

CONSIDERACIÓN DE DIFERENTES VARIANTES SOBRE EL DOMINIO DE PLACAS CANTILEVER ANISÓTROPAS Y SU INCIDENCIA EN LAS VIBRACIONES LIBRES

Patricia M. Ciancio^a, Carlos A. Rossit^b

^a*Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, Av. Del Valle 5737, 7400 Olavarría, Argentina, pciancio@fio.unicen.edu.ar,*

^b*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, carossit@criba.edu.ar
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)*

Palabras clave: Vibraciones libres, placa cantilever anisótropa, masa adosada, placa con hueco

Resumen. Los materiales de uso común en la industria moderna presentan características que son propias en la descripción de sólidos anisótropos, ya sea por su naturaleza misma o por procesos de fabricación. Esta condición los dota de características en el comportamiento estructural de relevante interés tecnológico. Abordar una problemática dentro del campo de la dinámica estructural trae aparejada la consideración de modelos matemáticos en general complejos, aún en los casos en que la geometría considerada sea sencilla. Esto conlleva la necesidad de utilizar métodos aproximados para dar solución a las ecuaciones gobernantes del problema en estudio que no presentan una solución exacta. Si a esto se suma la consideración de diversas variantes en el dominio como presencia de huecos, incorporación de elementos electromecánicos, o una combinación de ambos, el grado de complejidad en el análisis aumenta. No son numerosos los trabajos en esta temática que se han encontrado en la literatura científica. En su mayoría se refieren a placas simplemente apoyadas o con otras formas geométricas.

En este trabajo se analizan las vibraciones libres de placas rectangulares anisótropas cantilever, con distintas variantes en su dominio, como por ejemplo la presencia de agujeros, adiciones de elementos que representan la operatividad de motores, y una combinación de ambos. Se emplea al efecto el método variacional de Ritz, utilizando en la función aproximante del desplazamiento a las denominadas funciones viga. Esto permite vislumbrar la performance de la placa estudiada frente a la placa maciza anisótropa. Asimismo para observar la incidencia que ejerce sobre los parámetros estudiados el cambio de las propiedades mecánicas se consideran dos tipos de materiales, uno con propiedades anisótropas arbitrarias y otro que responde a un material anisótropo real como el boron-epoxy.

1 INTRODUCCIÓN

En la dinámica de las estructuras son vastos y variados los sistemas estructurales con los que se confrontan los diseñadores en la práctica ingenieril y es un hecho reconocido la creciente utilización de materiales de anisotropía generalizada. Puede afirmarse que dicho crecimiento es cada vez más acelerado en virtud de los constantes desarrollos de nuevos materiales así como de la necesidad de diseñar estructuras livianas de alta rigidez.

El estudio de sistemas estructurales compuestos por dichos materiales en un escenario de operación donde las variables dinámicas juegan un papel fundamental, es de gran interés en múltiples situaciones tecnológicas.

Es un hecho relativamente habitual en la ingeniería que los elementos estructurales se sometan a procesos de soldadura, lo cual puede causar un efecto de anisotropía localizado. Asimismo, cabe mencionar los sistemas conformados por motores que operan sobre elementos estructurales de tipo placas, o perforaciones que deben practicarse en ese tipo de elementos para permitir la operatoria de un proceso industrial.

Las particularidades mencionadas en la geometría de las placas hacen que, en cada caso, el sistema vibrante sea diferente y por ende su respuesta en el comportamiento dinámico ante una perturbación.

Trabajos pioneros sobre vibraciones de placas anisotrópicas comenzaron su aparición a fines de la década del 60, debiéndose mencionar las contribuciones de Ashton ([Ashton,1969](#), [Ashton y Anderson,1969](#) y [Ashton y Waddoups,1969](#))

Es de interés mencionar el hecho que el clásico tratado de [Lekhnitskii \(1968\)](#) no presenta solución de problema alguno sobre placas anisótropas, a lo sumo de ortótropas. Es por ello que para su tratamiento se recurre a la utilización de métodos aproximados. A ello se suma que en el ámbito de la teoría clásica de placas, el caso de bordes libres ofrece considerables dificultades, lo que puede abordarse haciendo uso del método de Ritz.

En este trabajo se analizan las vibraciones transversales libres de placas rectangulares anisótropas que constituyen por sí mismas paneles para la conducción de tuberías o cables, en cuyo caso dichas placas presentan huecos; también se analiza la existencia de una masa adosada rígidamente sobre la placa para modelar un elemento de tipo electro-mecánico y una combinación de las situaciones anteriores. Las condiciones de sustentación corresponden a la de una placa cantilever. Se determinan los primeros coeficientes de frecuencias naturales y las correspondientes formas modales para algunos de los casos que se analizan.

En la literatura técnico-científica, no son numerosos los trabajos sobre vibraciones transversales libres de placas rectangulares anisótropas con complejidades adicionales como las mencionadas; la mayoría de ellos están referidos a placas sustentadas con la clásica condición de simplemente apoyada ([Larrondo et al. 1998, 1999](#), [Bambill et al., 2002](#)). Asimismo existen, para esa condición de apoyo, algunas contribuciones en su mayoría referidas a placas isotrópicas con huecos, con inclusiones ortótropas, con masas adosadas ([Avalos et al., 1999](#), [Ciancio et al., 2003](#)). En el caso de otras condiciones de borde, se consignan los trabajos de los autores, referidos a placas anisótropas macizas empotrada y cantilever con una masa adosada ([Ciancio et al.,2005, 2007a, 2007b](#)).

El sistema diferencial que gobierna el problema es de enorme complejidad analítica, aunque se trate de un dominio geoméricamente simple, como es el de una placa rectangular. Por ello, como se mencionó, para su tratamiento se recurre a una solución aproximada variacional, el método de Ritz, expresando la función desplazamiento en términos de productos de funciones viga en ambas direcciones coordenadas, que satisfacen idénticamente

las condiciones esenciales de borde pero no las naturales, lo que es lícito al hacer uso de este método.

