \cdot [\phi] = [B] \tag{15}$$

onde $[A]$ é a matriz dos coeficientes e $[\phi]$ é o vetor de incógnitas. Para problemas bidimensionais $[A]$ tem a forma pentadiagonal. Os métodos de solução existentes são baseados em diretos e iterativos. No trabalho em questão, optou-se pelo método iterativo, cuja implementação é mais simples. Foi usado um método implícito de direções alternadas (A.D.I), proposto por Peaceman e Rachford (1955). Este método consiste em resolver o sistema linear pentadiagonal em duas etapas sucessivas, segundo cada direção. Isto leva a resolução de dois sistemas tridiagonais, resolvidos por um processo de solução linha a linha. A matriz tridiagonal é resolvida pelo TDMA (*TriDiagonal Matrix Algorithm*), ou algoritmo de Thomas, que é um método direto. Este método permite calcular o valor de ϕ em todos os

nós situados em uma mesma linha da malha e introduzir as condições limites em cada etapa. Para obter uma melhor aproximação de ϕ , pode-se repetir o processo inúmeras vezes.

3.1.4 Acoplamento Velocidade-Pressão

Na discretização da equação de conservação da energia, supõe-se conhecidos os campos de velocidades. Na discretização das equações de conservação da quantidade de movimento, supõe-se conhecidos os campos de pressões e temperaturas. Assim, os sistemas lineares são resolvidos um a um, atualizando-se os coeficientes. Na solução de cada sistema, é usado um procedimento iterativo de solução. Deve ser dada uma atenção especial ao acoplamento pressão-velocidade, considerando que não há uma equação própria para o campo de pressões. Existem diversos métodos para tratar do acoplamento pressão-velocidade. Todos estes métodos têm o objetivo comum de criar uma equação para a pressão, que permita que o processo iterativo avance, até o momento em que todas as equações de conservação envolvidas sejam satisfeitas. A solução correta do problema de transporte de quantidade de movimento é obtida, quando o campo de pressões introduzido nas equações de Navier-Stokes gera velocidades, que satisfaçam a equação da continuidade. Em qualquer algoritmo, a obtenção de uma boa velocidade de convergência está ligada a uma realimentação adequada do processo. No caso em questão, é o residual de massa que indica a melhor forma de alteração para o campo de pressões. Este novo campo de pressões deve satisfazer as equações de movimento, juntamente com as novas velocidades. O ajuste de variáveis durante o procedimento iterativo pode ser feito de diversas formas. No procedimento numérico do trabalho de tese em questão, escolheu-se o Método SIMPLE para o acoplamento da pressão-velocidade.

Para que se entenda melhor todo o processo, serão dadas algumas explicações adicionais. Como foi dito no parágrafo anterior, supõe-se conhecido o campo de pressões p nas equações de Navier-Stokes. Porém sabe-se que, na realidade, dispõe-se apenas de uma estimativa de p , dada por \hat{p} . As equações de Navier-Stokes descritas na forma linear discretizada são dadas por:

$$a_e \cdot v_e = \sum a_{nb} \cdot v_{nb} + (p_P - p_E) \cdot A_Y + b_v \quad (16)$$

$$a_n \cdot w_n = \sum a_{nb} \cdot w_{nb} + (p_P - p_N) \cdot A_Z + b_w \quad (17)$$

onde o índice inferior “ nb ” vem do termo *neighbour* e representa os coeficientes vizinhos. Os campos de velocidades correspondentes a \hat{p} são dados por \hat{v} e \hat{w} . Assim, pode-se escrever:

$$a_e \cdot \hat{v}_e = \sum a_{nb} \cdot \hat{v}_{nb} + (\hat{p}_P - \hat{p}_E) \cdot A_Y + b_v \quad (18)$$

$$a_n \cdot \hat{w}_n = \sum a_{nb} \cdot \hat{w}_{nb} + (\hat{p}_P - \hat{p}_N) \cdot A_Z + b_w \quad (19)$$

