

UM ESTUDO DE ALGORITMOS ASSIMÉTRICOS DE ALTA RESOLUÇÃO ACOPLADOS COM O MODELO DE TURBULÊNCIA ALGÉBRICO DE BALDWIN E LOMAX NA SOLUÇÃO DAS EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES - PARTE I

Edisson Sávio de Góes Maciel^{*} e Nide Geraldo do Couto Ramos Fico Jr[†]

^{*} Departamento de Energia Nuclear
Universidade Federal de Pernambuco
Av. Prof. Luiz Freire, 1000 – Cidade Universitária – Recife – PE – Brasil – CEP 50740-540
e-mail: edissonsavio@yahoo.com.br

[†] Instituto Tecnológico de Aeronáutica
Vila das Acácias, 50 – São José dos Campos – SP – Brasil – CEP 12228-900
e-mail: nide@ita.br

Palavras-chaves: Esquemas de Alta Resolução, Modelo de Turbulência de Baldwin e Lomax, Equações de Navier-Stokes, Volumes Finitos, Escoamentos Supersônico e Hipersônico.

Resumo. *O presente trabalho estuda algoritmos de alta resolução implementados com o modelo de turbulência de Baldwin e Lomax aplicados à resolução de problemas aeroespaciais. São estudados os algoritmos de Harten e de Radespiel e Kroll, ambos com primeira ordem de precisão espacial. São resolvidas as equações de Navier-Stokes em forma conservativa, empregando uma formulação de volumes finitos e discretização espacial estruturada, em duas dimensões. São estudados os problemas físicos dos escoamentos supersônico em torno de uma configuração simplificada do VLS (Veículo Lançador de Satélites) e hipersônico em torno da geometria de uma dupla elipse. No problema do VLS, a distribuição de $-C_p$ em torno da geometria, tanto para a solução laminar como para a solução turbulenta, gerada pelo esquema de Harten, está suavizada em relação ao esquema de Radespiel e Kroll. Os coeficientes de sustentação e de arrasto são minimizados para a solução turbulenta pelo esquema de Harten. O esquema de Radespiel e Kroll prevê os mesmos coeficientes com valores praticamente iguais à zero para o caso laminar e com valores baixos para o caso turbulento. O ângulo de ataque assumiu valor zero.*

1 INTRODUÇÃO

Algoritmos assimétricos de alta resolução têm sido desenvolvidos desde 1959, visando melhorar a qualidade da solução gerada, produzindo soluções mais precisas e códigos mais robustos. Os esquemas assimétricos de alta resolução podem ser do tipo separação de vetores de fluxo ou do tipo separação de diferenças de fluxo. No primeiro caso, algoritmos mais robustos são produzidos, enquanto maior precisão é obtida no segundo caso. Foram realizados vários estudos com algoritmos de alta resolução na literatura internacional.

Godunov¹ supôs que dados iniciais poderiam ser substituídos por um conjunto de estados constante por partes com descontinuidades em $\{x_{i+1/2}\}$. Ele encontrou a solução exata para este problema de Riemann simplificado. Depois de algum passo no tempo Δt , ele substituiu a solução exata por uma nova aproximação constante por partes, enquanto preservando propriedades integrais da variável conservada u .

Roe² apresentou um trabalho em que enfatizava que vários esquemas numéricos para solução das equações de conservação hiperbólica eram baseados em explorar a informação obtida na solução de uma seqüência de problemas de Riemann. Foi verificado que nos esquemas existentes a maior parte desta informação era degradada e que somente certos aspectos da solução eram salvos. Foi demonstrado que a informação poderia ser preservada construindo uma matriz com uma certa “propriedade U ”. Uma vez tendo construído esta matriz, seus autovalores podiam ser considerados como velocidades de onda do problema de Riemann e as projeções de U_E-U_D sobre os autovetores são os saltos que ocorrem entre estados intermediários.

Harten³ desenvolveu uma classe de novos esquemas de diferenças finitas, explícitos e com segunda ordem de precisão espacial para cálculo de soluções fracas das leis de conservação hiperbólicas. Estes esquemas altamente não lineares eram obtidos por aplicar um esquema de primeira ordem não oscilatório a uma apropriada função de fluxo modificada. Os esquemas de segunda ordem assim derivados alcançavam alta resolução enquanto preservavam a robustez do esquema de primeira ordem não oscilatório original.

Liou e Steffen⁴ proporam um novo esquema de separação de vetores de fluxo. Eles afirmaram que seu esquema era simples e sua precisão equivalia e, em alguns casos, superaria a precisão do esquema de Roe² nas soluções das equações de Euler e de Navier-Stokes. O esquema era robusto e convergia tão rapidamente quanto o esquema de Roe². Eles proporam a definição aproximada de um número de Mach de advecção na face da célula, usando valores de suas células vizinhas via velocidades características associadas. Este número de Mach de interface era então usado para determinar a extrapolação assimétrica das quantidades convectivas.

Radespiel e Kroll⁵ enfatizaram que o esquema de Liou e Steffen⁴, tinha os méritos da baixa complexidade computacional e da baixa difusão numérica quando comparado com outros métodos. Eles também mencionaram que o método original possuía várias deficiências. O método produzia oscilações de pressão locais na proximidade de choques, problemas com malha adversa e com o alinhamento do escoamento. No trabalho apresentado por Radespiel e Kroll⁵, um esquema híbrido de separação de vetores de fluxo que alternava entre o esquema de Liou e Steffen⁴ e o esquema de van Leer⁶, nas ondas de choque, é proposto, assegurando

que resoluções de choques fortes eram limpas e bem definidas.

No tocante a simulações com escoamentos turbulentos, Maciel e Fico⁷ aplicaram as equações de Navier-Stokes com média de Reynolds aos problemas dos escoamentos transônicos em um bocal convergente-divergente e em um aerofólio NACA 0012. O modelo de Baldwin e Lomax⁸ foi utilizado para descrever os efeitos da turbulência nas propriedades do escoamento. Três algoritmos foram usados: o esquema explícito de MacCormack⁹; o esquema implícito de Pulliam e Chaussee¹⁰; e o esquema explícito de Jameson, Schmidt e Turkel¹¹. No problema do aerofólio, os coeficientes aerodinâmicos tiveram seus valores maximizados no caso turbulento.