La estructura que se analiza es esquematizada en la Figura 1: Una placa anisótropa cantilever con un hueco centrado y tres posiciones alternativas para una masa adosada.

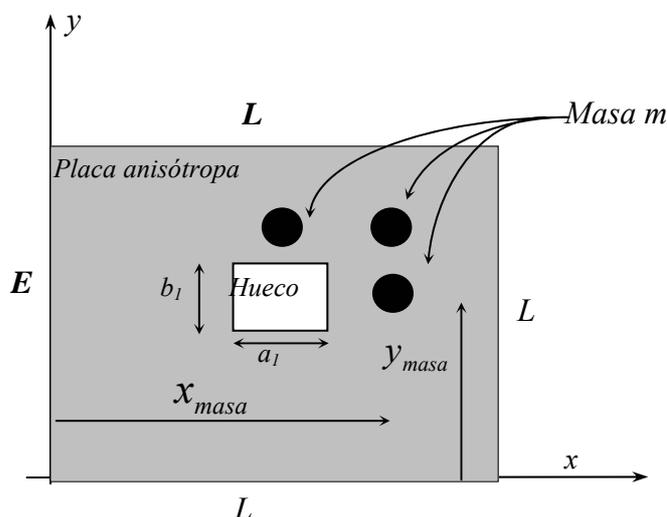


Figura 1: Sistema estructural considerado: Placa anisótropa con hueco central y masa adosada.

2 SOLUCIÓN ANALÍTICA APROXIMADA

De acuerdo a la teoría clásica de flexión de placas anisótropas (Lekhnitskii, 1968), el funcional de energía correspondiente al sistema combinado c) de la Figura 1 está dado por:

$$J[W_a] = \frac{D_{11} ab}{2a^4} \left\{ \iint_{A_p} \left[\left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \right)^2 + \frac{2D_{12}}{D_{11}} (\lambda)^2 \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} + \frac{D_{22}}{D_{11}} (\lambda)^4 \left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} \right)^2 + 4D_{66} (\lambda)^2 \left(\frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right)^2 + 4\lambda \frac{D_{16}}{D_{11}} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x}^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} + 4(\lambda)^3 \frac{D_{26}}{D_{11}} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{y}^2} \frac{\partial^2 W_a}{\partial \bar{x} \partial \bar{y}} \right] d\bar{x} d\bar{y} - \frac{\rho h \omega^2 a^4}{D_{11}} \iint_{A_p} W_a^2 d\bar{x} d\bar{y} + \frac{1}{2} m \omega^2 [W_a(\bar{x}_m, \bar{y}_m)]^2 \right\} \quad (1)$$

En esta expresión $W_a = W_a(\bar{x}, \bar{y})$ es la amplitud aproximada de la deflexión del plano medio de la placa referida a las coordenadas adimensionales $\bar{x} = x/a$ e $\bar{y} = y/b$ con a y b dimensiones de la placa; D_{ij} son las rigideces flexionales de la placa anisótropa; $\lambda = a/b$ es la relación de aspecto; A_p representa el área neta de la placa, es decir descontando al dominio total: $a \times b$, el área correspondiente al hueco $(\bar{x}_2 - \bar{x}_1) \times (\bar{y}_2 - \bar{y}_1)$; ρ , h son la densidad y el espesor de la placa, respectivamente. En la expresión de este funcional interviene la energía cinética traslatoria de la masa actuante y que está representada por el último término, donde m es la magnitud de la masa concentrada, $W_a(\bar{x}_m, \bar{y}_m)$ es la amplitud aproximada del desplazamiento en correspondencia con el punto de ubicación de la masa \bar{x}_m, \bar{y}_m y ω es la frecuencia circular natural del sistema.

La inercia rotatoria de la masa concentrada no es tenida en cuenta en el presente análisis.

La función desplazamiento es aproximada según la Ec. (2) por una combinación lineal

ponderada de funciones coordenadas que satisfacen las condiciones de borde esenciales, y están representadas por las denominadas *funciones viga*. Esas funciones denotadas como $X_m(\bar{x}), Y_n(\bar{y})$ representan la forma de los modos normales de vibración natural de una viga Bernoulli-Euler cuyas condiciones de sustentación son similares a las de los bordes opuestos de la placa en las respectivas direcciones coordenadas cartesianas.

$$W_a(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N b_{mn} X_m(\bar{x}) Y_n(\bar{y}) \quad (2)$$

b_{mn} son coeficientes a ser determinados de manera de aumentar la precisión de la aproximación y M y N la cantidad de términos de la función aproximante.

Cuando la configuración de la placa conduce a vigas inestables con ambos extremos libres como es el caso de la placa cantilever en la dirección coordenada y , las primeras dos funciones normales corresponden a movimientos de cuerpo rígido: traslación y rotación.

Las funciones normales o autofunciones no satisfacen las condiciones naturales en los bordes externos y cuando los hubiere en los internos, pero esto es legítimo cuando se utiliza el método de Ritz, (Nallim y Grossi, 2003), como se indicó previamente.

Sustituyendo la expresión (2) en (1) y minimizando dicho funcional con respecto a cada uno de los coeficientes b_{mn} , esto es:

$$\frac{\partial J[W_a]}{\partial b_{mn}} = 0 \quad m = 1, 2, 3, \dots, M \quad n = 1, 2, 3, \dots, N \quad (3)$$

se obtiene un sistema de $M \times N$ ecuaciones lineales homogéneas en términos de los parámetros b_{mn} .

De la condición de no trivialidad se obtienen los coeficientes de frecuencias naturales:

$$\Omega_i = \omega_i a^2 \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \quad (4)$$

los que representan los autovalores del problema y los correspondientes modos de vibración están dados por los autovectores del determinante ecuación.

3 RESULTADOS OBTENIDOS

En primer lugar se analiza el caso de una placa maciza con una masa centrada.