Os campos de velocidades citados anteriormente, em geral, não satisfazem a equação da continuidade, a qual, integrada sobre o volume de controle Ω , é dada por:

$$(w_n - w_s) \cdot A_Z + (v_e - v_w) \cdot A_Y = 0 \quad (20)$$

Supõe-se que o verdadeiro valor de v , w e p é a soma do valor estimado, com um termo de correção. Assim, os valores corretos dessas variáveis são dados pelas seguintes expressões:

$$v = \hat{v} + v' \quad w = \hat{w} + w' \quad p = \hat{p} + p' \quad (21)$$

onde:

v', w', p' - correção dos componentes horizontal e vertical da velocidade e da pressão, respectivamente

$\hat{v}, \hat{w}, \hat{p}$ - valores estimados dos componentes horizontal e vertical da velocidade e da pressão, respectivamente

Subtraindo-se a Eq. (16) da Eq. (18), a Eq. (17) da Eq. (19) e usando-se as relações de correção anteriores, pode-se obter:

$$a_e \cdot v'_e = \Sigma a_{nb} \cdot v'_{nb} + (p'_P - p'_E) \cdot A_Y \quad (22)$$

$$a_n \cdot w'_n = \Sigma a_{nb} \cdot w'_{nb} + (p'_P - p'_N) \cdot A_Z \quad (23)$$

A solução das Eqs. (22) e (23) é bastante complexa. O termo de correção de velocidade é ligado a correção da velocidade de todo domínio, através dos termos vizinhos. O método escolhido para solucionar este problema é o Método SIMPLE, apresentado detalhadamente a seguir.

3.1.5 O Método SIMPLE

O Método SIMPLE foi desenvolvido por Patankar e Spalding (1972). Este método consiste em negligenciar os termos $\Sigma a_{nb} \cdot v'_{nb}$ e $\Sigma a_{nb} \cdot w'_{nb}$ das Eqs. (22) e (23), respectivamente. Desta forma, obtém-se:

$$v'_e = \frac{A_Y}{a_e} \cdot (p'_P - p'_E) \quad (24)$$

$$w'_n = \frac{A_Z}{a_n} \cdot (p'_P - p'_N) \quad (25)$$

Usando-se as relações descritas em Eq. (21), pode-se rearranjar as Eqs. (24) e (25) da seguinte forma:

$$v_e = \hat{v}_e + \frac{A_Y}{a_e} \cdot (p'_P - p'_E) \quad (26)$$

$$w_n = \hat{w}_n + \frac{A_Z}{a_n} \cdot (p'_P - p'_N) \quad (27)$$

Substituindo v e w da equação da continuidade, dada pela Eq. (20), pelas expressões descritas pelas Eq. (26) e (27), a equação da continuidade pode ser escrita da seguinte maneira:

$$A_P \cdot p'_P = A_N \cdot p'_N + A_S \cdot p'_S + A_E \cdot p'_E + A_W \cdot p'_W + B \quad (28)$$

onde:

$$A_N = \frac{A_Z^2}{a_n} ; A_S = \frac{A_Z^2}{a_s} ; A_E = \frac{A_Y^2}{a_e} ; A_W = \frac{A_Y^2}{a_w}$$

$$A_P = A_N + A_S + A_E + A_W$$

$$B = (\hat{w}_n - \hat{w}_s) \cdot A_Z + (\hat{v}_e - \hat{v}_w) \cdot A_Y$$

A Eq. (28) é uma equação linear e pode ser resolvida da mesma forma que as Eq. (16) e (17). No entanto, há riscos de divergência quando se trabalha com altos números de Grashof,

principalmente no início do processo iterativo. O método tem uma tendência a superestimar p' , sendo necessário, portanto, aplicar um coeficiente de sub-relaxação a p' , para que a convergência seja obtida. Assim, faz-se:

$$p = \hat{p} + \alpha_p \cdot p' \quad (29)$$

onde:

α_p - constante empírica de valor entre 0 e 1

Para que se entenda com maior clareza o Método SIMPLE, segue um resumo do procedimento geral de cálculo do método em questão.