No presente trabalho, os esquemas de Harten³ e de Radespiel e Kroll⁵ são implementados, no contexto de volumes finitos e utilizando uma discretização espacial assimétrica e estruturada, para resolver as equações de Navier-Stokes no espaço bidimensional aplicadas aos problemas dos escoamentos supersônico em torno de uma versão simplificada do VLS (Veículo Lançador de Satélites Brasileiro) e hipersônico em torno de uma dupla elipse. A configuração do VLS é dita simplificada porque é uma geometria bidimensional, as regiões dos propulsores não estão descritas e o início dos propulsores é aproximado por uma rampa. Os esquemas implementados são de primeira ordem de precisão espacial. Os algoritmos são acelerados para a solução de estado estacionário fazendo uso de um passo no tempo variável espacialmente. O modelo de turbulência de Baldwin e Lomax⁸ é implementado a fim de melhorar a qualidade da solução gerada, produzindo dados mais precisos. Os resultados demonstraram que o esquema de Radespiel e Kroll⁵ produziu soluções mais realísticas do que o esquema de Harten³.

2 EQUAÇÕES DE NAVIER-STOKES

O movimento fluido é descrito pelas equações de Navier-Stokes, que expressam a conservação de massa, de quantidade de movimento e de energia para um meio viscoso, condutor de calor e compressível, na ausência de forças externas. Na forma integral e conservativa, estas equações podem ser representadas por:

$$\partial/\partial t \int_V Q dV + \int_S [(E_e - E_v)n_x + (F_e - F_v)n_y] dS = 0, \quad (1)$$

com Q escrito para um sistema Cartesiano, V é o volume da célula, n_x e n_y são as componentes do versor normal à face de fluxo, S é a área de fluxo, E_e e F_e são as componentes do vetor de fluxo convectivo e E_v e F_v são as componentes do vetor de fluxo difusivo. Os vetores Q, E_e , F_e , E_v e F_v são representados por:

$$Q = \begin{Bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ e \end{Bmatrix}, \quad E_e = \begin{Bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ (e + p)u \end{Bmatrix} \quad e \quad F_e = \begin{Bmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 + p \\ (e + p)v \end{Bmatrix}; \quad (2)$$

$$E_v = \frac{I}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xx} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xx}u + \tau_{xy}v - q_x \end{Bmatrix} \quad e \quad F_v = \frac{I}{Re} \begin{Bmatrix} 0 \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yy} \\ \tau_{xy}u + \tau_{yy}v - q_y \end{Bmatrix}; \quad (3)$$

$$\tau_{xx} = 2\mu_{efet} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}\mu_{efet} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad e \quad \tau_{xy} = \mu_{efet} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right); \quad (4)$$

$$\tau_{yy} = 2\mu_{efet} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}\mu_{efet} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad q_x = -\gamma \left(\frac{\mu}{Prd} \right)_{efet} \frac{\partial e_i}{\partial x} \quad e \quad q_y = -\gamma \left(\frac{\mu}{Prd} \right)_{efet} \frac{\partial e_i}{\partial y}, \quad (5)$$

sendo ρ a densidade do fluido; u e v as componentes Cartesianas do vetor velocidade nas direções x e y , respectivamente; e a energia total por unidade de volume do meio fluido; p a pressão estática do meio fluido; os τ 's representam as tensões viscosas para um fluido Newtoniano; os q 's representam os fluxos de calor condutivo; μ_{efet} representa a viscosidade efetiva do fluido, que é igual a soma da viscosidade molecular com a viscosidade turbulenta: $\mu_{efet} = \mu + \mu_t$; $(\mu/Prd)_{efet} = (\mu/Prd) + (\mu_t/Prd_t)$; Prd e Prd_t são os números de Prandtl laminar e turbulento, respectivamente; e_i é a energia interna do fluido, definida como $e_i = e/\rho - 0,5(u^2 + v^2)$; γ é a razão entre calores específicos; e Re é o número de Reynolds do escoamento.

Nos problemas estudados, as equações de Navier-Stokes foram adimensionalizadas em relação à densidade de escoamento não perturbado, ρ_∞ , à velocidade do som de escoamento não perturbado, a_∞ , e à viscosidade de escoamento não perturbado, μ_∞ . Assim, a densidade é adimensionalizada em relação a ρ_∞ ; as componentes de velocidade u e v são adimensionalizadas em relação a a_∞ ; a pressão, a energia total e as tensões viscosas são adimensionalizadas em relação ao produto $\rho_\infty(a_\infty)^2$; a viscosidade efetiva é adimensionalizada em relação a μ_∞ e e_i é adimensionalizada em relação a $(a_\infty)^2$. O sistema matricial de equações de Navier-Stokes é fechado com a equação de estado $p = (\gamma - 1)[e - 0,5\rho(u^2 + v^2)]$, admitindo a hipótese de gás ideal. A entalpia total é determinada por $h = [\gamma/(\gamma - 1)](p/\rho) + 0,5(u^2 + v^2)$.

A Equação (1) descreve uma relação em que a taxa temporal de variação do vetor de estado Q , dentro de um volume V , é balanceada pelo fluxo convectivo e difusivo líquido que cruza a superfície de contorno S . O domínio de cálculo é dividido em um grande número de células retangulares e a Eq. (1) é aplicada a cada célula.

3 ALGORITMO DE HARTEN

O algoritmo de Harten³, com primeira ordem de precisão espacial, fica especificado pela determinação do vetor de fluxo numérico na interface $(i+1/2, j)$. A extensão dele para a interface $(i, j+1/2)$ é direta, sem complicações adicionais.

Segundo o formalismo de volumes finitos, que é equivalente a um sistema de coordenadas

generalizadas, os volumes das células à direita e à esquerda, bem como o volume na interface, necessários a mudança de coordenadas, são definidos por:

$$V_D = V_{i+1,j}, \quad V_E = V_{i,j} \quad \text{e} \quad V_{int} = 0,5(V_D + V_E), \quad (6)$$

em que “D” e “E” representam direito e esquerdo, respectivamente. Expressões para o cálculo dos volumes de cada célula podem ser encontradas em Maciel e Azevedo¹² e em Maciel¹³. As componentes de área na interface são definidas por:

$$S_{x_int} = s'_x S \quad \text{e} \quad S_{y_int} = s'_y S. \quad (7)$$

Expressões para a área S , bem como dos versores de área s'_x e s'_y também são disponíveis em Maciel e Azevedo¹² e em Maciel¹³. Os termos de métrica para esse sistema de coordenadas generalizadas são definidos como:

$$h_x = S_{x_int} / V_{int}, \quad h_y = S_{y_int} / V_{int} \quad \text{e} \quad h_n = S / V_{int}. \quad (8)$$