Se consideran para este caso dos posibilidades para el material de la placa:

I) Material de anisotropía genérica, cuyas relaciones de rigideces son:

$$D_{12}/D_{11} = D_{22}/D_{11} = D_{66}/D_{11} = 1/2, \quad D_{16}/D_{11} = D_{26}/D_{11} = 1/3$$

II) Material real, boron epoxy, que responde a las siguientes relaciones de rigideces:

$$D_{12}/D_{11} = 0.3245569, \quad D_{22}/D_{11} = 0.2130195, \quad D_{66}/D_{11} = 0.3387559, \\ D_{16}/D_{11} = 0.5120546, \quad D_{26}/D_{11} = 0.1694905$$

Las direcciones 1,2 coinciden con las coordenadas x, y .

Se aclara que el caso particular de la placa isotrópica se obtiene simplemente tomando en (1) las siguientes relaciones de rigidez:

$$D_{11} = D_{22} = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad D_{12} = \nu D_{11}, \quad D_{66} = \frac{1-\nu}{2} D_{11}, \quad D_{16} = D_{26} = 0$$

Efectuando tal reemplazo, el presente enfoque verifica con excelente precisión los valores obtenidos en un minucioso trabajo de Chiba y Sugimoto, 2003.

En la Tabla 1 se especifican los primeros seis coeficientes de frecuencias naturales de vibración de una placa anisótropa cantilever maciza para el caso en que la masa concentrada rígidamente adosada se encuentra ubicada en el centro de la placa (Ciancio et al. 2007). Se muestran los resultados para los dos materiales especificados como genérico y boron epoxy. Se evalúan tres relaciones de aspecto $\lambda = 0.5, 1$ y 2 y relaciones de la masa adosada m a la masa de la placa: $M = m / \rho h a b = 0.1, 0.3, 0.5$ y 1 . También se consignó la ausencia de masa ($M=0$).

Los valores han sido obtenidos con una aproximación de 225 términos, esto es $M=N=15$ en la ecuación (2), ya que para mayor número de términos no evidencian variaciones en los dígitos considerados

Luego en la Fig. 2 se muestran las proyecciones a modo de líneas de nivel de las primeras seis formas modales y sus correspondientes líneas nodales para la placa cuadrada sin masa. En las Figs. 3 y 4 se consideran los casos en que $M=1/10$ y 1 , con la finalidad de observar la influencia que ejerce la masa concentrada y su magnitud sobre la configuración de las formas modales. Asimismo en dichas figuras, se observa la incidencia que ejerce un cambio en las propiedades del material, al contemplar el material anisótropo de rigideces genéricas y el real de boron epoxy. De la comparación de gráficos, puede inferirse que las propiedades del material tienen una influencia más marcada que la presencia y magnitud de la masa. Obviamente, en virtud de la anisotropía del material no se observan comportamientos simétricos, a pesar de la geometría del sistema.

λ	Ω_i	M=0		M=1/10		M=3/10		M=5/10		M=1	
		I	II								
1/2	Ω_1	3.181	1.122	3.133	1.122	3.033	1.122	2.930	1.122	2.679	1.122
	Ω_2	4.501	3.680	4.453	3.562	4.366	3.331	4.291	3.119	4.157	2.691
	Ω_3	9.465	6.566	9.070	6.408	8.348	6.128	7.802	5.915	7.022	5.599
	Ω_4	14.885	10.299	14.382	9.945	13.493	9.359	12.972	8.993	12.428	8.569
	Ω_5	19.856	13.447	19.574	13.122	17.834	12.658	17.297	12.416	16.898	12.171
	Ω_6	22.013	19.786	19.946	18.650	19.876	16.749	19.973	16.120	19.871	15.633
1	Ω_1	2.828	2.845	2.796	2.769	2.733	2.632	2.669	2.513	2.512	2.271
	Ω_2	5.526	10.026	5.411	10.022	5.205	10.011	5.031	9.997	4.710	9.943
	Ω_3	18.901	16.740	17.542	16.715	15.292	15.279	13.904	13.545	12.172	11.575
	Ω_4	20.092	21.728	19.925	18.943	19.861	16.817	19.844	16.784	19.829	16.773
	Ω_5	27.515	27.041	26.091	25.261	24.906	24.665	24.470	24.522	24.083	24.411
	Ω_6	40.076	35.537	37.891	35.364	36.322	35.263	35.768	35.227	35.271	35.194
2	Ω_1	2.031	4.324	2.018	4.012	1.990	3.553	1.963	3.226	1.895	2.696
	Ω_2	6.562	15.042	6.284	14.522	5.820	13.929	5.454	13.603	4.818	13.205
	Ω_3	19.776	34.508	18.656	34.508	17.219	34.508	16.369	34.508	15.282	34.507
	Ω_4	27.136	44.059	26.954	42.079	26.778	39.625	26.694	38.330	26.600	36.860
	Ω_5	58.643	58.800	58.390	56.573	57.389	54.637	55.871	53.890	53.316	53.202
	Ω_6	66.414	71.222	66.414	69.605	62.453	68.392	60.693	67.953	59.876	67.553

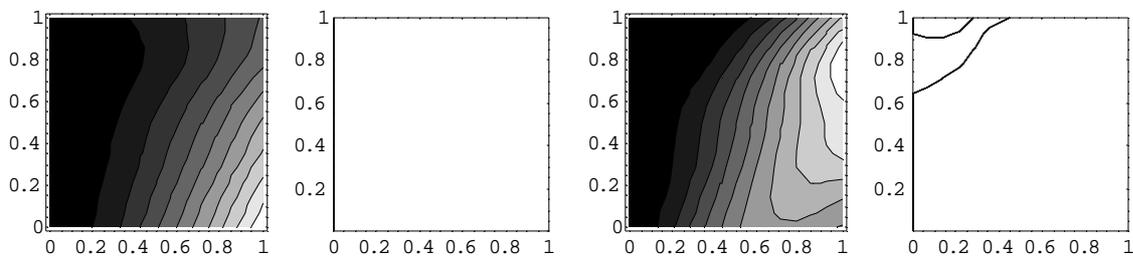
Tabla 1. Coeficientes de frecuencias naturales de una placa anisótropa cantilever sin masa y con masa concentrada central rígidamente adosada y materiales: I genérico y II boron epoxy.