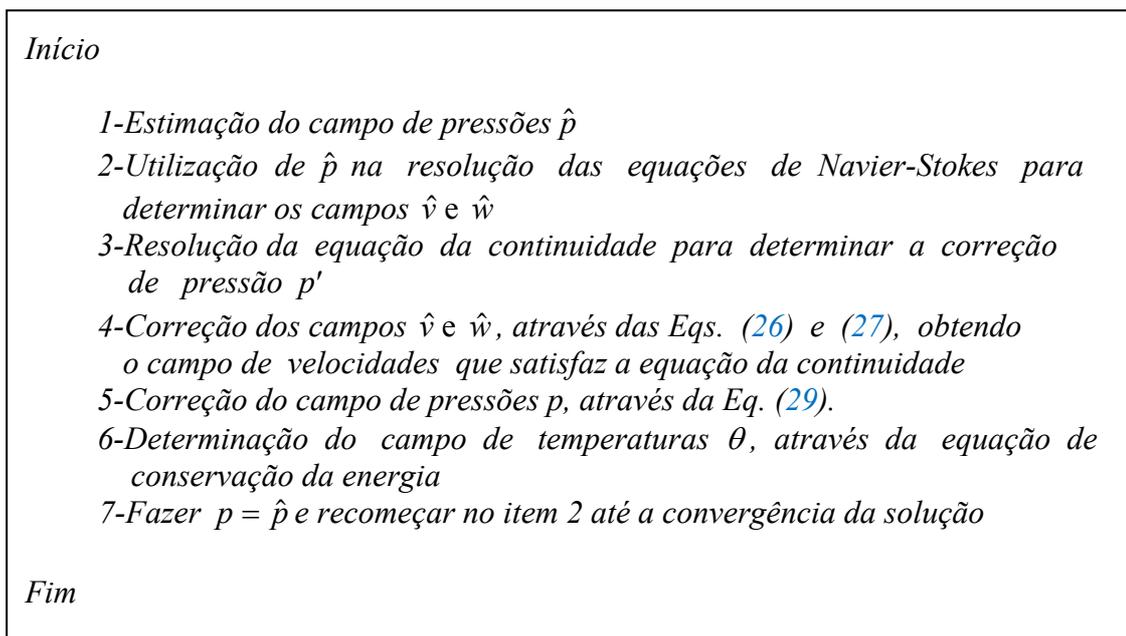


Figura 5 - Algoritmo para o acoplamento pressão-velocidade, segundo o Método SIMPLE

3.1.6 Critério de Convergência

Quando a convergência é alcançada, a solução estacionária correspondente se caracteriza pelo fato de que $p' \rightarrow 0$ ($\hat{w} \rightarrow w$). Existem diversos critérios de convergência, dentre eles, escolheu-se o valor relativo do termo de correção de pressão. Se $\|p'/p\|$ for menor que um determinado valor pré-fixado ε , o processo é interrompido. Para a solução do problema em estudo utilizou-se ε da ordem de 10^{-5} .

3.1.7 Testes Realizados

As Tabelas 1, 2 e 3 descrevem os testes realizados. A dimensão H foi calculada de forma a manter constante o número de Rayleigh desejado. O número de Grashof modificado é representado por $Gr_{\text{mod}} = (g \cdot H^3 \cdot \gamma \cdot |T_h - T_c|^2) / \nu^2$. Utilizou-se para a aceleração da gravidade g , um valor de $10,0 \text{ m/s}^2$. Os valores das propriedades físicas usados foram obtidos a partir da obra de Gebhart *et al.* (1988) e tomando como base a temperatura média de cada intervalo de temperatura considerado.

$Ra = 10^3; Pr = 13,0; Gr = 76,92; T_c = 0^\circ C$			
TESTES	R	T_h (°C)	H (m)
Caso 1	0,55	7,3	$3,85 \times 10^{-3}$
Caso 2	0,50	8,1	$3,60 \times 10^{-3}$

Tabela 1: Testes numéricos – Grupo 1

$Ra = 10^4; Pr = 13,0; Gr = 769,2; T_c = 0^\circ C$			
TESTES	R	T_h (°C)	H (m)
Caso 3	0,55	7,3	$8,29 \times 10^{-3}$
Caso 4	0,50	8,1	$7,76 \times 10^{-3}$