As propriedades calculadas na interface de fluxo são obtidas por média aritmética ou pela média de Roe². No presente trabalho, a média aritmética foi usada:

$$\rho_{int} = 0,5(\rho_D + \rho_E), \quad u_{int} = 0,5(u_D + u_E), \quad v_{int} = 0,5(v_D + v_E) \quad \text{e} \quad H_{int} = 0,5(H_D + H_E); \quad (9)$$

$$a_{int} = \sqrt{(\gamma - 1) \left[H_{int} - 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \right]}. \quad (10)$$

Os autovalores das equações de Euler, na direção ξ , para o fluxo convectivo são dados por:

$$U_{cont} = u_{int} h_x + v_{int} h_y, \quad \lambda_1 = U_{cont} - a_{int} h_x, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = U_{cont} \quad \text{e} \quad \lambda_4 = U_{cont} + a_{int} h_x. \quad (11)$$

Os saltos das variáveis conservadas, necessários à construção da função de dissipação de Harten³, são dados por:

$$\begin{aligned} \Delta e &= V_{int} (e_D - e_E), \quad \Delta \rho = V_{int} (\rho_D - \rho_E) \quad \text{e} \quad \Delta(\rho u) = V_{int} [(\rho u)_D - (\rho u)_E]; \\ \Delta(\rho v) &= V_{int} [(\rho v)_D - (\rho v)_E]. \end{aligned} \quad (12)$$

Os vetores α para a interface $(i+1/2,j)$ são calculados pelas seguintes expressões:

$$\alpha_1 = 0,5(aa - bb), \quad \alpha_2 = \Delta \rho - aa, \quad \alpha_3 = cc \quad \text{e} \quad \alpha_4 = 0,5(aa + bb), \quad (13)$$

com:

$$aa = (\gamma - 1) / a_{int}^2 [\Delta e + 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) \Delta \rho - u_{int} \Delta(\rho u) - v_{int} \Delta(\rho v)]; \quad (14)$$

$$bb = 1 / a_{int} [h'_x \Delta(\rho u) - (h'_x u_{int} + h'_y v_{int}) \Delta \rho + h'_y \Delta(\rho v)]; \quad (15)$$

$$cc = h'_x \Delta(\rho v) + (h'_y u_{int} - h'_x v_{int}) \Delta \rho - h'_y \Delta(\rho u); \quad (16)$$

$$h'_x = h_x / h_n \quad \text{e} \quad h'_y = h_y / h_n. \quad (17)$$

A função de dissipação de Harten³ é construída utilizando a seguinte matriz:

$$R = \begin{bmatrix} I & I & 0 & I \\ u_{int} - h'_x a_{int} & u_{int} & -h'_y & u_{int} + h'_x a_{int} \\ v_{int} - h'_y a_{int} & v_{int} & h'_x & v_{int} + h'_y a_{int} \\ H_{int} - h'_x u_{int} a_{int} - h'_y v_{int} a_{int} & 0,5(u_{int}^2 + v_{int}^2) & h'_x v_{int} - h'_y u_{int} & H_{int} + h'_x u_{int} a_{int} + h'_y v_{int} a_{int} \end{bmatrix}. \quad (18)$$

A condição de entropia é implementada da seguinte forma:

$$v_l = \Delta t \lambda_l = Z_l; \quad (19)$$

$$\psi_l = \begin{cases} |Z_l|, & \text{se } |Z_l| \geq \delta_f \\ 0,5(Z_l^2 + \delta_f^2) / \delta_f, & \text{se } |Z_l| < \delta_f \end{cases}, \quad (20)$$

com “l” variando de 1 até 4 (espaço bidimensional) e δ_f assumindo valores entre 0,1 e 0,5, sendo 0,2 o valor recomendado por Harten³.

Finalmente, a função de dissipação de Harten³ é construída pelo seguinte produto matriz-vetor:

$$\{D_{Harten}\}_{i,j} = [R]_{i,j} \left\{ \frac{\psi \alpha}{\Delta t} \right\}_{i,j}. \quad (21)$$

O vetor de fluxo numérico convectivo para a interface (i+1/2,j) é descrito por:

$$F_{i+1/2,j}^{(l)} = (E_{int}^{(l)} h_x + F_{int}^{(l)} h_y) V_{int} + 0,5 D_{Harten}^{(l)}, \quad (22)$$

com:

$$E_{int}^{(l)} = 0,5(E_D^{(l)} + E_E^{(l)}) \quad \text{e} \quad F_{int}^{(l)} = 0,5(F_D^{(l)} + F_E^{(l)}). \quad (23)$$

A integração no tempo segue o método da separação temporal (do inglês: “time splitting”), que a divide em dois passos, cada um associado a uma direção coordenada específica. No passo inicial, é possível escrever:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{i,j}^* &= -\Delta t / V_{i,j} (F_{i+1/2,j}^n - F_{i-1/2,j}^n); \\ Q_{i,j}^* &= Q_{i,j}^n + \Delta Q_{i,j}^*; \end{aligned} \quad (24)$$

e no passo final:

$$\begin{aligned}\Delta Q_{i,j}^{n+1} &= -\Delta t / V_{i,j} (F_{i,j+1/2}^* - F_{i,j-1/2}^*); \\ Q_{i,j}^{n+1} &= Q_{i,j}^* + \Delta Q_{i,j}^{n+1}. \end{aligned} \quad (25)$$

O termo difusivo é tratado de forma centrada, utilizando o teorema de Green para cálculo dos gradientes das tensões viscosas (detalhes em Maciel¹³). O termo difusivo é subtraído do vetor de fluxo convectivo na Eq. (23).

4 ALGORITMO DE RADESPIEL E KROLL

A aproximação da equação integral (1) para um volume finito retangular produz um sistema de equações diferenciais ordinárias com respeito ao tempo:

$$V_{i,j} \frac{\partial Q_{i,j}}{\partial t} = -R_{i,j}, \quad (26)$$

com $R_{i,j}$ representando o fluxo líquido (resíduo) de conservação da massa, da quantidade de movimento e da energia no volume $V_{i,j}$. O resíduo é calculado como:

$$R_{i,j} = R_{i+1/2,j} - R_{i-1/2,j} + R_{i,j+1/2} - R_{i,j-1/2}, \quad (27)$$

com $R_{i+1/2,j} = R_{i+1/2,j}^c - R_{i+1/2,j}^d$, em que “c” e “d” dizem respeito as contribuições convectivas e difusivas do escoamento, respectivamente.