Casos con $\lambda=1, M=0$

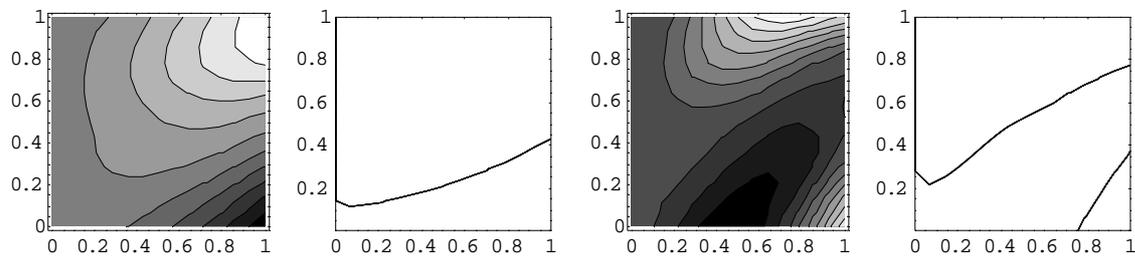
Relaciones de Rigideces I

Relaciones de Rigideces II

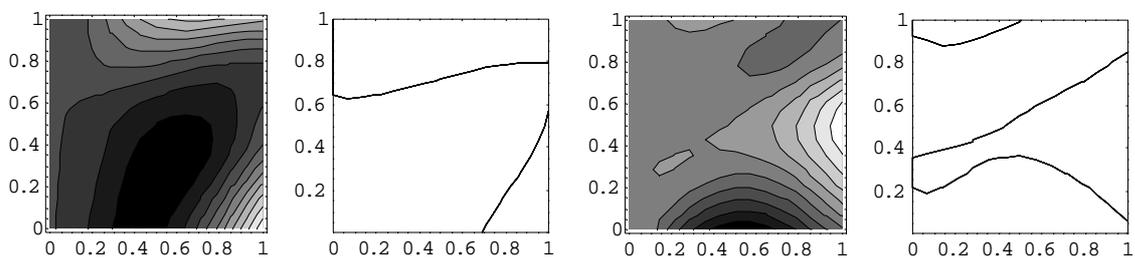
Primeras formas modales y líneas nodales



Segundas formas modales y líneas nodales



Terceras formas modales y líneas nodales



Cuartas formas modales y líneas nodales

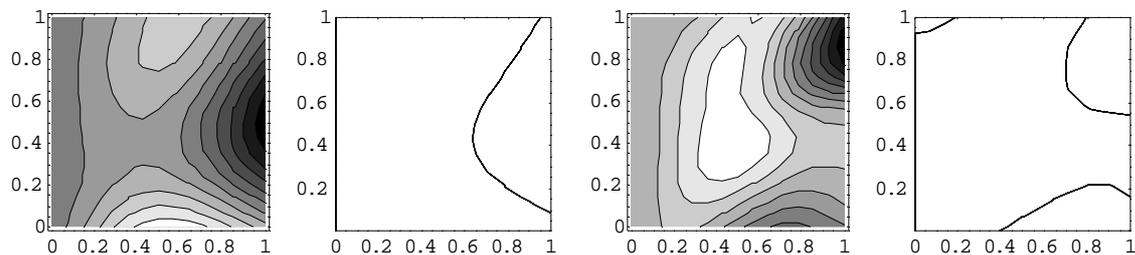
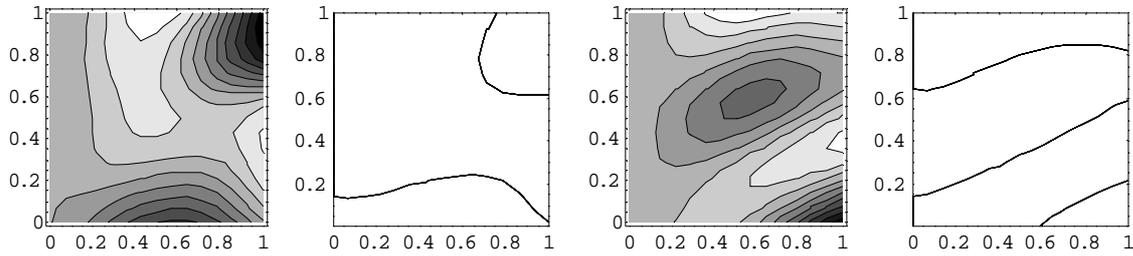


Figura 2: Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada ($\lambda=1$) anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y sin masa

Quintas formas modales y líneas nodales



Sextas formas modales y líneas nodales

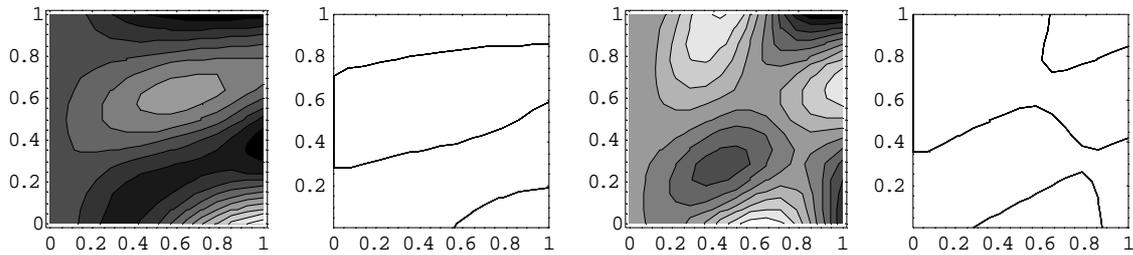
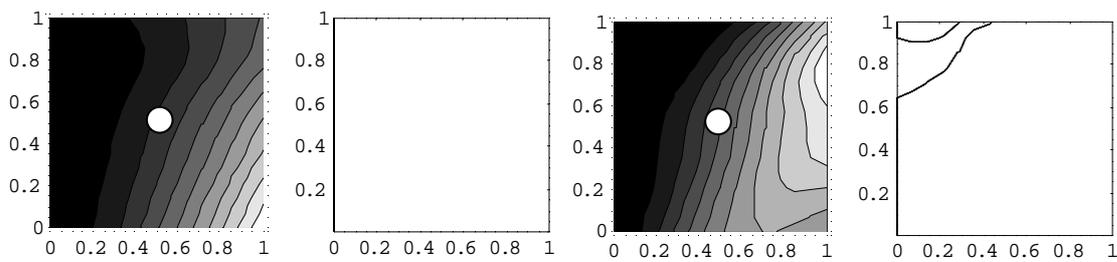