Tabela 2: Testes numéricos – Grupo 2

$Ra = 10^6; Pr = 13,0; Gr = 76923,1; T_c = 0^\circ C$			
TESTES	R	T_h (°C)	H (m)
Caso 5	0,55	7,3	$3,85 \times 10^{-2}$
Caso 6	0,50	8,1	$3,60 \times 10^{-2}$

Tabela 3: Testes numéricos – Grupo 3

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a apresentação dos resultados, escolheu-se permanecer no intervalo $0 \leq R \leq 1$, pois $R \geq 1$, equivale a $T_h \leq 4^\circ C$, situação em que ainda não ocorreu a inversão de densidade, havendo apenas um movimento celular único.

Nos casos do Grupo 1, Figuras 6 e 7, utilizou-se um número de Grashof bastante baixo, o que implica em uma transferência de calor principalmente por condução e isso pode ser facilmente verificado através dos gráficos das isotermas correspondentes. Analisando-se esses casos, pode-se perceber a influência direta do parâmetro R , que representa a distribuição de densidade. Os casos em estudo mostram a ocorrência de uma força de empuxo reversa, nascendo um regime bicelular. O caso em que $R = 0,5$ equivale a um caso de simetria. Se diminuíssemos ainda mais o valor de R , obteríamos uma célula próxima a parede quente ainda maior.

No segundo grupo de casos, Figuras 8 e 9, foi considerado um número de Rayleigh de 10^4 . Observou-se que os resultados se comportam de forma semelhante aos resultados obtidos para $Ra = 10^3$, porém, analisando os campos de temperatura, nota-se obviamente que houve um aumento na taxa de transferência de calor. Isto fica ainda mais evidenciado para os casos do Grupo 3, Figuras 10 e 11, onde $Ra = 10^6$ e os campos se apresentam ainda mais deformados.

Percebe-se o quanto o tamanho e a orientação das células convectivas estão ligados à relação entre as temperaturas das paredes e a temperatura do máximo de densidade. Para $\Delta T = 7,3^\circ C$, há uma célula principal, de sentido horário, próxima a parede fria e uma célula de intensidade menor, de sentido contrário, junto à parede quente. Isto porque a célula principal se localiza onde o intervalo relativo a T_M é mais importante. Para $\Delta T = 8,1^\circ C$, a influência do máximo de densidade é muito mais evidente, podendo-se observar duas células de mesmo tamanho e sentidos contrários.

Não foram detectados problemas significativos de convergência, embora para $Ra = 10^6$ a

solução tenha demorado um pouco mais para convergir.

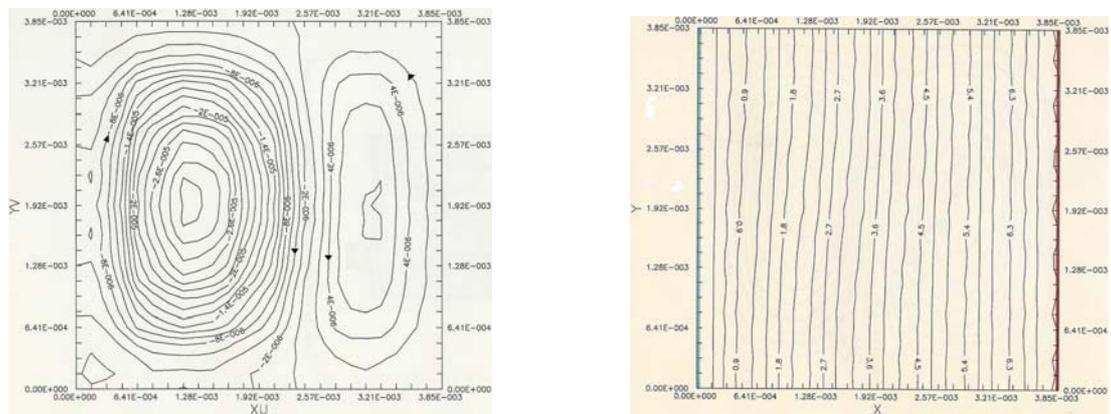


Figura 6: Distribuição das linhas de corrente e isothermas para o Caso 1 ($T_h=7,3^\circ\text{C}$; $Ra=10^3$)