Como mostrado em Liou e Steffen⁴, o fluxo convectivo discreto calculado pelo esquema AUSM (do inglês: “Advection Upstream Splitting Method”) pode ser interpretado como uma soma da média ponderada pelo número de Mach dos estados à esquerda (E) e à direita (D) da face da célula $(i+1/2,j)$, entre os pontos (i,j) e $(i+1,j)$, e um termo dissipativo escalar. Assim,

$$R_{i+1/2,j} = |S|_{i+1/2,j} \left(\frac{1}{2} M_{i+1/2,j} \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_E + \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_D \right) - \frac{1}{2} \phi_{i+1/2,j} \left(\begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_D - \begin{bmatrix} \rho a \\ \rho a u \\ \rho a v \\ \rho a H \end{bmatrix}_E \right) \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ S_x p \\ S_y p \\ 0 \end{bmatrix}_{i+1/2,j}, \quad (28)$$

em que $S_{i+1/2,j} = [S_x \ S_y]_{i+1/2,j}^T$ define o vetor de área normal à superfície $(i+1/2,j)$. A grandeza “a” representa a velocidade do som. $M_{i+1/2,j}$ define o número de Mach advectivo na face $(i+1/2,j)$ da célula (i,j) , que é calculado de acordo com Liou e Steffen⁴ como:

$$M_{i+1/2,j} = M_E^p + M_D^m, \quad (29)$$

em que os números de Mach separados $M^{p/m}$ são definidos por van Leer⁶:

$$M^p = \begin{cases} M, & \text{se } M \geq 1; \\ \frac{1}{4}(M+1)^2, & \text{se } |M| < 1; \\ 0, & \text{se } M \leq -1; \end{cases} \quad \text{e} \quad M^m = \begin{cases} 0, & \text{se } M \geq 1; \\ -\frac{1}{4}(M-1)^2, & \text{se } |M| < 1; \\ M, & \text{se } M \leq -1. \end{cases} \quad (30)$$

M_E e M_D representam o número de Mach associado com os estados à esquerda e à direita, respectivamente. O número de Mach de advecção é definido por:

$$M = \frac{1}{|S|} \frac{(S_x u + S_y v)}{a}. \quad (31)$$

A pressão na face $(i+1/2,j)$ de célula (i,j) é calculada de forma similar:

$$p_{i+1/2,j} = p_E^p + p_D^m, \quad (32)$$

com $p^{p/m}$ denotando a separação de pressão definida de acordo com van Leer⁶:

$$p^p = \begin{cases} p, & \text{se } M \geq 1; \\ \frac{1}{4} p (M+1)^2 (2-M), & \text{se } |M| < 1; \\ 0, & \text{se } M \leq -1; \end{cases} \quad \text{e} \quad p^m = \begin{cases} 0, & \text{se } M \geq 1; \\ \frac{1}{4} p (M-1)^2 (2+M), & \text{se } |M| < 1; \\ p, & \text{se } M \leq -1. \end{cases} \quad (33)$$

A definição do termo dissipativo ϕ determina a formulação particular dos fluxos convectivos. Um esquema híbrido é proposto por Radespiel e Kroll⁵, que combina o esquema de van Leer⁶ e o de Liou e Steffen⁴ (AUSM). Assim,

$$\phi_{i+1/2,j} = (1 - \omega)\phi_{i+1/2,j}^{VL} + \omega\phi_{i+1/2,j}^{LS}, \quad (34)$$

com:

$$\phi_{i+1/2,j}^{VL} = \begin{cases} |M_{i+1/2,j}|, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| \geq 1; \\ |M_{i+1/2,j}| + \frac{1}{2}(M_D - 1)^2, & \text{se } 0 \leq M_{i+1/2,j} < 1; \\ |M_{i+1/2,j}| + \frac{1}{2}(M_E + 1)^2, & \text{se } -1 < M_{i+1/2,j} \leq 0; \end{cases} \quad (35)$$

$$\phi_{i+1/2,j}^{LS} = \begin{cases} |M_{i+1/2,j}|, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| > \tilde{\delta} \\ \frac{(|M_{i+1/2,j}|)^2 + \tilde{\delta}^2}{2\tilde{\delta}}, & \text{se } |M_{i+1/2,j}| \leq \tilde{\delta}, \end{cases} \quad (36)$$

em que $\tilde{\delta}$ é um parâmetro pequeno, $0 < \tilde{\delta} \leq 0,5$ e ω é uma constante, $0 \leq \omega \leq 1$.

As equações acima claramente mostram que para um número de Mach da face da célula supersônico, o esquema híbrido representa uma discretização puramente assimétrica (do inglês: “upwind”), utilizando ou o estado à esquerda ou o estado à direita para os termos convectivos e de pressão, dependendo do sinal do número de Mach. Para $\omega = 0$, o método é reduzido ao clássico esquema de separação de vetores de fluxo de van Leer⁶. No caso $\omega = 1$ e $\tilde{\delta} = 0$, o esquema AUSM original de Liou e Steffen⁴ é recuperado. No presente trabalho, o valor de ω adotado para as simulações foi 0,5. A integração no tempo segue o método descrito no esquema de Harten³ (Eqs. 24 e 25).

5 MODELO DE TURBULÊNCIA DE BALDWIN E LOMAX

O problema da simulação turbulenta está no cálculo da tensão de Reynolds. Expressões envolvendo flutuações de velocidade, oriundas do processo de média, representam seis novas incógnitas. Porém, o número de equações permanece o mesmo e o sistema não é fechado. A função da modelagem é desenvolver aproximações para estas correlações. Neste trabalho, o modelo de Baldwin and Lomax⁸ foi usado. Para o cálculo da viscosidade turbulenta, a camada limite é dividida em interna e externa. Na camada interna, $\mu_{Ti} = \rho l_{mis}^2 \|\omega\|$ e $l_{mis} = \kappa y (1 - e^{-y^+/A_0^+})$. Na camada externa, $\mu_{Te} = \rho \alpha C_{cp} F_{esteira} F_{Kleb} (y; y_{max} / C_{Kleb})$, com $F_{esteira} = MIN[y_{max} F_{max}; C_{wk} y_{max} U_{dif}^2 / F_{max}]$ e $F_{max} = I / \kappa \left[MAX_y(l_{mis} \|\omega\|) \right]$. Assim, y_{max} é o valor de y para o qual $l_{mis} \|\omega\|$ atinge o seu valor máximo e l_{mis} é o comprimento de mistura de Prandtl. Os valores das constantes são: $\kappa = 0,4$, $\alpha = 0,0168$, $A_0^+ = 26$, $C_{cp} = 1,6$, $C_{Kleb} = 0,3$ e $C_{wk} = 1$. F_{Kleb} é a função de intermitência de Klebanoff dada por

$F_{Kleb}(y) = \left[1 + 5.5(C_{Kleb} y / y_{max})^6 \right]^{-1}$, sendo $\|\omega\|$ a magnitude do vetor vorticidade e U_{dif} o valor máximo da velocidade no caso da camada limite. Para camadas de cisalhamento livre, $U_{dif} = \left(\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \right)_{max} - \left(\sqrt{U^2 + V^2 + W^2} \right)_{y=y_{max}}$.