Figura 2 (Cont.): Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada ($\lambda=1$) anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y sin masa

Casos con $\lambda=1$, $M=1/10$

Relaciones de Rigideces I

Primeras formas modales y líneas nodales



Relaciones de Rigideces II

Segundas formas modales y líneas nodales

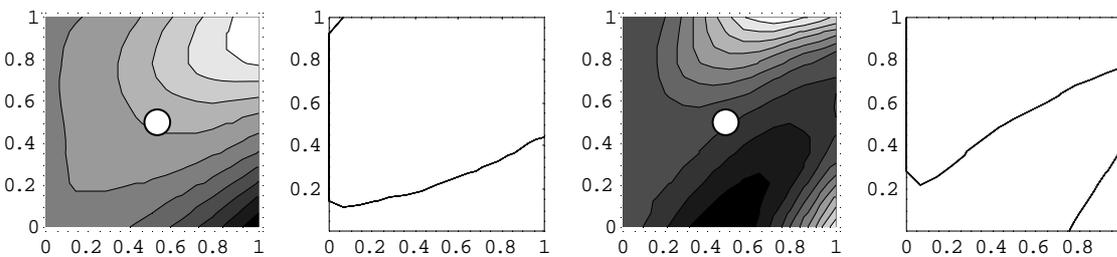
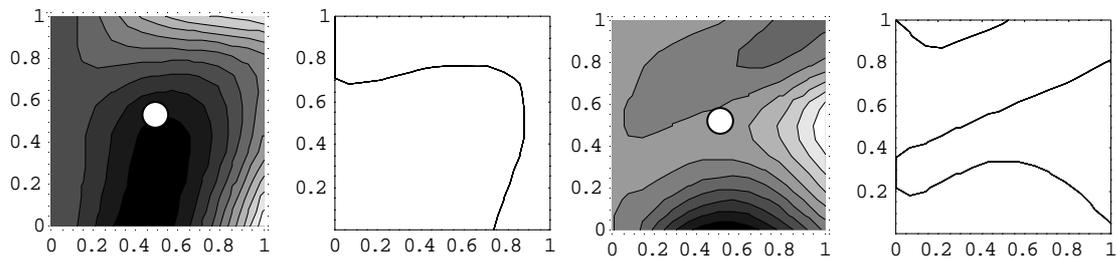
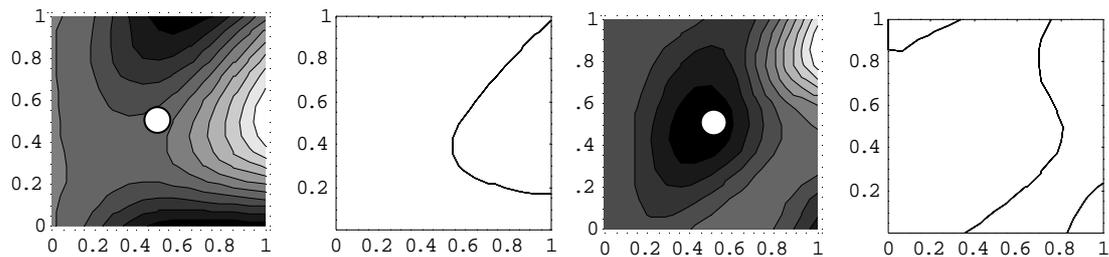


Figura 3: Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada ($\lambda=1$) anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y con $M=1/10$, ubicada en el centro.

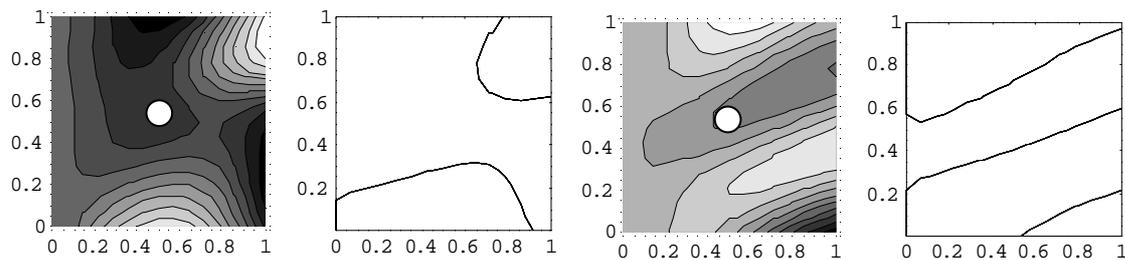
Terceras formas modales y líneas nodales



Cuartas formas modales y líneas nodales



Quintas formas modales y líneas nodales



Sextas formas modales y líneas nodales

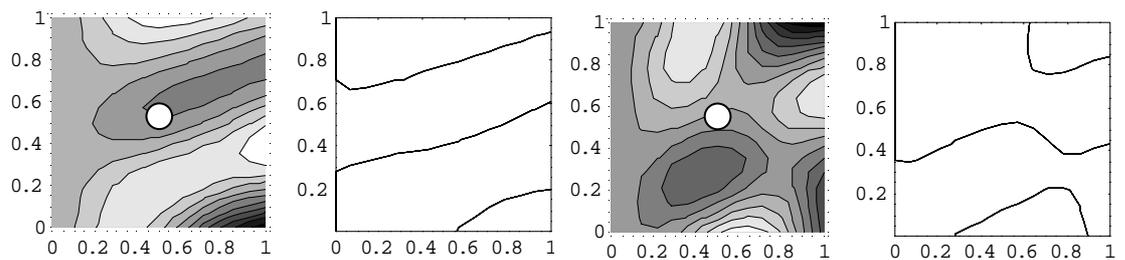


Figura 3 (Cont.): Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y con $M=1/10$, ubicada en el centro.