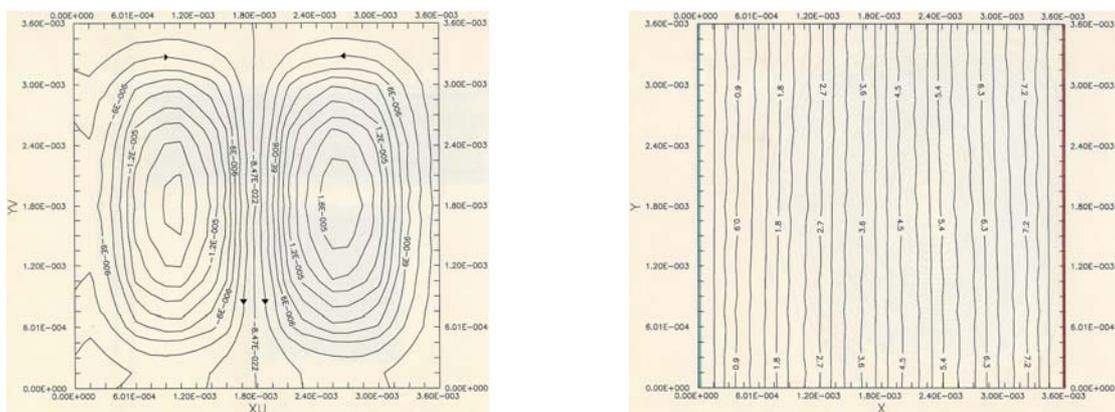


Figura 7: Distribuição das linhas de corrente e isothermas para o Caso 2 ($T_h=8,1^\circ\text{C}$; $Ra=10^3$)

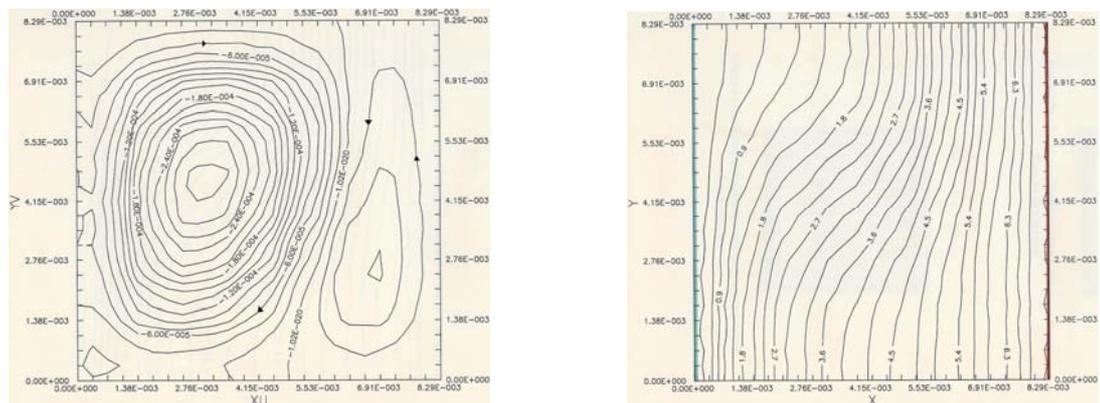


Figura 8: Distribuição das linhas de corrente e isothermas para o Caso 3 ($T_h=7,3^\circ\text{C}$; $Ra=10^4$)