6 PASSO NO TEMPO VARIÁVEL ESPACIALMENTE

A idéia básica deste procedimento consiste em manter constante o número de CFL em todo o domínio de cálculo, permitindo, assim, o uso de passos no tempo apropriados para cada região específica da malha durante o processo de convergência. Desta forma, e de acordo com a definição do número de CFL, é possível escrever:

$$\Delta t_{i,j} = CFL(\Delta s)_{i,j} / c_{i,j}, \quad (37)$$

em que CFL é o número de “Courant-Friedrichs-Lewy” para prover estabilidade numérica ao esquema; $c_{i,j} = \left[(u^2 + v^2)^{0,5} + a \right]_{i,j}$ é a velocidade característica máxima de propagação de informações no domínio de cálculo; e $(\Delta s)_{i,j}$ é um comprimento característico de transporte de informações. Em um contexto de volumes finitos, $(\Delta s)_{i,j}$ é escolhido como o menor valor encontrado entre a menor distância de centróides, envolvendo a célula (i,j) e um vizinho, e o menor comprimento de lado da célula.

7 CONDIÇÕES INICIAIS E DE CONTORNOS

7.1 Condições Iniciais

Para o problema físico estudado neste trabalho, valores de escoamento não perturbado são adotados para todas as propriedades como condição inicial, em todo o domínio de cálculo (Maciel e Azevedo¹² e Jameson e Mavriplis¹⁴). Por isso, o vetor de variáveis conservadas é definido como:

$$Q_{i,j} = \left\{ 1 \quad M_\infty \cos \alpha \quad M_\infty \sin \alpha \quad \frac{1}{\gamma(\gamma-1)} + 0,5M_\infty^2 \right\}^T, \quad (38)$$

sendo M_∞ o número de Mach de escoamento não perturbado e α o ângulo de ataque do escoamento.

7.2 Condições de Contornos

As condições de contorno são basicamente de três tipos: parede sólida, entrada e saída. Estas condições são implementadas em células fantasmas e são descritas em detalhes em Maciel e Fico⁷, Maciel¹³ e Maciel e Azevedo^{15,16}.

8 RESULTADOS

Resultados foram considerados convergidos quando houve queda de 3 ordens de magnitude no valor do resíduo máximo. O valor usado para γ foi 1,4, para Prd foi 0,72 e Prd_t foi 0,9. Para todos os problemas, o ângulo de ataque foi adotado igual a 0,0. O número de CFL, usado nas simulações, foi sempre igual a 0,5.

8.1 Problema Físico do VLS Simplificado

Para este problema foi usada uma malha gerada algebricamente de 253x80, com 10% de estiramento exponencial na direção η (esta malha equivale em volumes finitos a sendo constituída de 19.908 volumes retangulares e 20.240 nós). A condição inicial adotou um número de Mach de escoamento não perturbado igual a 4,0, altitude de vôo de 20.000m, comprimento característico da configuração igual a 3,76m e número de Reynolds igual a $2,775 \times 10^7$.

O esquema numérico de Harten³, com primeira ordem de precisão espacial, simulou este problema físico para o escoamento laminar convergindo em 693 iterações. O custo computacional deste algoritmo para o caso laminar é de 0,0000658s. O caso turbulento convergiu em 690 iterações. O custo computacional com o modelo de turbulência subiu para 0,0000824s, resultando em um aumento de 25,2% no custo do algoritmo.

O esquema numérico de Radespiel e Kroll⁵, com primeira ordem de precisão espacial, simulou este problema físico para o escoamento laminar convergindo em 986 iterações. O custo computacional deste algoritmo para o caso laminar é de 0,0000612s. O caso turbulento convergiu em 930 iterações. No caso turbulento, o custo foi de 0,0000782s. Seu custo relativo à solução laminar apresentou um aumento de 27,8%. Ou seja, os dois algoritmos apresentam um aumento do custo com o modelo de turbulência aproximadamente igual, com ligeira melhora para o esquema de Harten³.

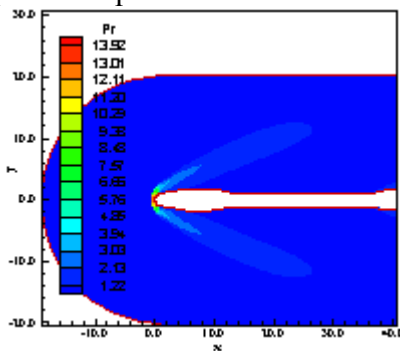


Figura 1. Campo de pressão (H^3/L).

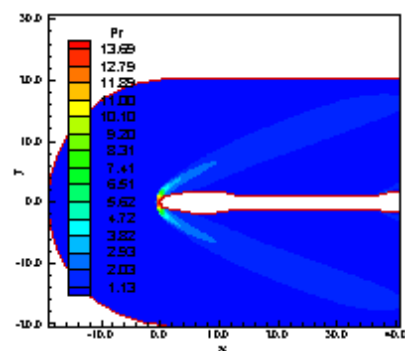


Figura 2. Campo de pressão (RK^5/L).

As Figuras 1 e 2 exibem os contornos de pressão para a solução laminar, obtidos pelos esquemas de Harten³ e de Radespiel e Kroll⁵, respectivamente. O pico de pressão no nariz da configuração simplificada do VLS é mais acentuado na solução gerada pelo esquema de Harten³. O campo de pressão também é mais intenso na solução gerada por este algoritmo.

As Figuras 3 e 4 exibem os campos de pressão gerados pelos esquemas de Harten³ e de Radespiel e Kroll⁵ para o caso turbulento. O campo mais intenso continua na solução gerada pelo esquema de Harten³.

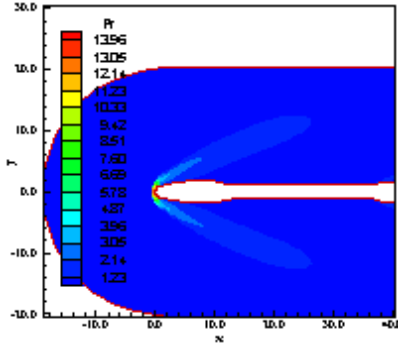


Figura 3. Campo de pressão (H^3/T).