Casos con $\lambda=1$, $M=1$

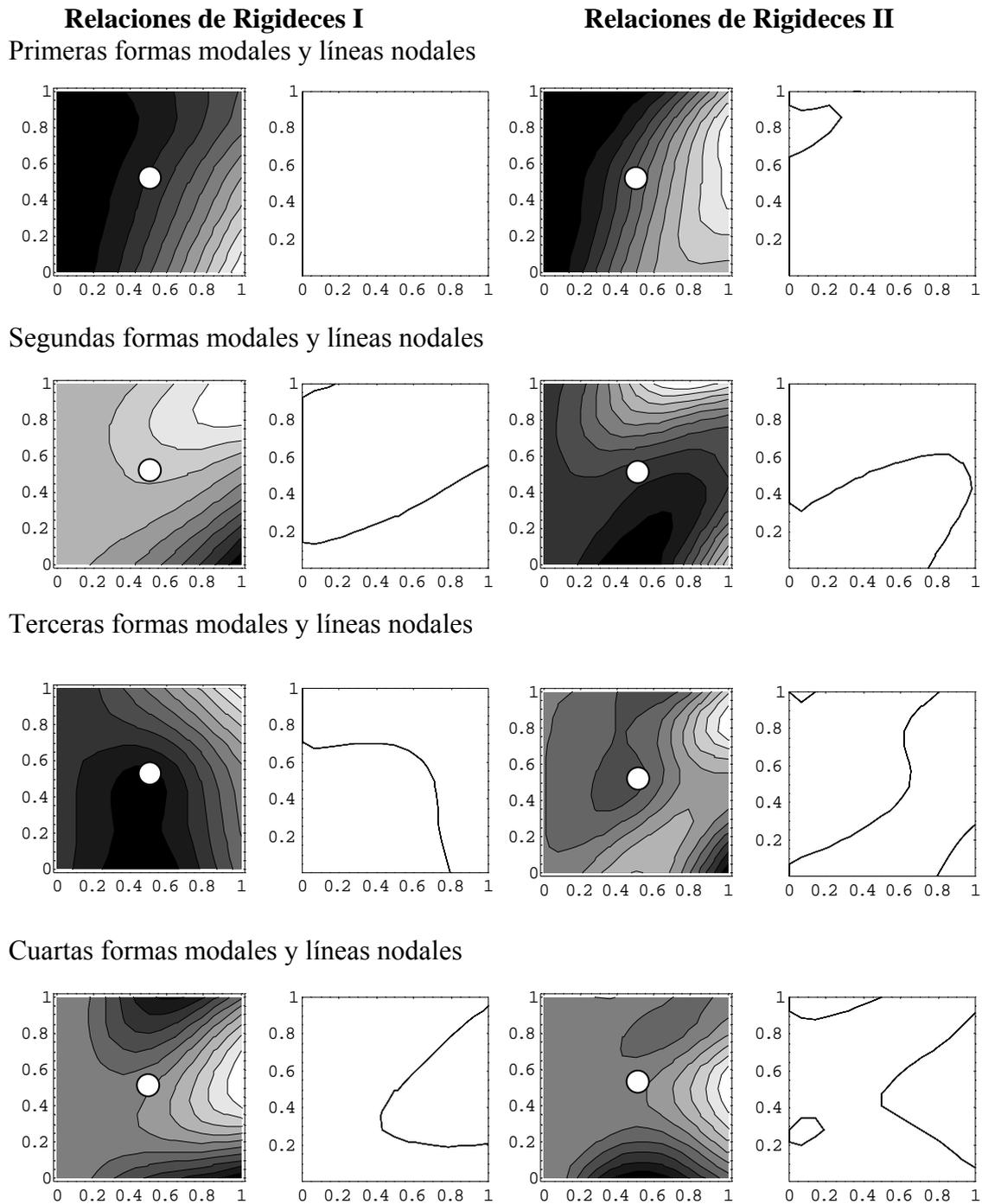
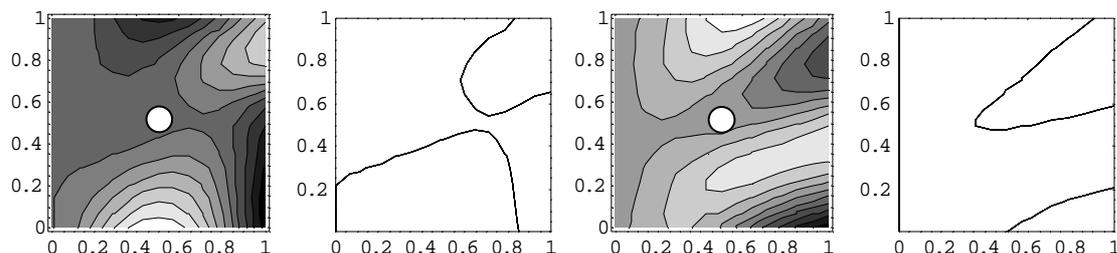


Figura 4: Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada ($\lambda=1$) anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y con $M=1$, ubicada en el centro.