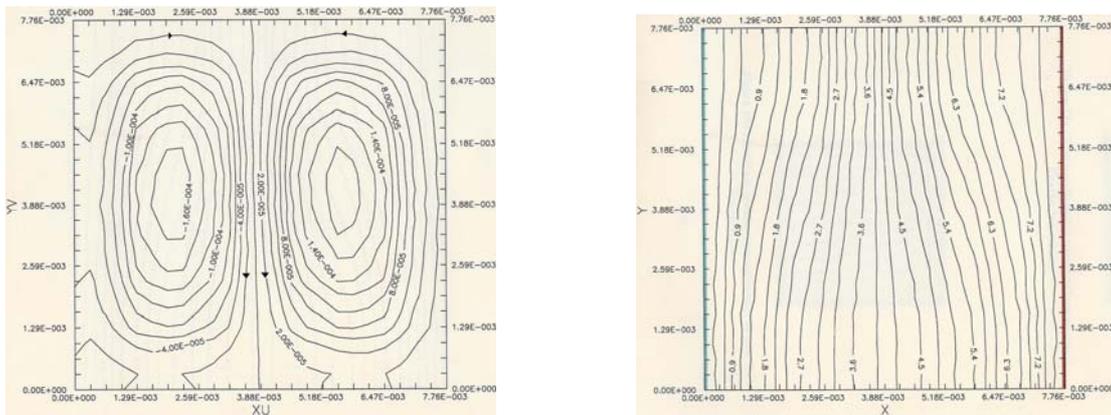


Figura 9: Distribuição das linhas de corrente e isotermas para o Caso 4 ($T_h=8,1^\circ\text{C}$; $Ra=10^4$)

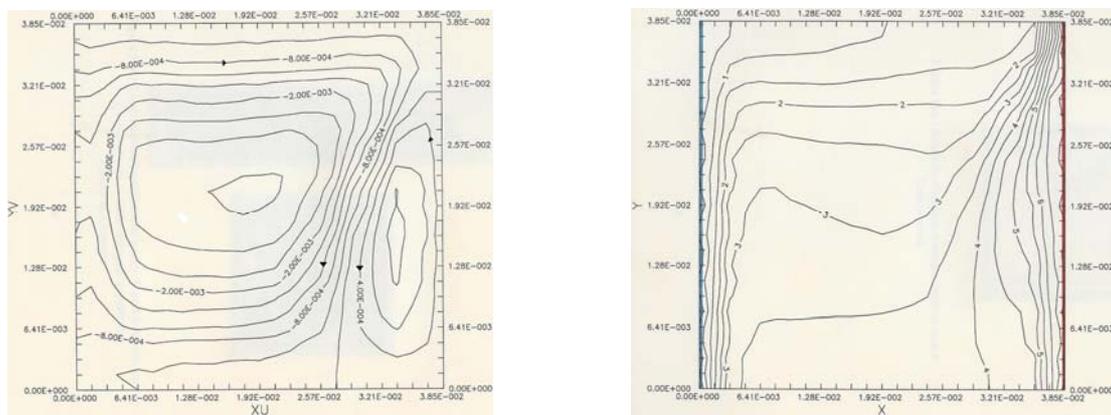


Figura 10: Distribuição das linhas de corrente e isotermas para o Caso 5 ($T_h=7,3^\circ\text{C}$; $Ra=10^6$)

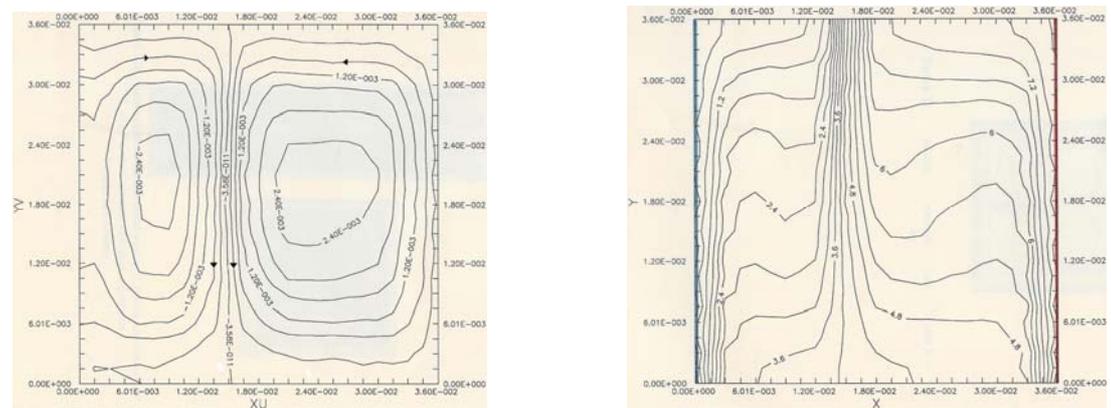


Figura 11: Distribuição das linhas de corrente e isotermas para o Caso 6 ($T_h=8,1^\circ\text{C}$; $Ra=10^6$)