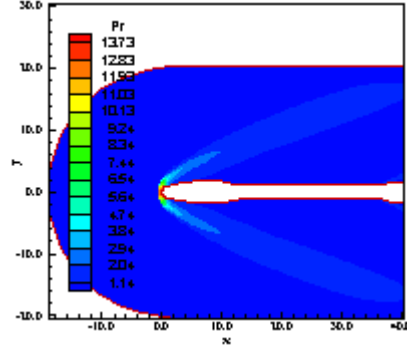


Figura 4. Campo de pressão (RK^5/T).

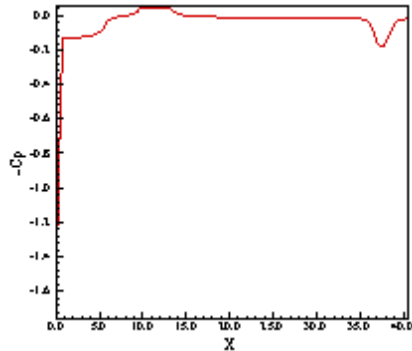


Figura 5. Distribuição de $-C_p$ (H^3/L).

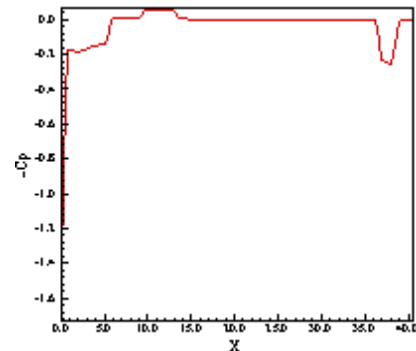


Figura 6. Distribuição de $-C_p$ (RK^5/L).

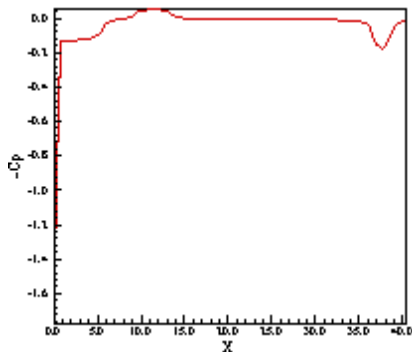


Figura 7. Distribuição de $-C_p$ (H^3/T).

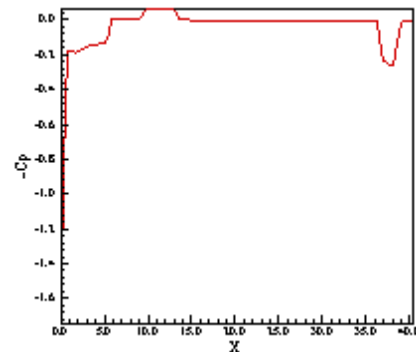


Figura 8. Distribuição de $-C_p$ (RK^5/T).

As Figuras 5 e 6 exibem as soluções dos algoritmos de Harten³ e de Radespiel e Kroll⁵ para a distribuição de $-C_p$ em torno da configuração do VLS. Como pode ser notado, a solução do algoritmo de Radespiel e Kroll⁵ é menos suavizada do que a respectiva solução gerada pelo esquema de Harten³. A recuperação de pressão próxima aos propulsores do VLS

é mais pronunciada na solução gerada pelo esquema de Radespiel e Kroll⁵. Nas Figuras 7 e 8, soluções geradas pelos esquemas para o caso turbulento, o mesmo comportamento é visto.

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e de arrasto são calculados neste trabalho para os dois problemas físicos estudados. Eles são definidos conforme segue abaixo:

$$C_p = (p_r - p_{r_\infty}) / (1/2 \rho_\infty V_\infty^2), \quad (39)$$

em que V_∞ é o módulo da velocidade de escoamento não perturbado. Os coeficientes de pressão normal e axial são definidos por:

$$C_{pn} = C_{pl} - C_{pu} \quad \text{e} \quad C_{pa} = C_{pu} - C_{pl}, \quad (40)$$

em que C_{pl} e C_{pu} são os coeficientes de pressão na parte inferior (intradorso) da geometria e na parte superior (extradorso) da geometria, respectivamente. As componentes de pressão normal e axial são definidos por:

$$C_n = \sum_{i=1}^{i_{max}} C_{pn_{i,1}} \Delta x_{i,1} / c \quad \text{e} \quad C_{axial} = \sum_{i=1}^{i_{max}} C_{pa_{i,1}} \Delta y_{i,1} / c, \quad (41)$$

em que c é a distância entre os pontos $(x,y) = (1,1)$ e o ponto $(x,y) = ((i_{max}+1)/2,1)$. Finalmente, os coeficientes de pressão e de arrasto (arrasto devido à pressão) são calculados por:

$$C_s = C_n \times \cos(\alpha) - C_{axial} \times \sin(\alpha) \quad \text{e} \quad C_a = C_n \times \sin(\alpha) + C_{axial} \times \cos(\alpha). \quad (42)$$

Os resultados apresentados neste trabalho para c_s e c_a não foram comparados com experimentos ou outros dados numéricos. Esta fase de comparação de resultados ocorrerá futuramente. No momento, os autores estão enfatizando a implementação numérica realizada, a apropriada descrição dos fenômenos físicos esperados de serem capturados e a qualidade da solução obtida. A quantificação dos resultados é obtida pelas tabelas nas curvas de contorno, pela distribuição de $-C_p$ e pelo cálculo dos coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto.

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e de arrasto obtidos pelo esquema de Harten³, para o caso laminar são: $c_s = 0,0000383$ e $c_a = 0,0000436$. No caso turbulento, seus valores passaram a: $c_s = 0,0000351$ e $c_a = 0,0000429$. Ou seja, redução de 8,4% no coeficiente de sustentação e de 1,6% no coeficiente de arrasto. Para o esquema de Radespiel e Kroll⁵, caso laminar, os coeficientes foram de: $c_s = 0,0$ e $c_a = 0,0$ para a precisão de até sete casas decimais. Este resultado é esperado uma vez que a geometria é simétrica e o ângulo de ataque é igual a zero. Os resultados da simulação turbulenta apresentaram valores de $c_s = 0,0000012$ e $c_a = 0,0000197$. Estes valores são cerca de 96,6%, no caso do coeficiente de sustentação, e 54,1%, no caso do coeficiente de arrasto, mais baixos que os respectivos

valores gerados pelo esquema de Harten³, para o caso turbulento. É possível, então, perceber que a solução gerada pelo esquema de Radespiel e Kroll⁵ é mais precisa do que a de Harten³, no tocante aos coeficientes aerodinâmicos de sustentação e arrasto.