Quintas formas modales y líneas nodales



Sextas formas modales y líneas nodales

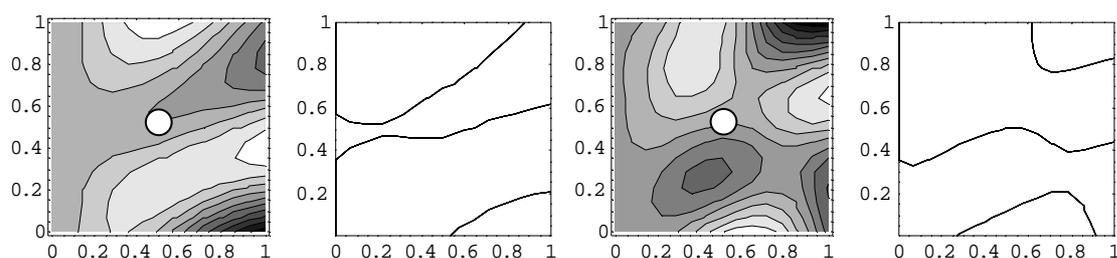


Figura 4 (Cont.): Formas modales y líneas nodales de una placa cuadrada ($\lambda=1$) anisótropa cantilever de materiales: I genérico y II boron epoxy y con $M=1$, ubicada en el centro.

A continuación se analiza el sistema estructural con complejidades combinadas

Debido a la cantidad y variabilidad de parámetros involucrados en el problema propuesto, se analizan solamente algunos casos representativos para demostrar la conveniencia del procedimiento. En consecuencia se adopta el material anisótropo definido como genérico, se consideran huecos centrados de igual relación de aspecto que la placa y tres posiciones posibles para la masa.

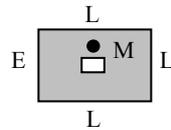
Se tienen en cuenta diferentes magnitudes para la relación de aspecto de la placa y la magnitud de la masa. Los huecos considerados: $0.1 a \times 0.1 b$ y $0.2 a \times 0.2 b$.

Las Tablas 2, 3 y 4 indican los primeros cinco coeficientes de frecuencias naturales de vibración transversal para el caso de la masa sobre el eje de simetría horizontal, sobre el eje de simetría vertical y la diagonal respectivamente.

Se indican también los valores correspondientes a la placa maciza sin masa y a la placa con hueco y sin masa.

En la Figura 5 se grafican las formas modales del modelo analizado en la Tabla 2, indicándose el caso de la placa rectangular con $\lambda=3/2$, sin masa y con dos magnitudes de masa: $M=0.1$ y 0.3 .

Las Figuras 6 y 7 muestran las formas modales de la placa con las otras dos posiciones de la masa y con dos valores de magnitud de la misma.



$\lambda=a/b$	a_1/a	$M=m/m_p$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	
2/3	0	0	3.066	4.875	12.639	18.856	22.456	
		0	3.033	4.807	12.650	18.654	22.389	
		0.1	0.1	3.028	4.517	12.495	18.100	21.168
			0.5	2.998	3.712	11.909	15.769	19.758
	0.2	1	2.859	3.240	11.429	14.903	19.596	
		0	2.636	4.447	12.310	16.770	21.794	
		0.1	2.635	4.170	12.140	16.268	20.792	
		0.5	2.631	3.391	11.472	14.606	18.820	
	1	0	1	2.609	2.844	10.945	14.105	18.481
			0	2.828	5.526	18.901	20.092	27.515
			0	2.753	5.389	18.980	20.011	27.419
			0.1	0.1	2.750	5.058	18.461	19.001
0.5		2.732		4.136	15.420	18.989	24.956	
0.2		1	2.691	3.495	14.188	18.988	24.682	
		0	1.082	4.579	18.257	19.423	26.272	
		0.1	1.078	4.301	17.662	18.516	24.996	
		0.5	1.061	3.542	14.767	18.384	23.851	
3/2		0	1	1.040	3.009	13.552	18.375	23.598
			0	2.449	6.193	19.474	24.733	44.145
			0	2.236	5.865	19.434	24.971	43.894
	0.1		0.1	2.235	5.478	19.026	22.716	43.518
		0.5	2.229	4.423	17.059	20.793	43.031	
	0.2	1	2.219	3.683	15.917	20.538	42.868	
		0	2.358	6.384	19.375	28.004	44.772	
		0.1	2.356	5.908	18.562	26.062	44.019	
		0.5	2.346	4.669	16.671	24.052	43.114	
	0.2	1	2.329	3.848	15.805	23.575	42.838	

Tabla 2. Coeficientes de frecuencias naturales para una placa anisótropa cantilever rectangular con hueco centrado, de distintos tamaños y con distintas magnitudes de una masa concentrada ubicada sobre el eje vertical de simetría ($\bar{x}_m=0.5, \bar{y}_m=0.75$)