5 CONCLUSÃO

A variação não-linear da densidade no termo de força de empuxo afeta a transferência de calor por convecção natural e a estrutura do escoamento. Tal fenômeno cria uma estrutura complexa de duas células com sentidos opostos de rotação e deve ser levado em conta.

Os resultados mostram que a relação entre as temperaturas das paredes e a temperatura do máximo de densidade influencia significativamente o tamanho e a orientação das células convectivas.

REFERÊNCIAS

- Bejan, A., and Lage, J.L., The Prandtl number effect on the transition in natural convection along a vertical surface. *ASME Journal of Heat Transfer*, 112: 787-790, 1990.
- Bennacer, R., Sun, L.Y., Toguyeni, Y., Gobin, D., and Bénard, C., Structure d'écoulement et transfert de chaleur par convection naturelle au voisinage du maximum de densité. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 36, No.13: 3329-3342, 1993.
- Braga, S.L. and Viskanta, R., Transient natural convection of water near its density extremum in a rectangular cavity. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 35, No.4: 861-875, 1992.
- Bravo, E.O.A., Claeysen, J.C. and Rubio, O., Numerical simulation for the natural convection flow. *Revista de Pesquisa e Pós-Graduação*, 1: 237-254, 2000.
- Ding, H., Shu, C., Yeo, K. S. and Xu, D., Development of least-square-based two-dimensional finite-difference schemes and their application to simulate natural convection in a cavity. *Computers & Fluids*, 33: 137-154, 2004.
- Gebhart, B., Jaluria, Y., Mahajan, R.L., Sammakia, B., *Buoyancy-induced flows and transport*. Hemisphere Publishing Corporation, 1988.
- Gebhart, B. and Mollendorf, J., A new density relation for pure and saline water. *Deep Sea Res.*, 24: 831-848, 1977.
- Kalabin, E.V. and Zubkov, P.T., Influence of boundary conditions on water natural convection in a square cavity. *Int. J. Trans. Phenomena*, 4: 155-166, 2002.
- Le Quéré, P., Accurate solutions to the square thermally driven cavity at high Rayleigh number. *Computers & Fluids*, 20: 29-41, 1991.
- Lin, D.S. and Nansteel, M.W., Natural convection heat transfer in a square enclosure containing water near its density maximum. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 30: 2319-2329, 1987.
- Mariani, V.C. and Belo, I.M., Numerical studies of natural convection in a square cavity, *Revista de Engenharia Térmica*, 5, N°01: 79-83, 2006.
- Patankar, S.V., *Numerical heat transfer and fluid flow*. Hemisphere, McGraw-Hill, 1980.
- Patankar, S.V. and Spalding, D.B., A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three-dimensional parabolic flows. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 15: 1787-1806, 1972.
- Peaceman, D.W. and Rachford, H.H., The numerical solution of parabolic and elliptic differential equations. *J. Soc. Industrial Applied Mathematics*, 3: 28-41, 1955.
- Seki, N., Fukusako, S. and Inaba, H., Free convective heat transfer with density inversion in a confined rectangular vessel. *Warme – und Stoffübertragung*, 11: 145-156, 1978.
- Tsai, C.W., Yang, S.J. and Hwang, G.J., Maximum density effect on laminar water pipe flow solidification. *Int. J. Heat Mass Transfer*, 41: 4251-4257, 1998.
- Vieira, G.M.R.; Braga, S.L. and Gobin, D., Análise do processo da fusão na presença de convecção natural e máximo de densidade. *XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica - COBEM*, Águas de Lindóia, São Paulo, Brasil, CD-ROM., 1999.
- Watson, A., The effect of the inversion temperature on the convection of water in an enclosed rectangular cavity. *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, XXV(4): 423-446, 1972.