8.2 Problema Físico da Dupla Elipse

Para este problema foi usada uma malha gerada algebricamente de 125x80, com 10% de estiramento exponencial na direção η . Esta malha equivale em volumes finitos a sendo constituída de 9.796 volumes retangulares e 10.000 nós. A condição inicial adotou um número de Mach de escoamento não perturbado igual a 10,0, altitude de vôo de 40.000m, comprimento característico da configuração igual a 5,0m e número de Reynolds $3,960 \times 10^6$.

O esquema numérico de Harten³ simulou este problema físico para o escoamento laminar convergindo em 1.630 iterações e para o caso turbulento convergindo em 1.231 iterações. O esquema numérico de Radespiel e Kroll⁵ simulou este problema físico para o escoamento laminar convergindo em 2.194 iterações. O caso turbulento convergiu em 2.054 iterações.

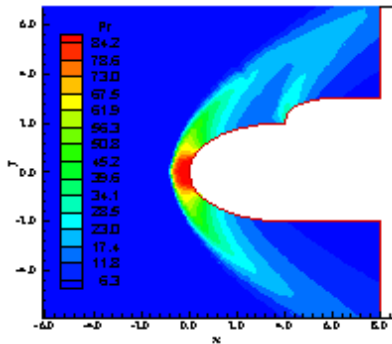


Figura 9. Campo de pressão (H^3/L).

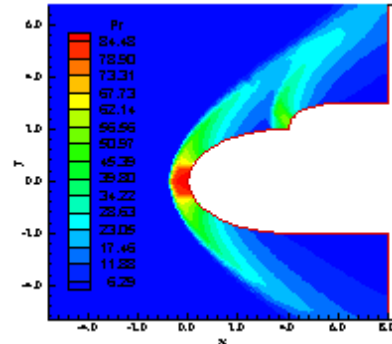


Figura 10. Campo de pressão (RK^5/L).

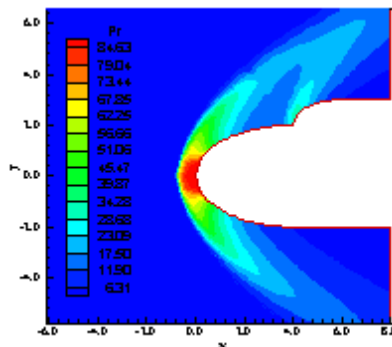


Figura 11. Campo de pressão (H^3/T).

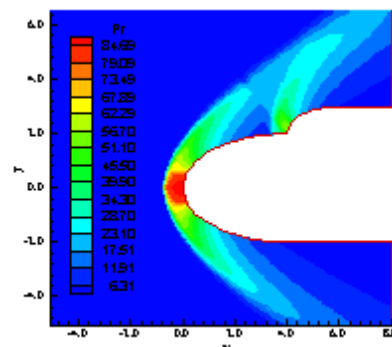


Figura 12. Campo de pressão (RK^5/T).

Neste problema físico, o campo de pressão laminar, representado pelas Figs. 9 e 10, apresentou uma inversão de comportamento, sendo mais intenso o campo gerado pelo esquema de Radespiel e Kroll⁵. A solução turbulenta, Figs. 11 e 12, apresentou o mesmo comportamento em favor do esquema de Radespiel e Kroll⁵.

A distribuição de $-C_p$, nas Figs. 13 e 14 (caso laminar), apresentou um ganho de pressão no nariz da dupla elipse igual para ambos os esquemas e mais pronunciado no esquema de Radespiel e Kroll⁵, em $x = 4,0m$, onde ocorre o segundo choque. É possível perceber a atenuação maior do segundo choque na solução gerada pelo esquema de Harten³. A solução turbulenta apresentada nas Figs. 15 e 16 retificam o comportamento da solução laminar. Nas Figuras de 13 até 16, são exibidas as curvas de $-C_p$ no intradorso e no extradorso da geometria. A curva que apresenta o segundo choque (segundo pico para baixo) corresponde à solução no extradorso e a outra curva, por eliminação, a solução no intradorso.

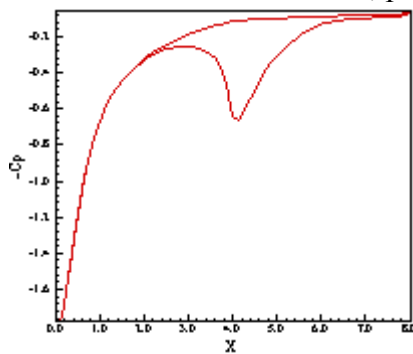


Figura 13. Distribuição de $-C_p$ (H^3/L).

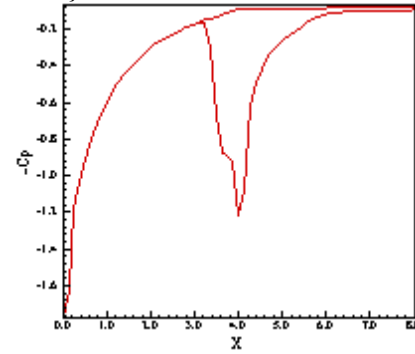


Figura 14. Distribuição de $-C_p$ (RK^5/L).

Os coeficientes aerodinâmicos de sustentação e de arrasto neste problema para o caso laminar e utilizando o esquema de Harten³ apresentaram os seguintes valores: $c_S = -0,0952$ e $c_A = -0,00143$. No caso turbulento, os valores foram de $c_S = -0,0895$ e $c_A = -0,00073$. Novamente uma redução nos valores dos coeficientes aerodinâmicos em cerca de 6% no coeficiente de sustentação e de 49% no coeficiente de arrasto.

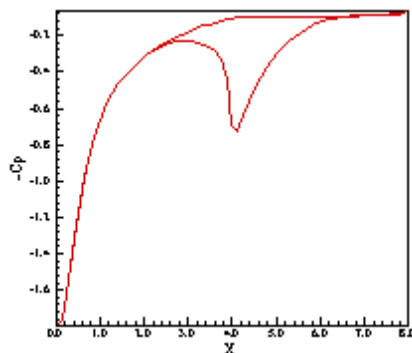


Figura 15. Distribuição de $-C_p$ (H^3/T).

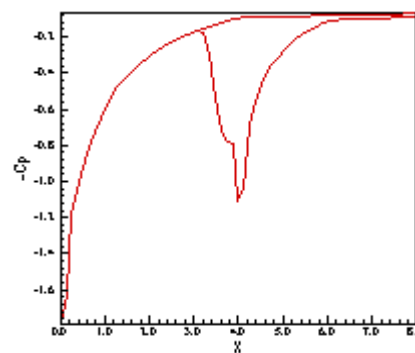


Figura 16. Distribuição de $-C_p$ (RK^5/T).

Na análise dos mesmos coeficientes com o esquema de Radespiel e Kroll⁵, os resultados foram os seguintes: $c_S = -0,1332$ e $c_A = -0,00259$ no caso laminar e $c_S = -0,1275$ e $c_A = -0,00219$ no caso turbulento.

Como pode ser visto por estes resultados, a dupla elipse sofre a ação de uma resultante de

pressão para baixo, o que causa os c_s 's negativos. Isto é razoável tendo em vista o segundo choque que se forma no extradorso da dupla elipse. Os resultados mostram que o esquema de Radespiel e Kroll⁵ prevê um c_s mais intenso do que o de Harten³. O aumento no valor de c_s , para o caso turbulento, foi de 42,5% em favor do esquema de Radespiel e Kroll⁵, relativamente a Harten³.

É possível concluir que o esquema de Radespiel e Kroll⁵, um esquema de separação de vetores de fluxo, apresenta soluções mais precisas, caso do VLS, e mais severas, caso da dupla elipse, do que o esquema de Harten³, um esquema tipo separação de diferenças de fluxo TVD.

9 CONCLUSÕES

O presente trabalho visou um estudo dos esquemas assimétricos de alta resolução de Harten³ e de Radespiel e Kroll⁵, utilizando o modelo de turbulência de Baldwin e Lomax⁸, aplicados a problemas aeroespaciais. Os esquemas são de primeira ordem de precisão espacial, sendo o esquema de Harten³ do tipo separação de diferenças de fluxo TVD e o esquema de Radespiel e Kroll⁵ do tipo separação de vetores de fluxo. Ambos os esquemas foram aplicados à solução dos problemas físicos do escoamento supersônico em torno de uma configuração simplificada do VLS e do escoamento hipersônico em torno de uma configuração de dupla elipse.

Os resultados mostraram que o esquema de Radespiel e Kroll⁵, aliado ao modelo de turbulência de Baldwin e Lomax⁸, apresentou resultados mais precisos, caso do VLS, e mais severos, caso da dupla elipse, do que os obtidos com o esquema de Harten³. Para o problema da dupla elipse, o aumento no valor de c_s , previsto pelo modelo de turbulência, para o esquema de Radespiel e Kroll⁵, foi cerca de 42,5% mais intenso do que o previsto pelo mesmo modelo para o esquema de Harten³.

Em termos de custo adicional com a introdução do modelo de turbulência, ambos os esquemas apresentaram custos acima de 25% e abaixo de 28%, o que não penaliza severamente os algoritmos de solução.

10 REFERÊNCIAS

- [1] S. K. Godunov, "A Finite Difference Method for the Numerical Computation of Discontinuous Solutions of the Equations of Fluid Dynamics", *Math. Sb.*, Vol. 47, p. 271 (1959).
- [2] P. L. Roe, "Approximate Riemann Solvers, Parameter Vectors, and Difference Schemes", *Journal of Computational Physics*, Vol. 43, pp. 357-372 (1981).
- [3] A. Harten, "High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws", *Journal of Computational Physics*, Vol. 49, pp. 357-393 (1983).
- [4] M. Liou e C. J. Steffen Jr., "A New Flux Splitting Scheme", *Journal of Computational Physics*, Vol. 107, pp. 23-39 (1993).
- [5] R. Radespiel e N. Kroll, "Accurate Flux Vector Splitting for Shocks and Shear Layers", *Journal of Computational Physics*, Vol. 121, pp. 66-78 (1995).
- [6] B. van Leer, "Flux-Vector Splitting for the Euler Equations", *Proceedings of the 8th*

- International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics*, E. Krause, Editor, Lecture Notes in Physics, Vol. 70, Springer-Verlag, Berlin (1982).
- [7] E. S. G. Maciel e N. G. C. R. Fico Jr., “Estudos de Escoamentos Turbulentos Utilizando o Modelo de Baldwin e Lomax e Comparação entre Algoritmos Explícitos e Implícitos”, *Anais do III Congresso Nacional de Engenharia Mecânica (III CONEM)*, Manaus, AM (publicação em CD-ROM sem numeração de páginas) (2004).
- [8] B. S. Baldwin e H. Lomax, “Thin Layer Approximation and Algebraic Model for Separated Turbulent Flows”, *AIAA Paper 78-257* (1978).
- [9] R. W. MacCormack, “The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering”, *AIAA Paper 69-354* (1969).
- [10] T. H. Pulliam e D. S. Chaussee, “A Diagonal Form of an Implicit Approximate-Factorization Algorithm”, *Journal of Computational Physics*, Vol. 39, pp 347-363 (1981).
- [11] A. Jameson, W. Schmidt e E. Turkel, “Numerical Solution of the Euler Equations by Finite Volume Methods Using Runge-Kutta Time Stepping Schemes”, *AIAA Paper 81-1259* (1981).
- [12] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Solution of Aerospace Problems Using Structured and Unstructured Strategies”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XXIII, No. 2, pp. 155-178 (2001).
- [13] E. S. G. Maciel, “Simulação Numérica de Escoamentos Supersônicos e Hipersônicos Utilizando Técnicas de Dinâmica dos Fluidos Computacional”, *Tese de Doutorado*, ITA, CTA, São José dos Campos, SP, Brasil, 258 p (2002).
- [14] A. Jameson e D. Mavriplis, “Finite Volume Solution of the Two-Dimensional Euler Equations on a Regular Triangular Mesh”, *AIAA Journal*, Vol. 24, No. 4, pp. 611-618 (1986).
- [15] E. S. G. Maciel e J. L. F. Azevedo, “Comparação entre Vários Algoritmos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *Anais do 14th Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica* (disponível em CD-ROM), Bauru, SP, Brasil (1997).
- [16] E. S. G. Maciel e J. L. F., Azevedo, “Comparação entre Vários Esquemas Implícitos de Fatoração Aproximada na Solução das Equações de Navier-Stokes”, *RBCM- Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences*, Vol. XX, No. 3, pp. 353-380 (1998).

11 AGRADECIMENTOS

O primeiro autor agradece ao CNPq pelo apoio financeiro concedido na forma de bolsa de estudos sob o no. de processo 304318/2003-5, DCR/1F. O segundo autor agradece o apoio financeiro concedido através de bolsa de produtividade em pesquisa, processo 303327/2004-9.