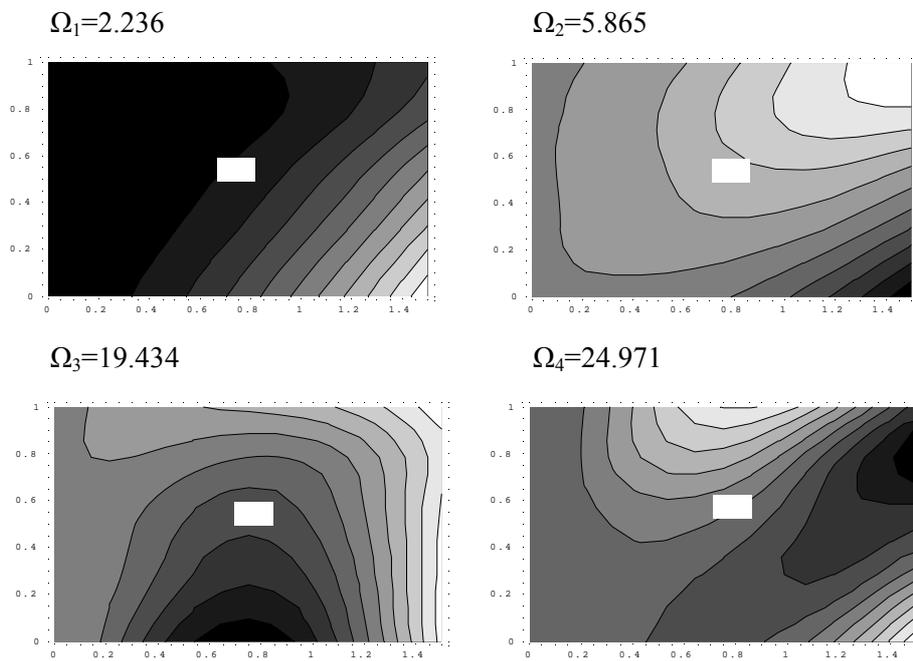
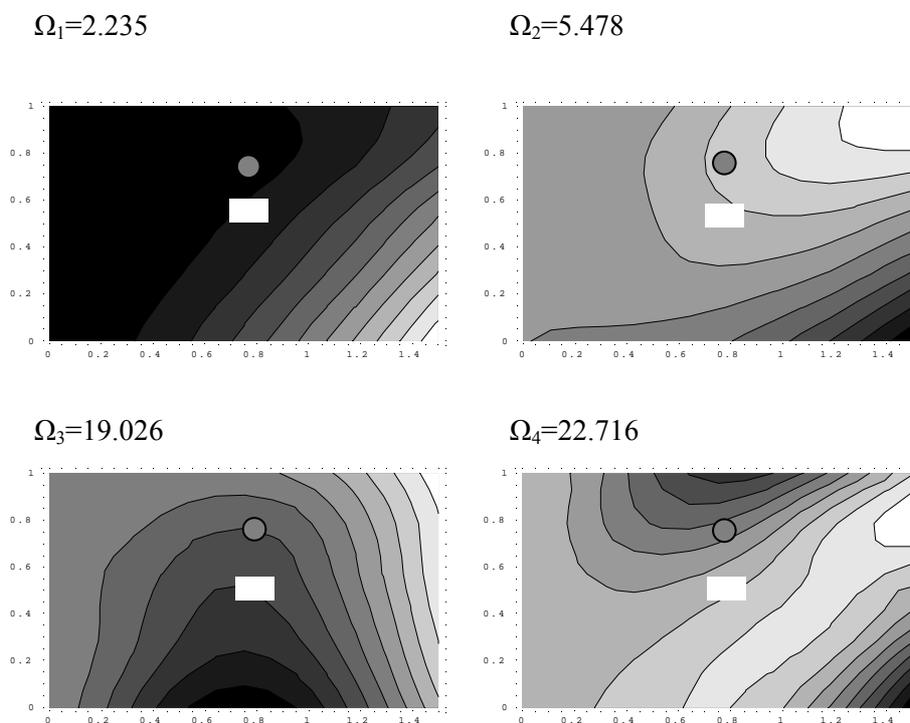
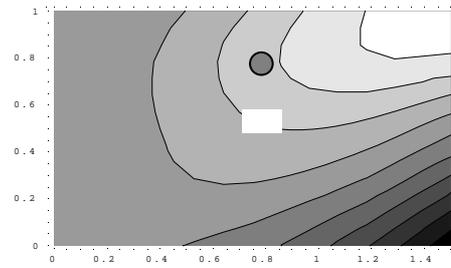
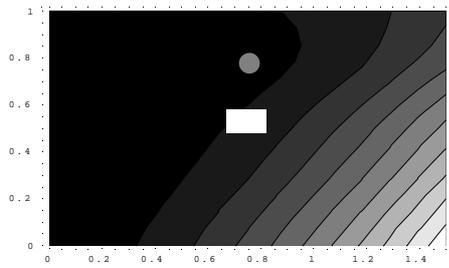
M=0**M=1/10**

Figura 5: Formas modales de una placa anisótropa cantilever rectangular ($\lambda=3/2$) con un hueco de dimensiones $0.1a \times 0.1b$ centrado sin masa y con masa concentrada $M=1/10$ ubicada en $\bar{x}_m=0.5$, $\bar{y}_m=0.75$

M=5/10

$\Omega_1=2.229$

$\Omega_2=4.423$



$\Omega_3=17.059$

$\Omega_4=20.793$

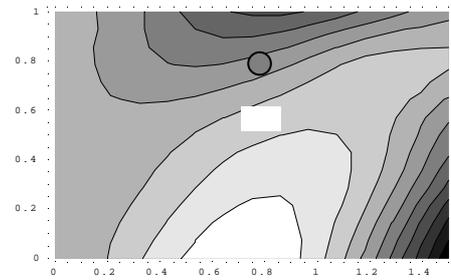
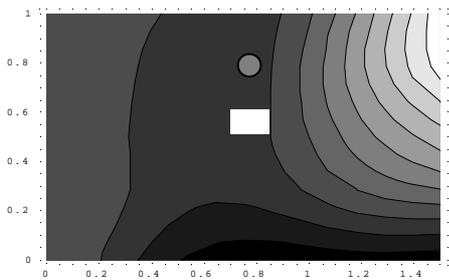
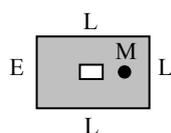


Figura 5(Cont.). Formas modales de una placa anisótropa cantilever rectangular ($\lambda=3/2$) con un hueco de dimensiones $0.1a \times 0.1b$ centrado y con una masa concentrada $M=5/10$ ubicada en $(\bar{x}_m=0.5, \bar{y}_m=0.75)$



$\lambda=a/b$	a_1/a	$M=m/m_p$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5
2/3	0	0	3.066	4.875	12.639	18.856	22.456
		0	3.033	4.807	12.650	18.654	22.389
		0.1	2.851	4.695	11.402	18.626	22.388
		0.5	2.307	4.491	9.659	18.590	22.382
	0.1	1	1.907	4.405	9.074	18.578	32.118
		0	2.636	4.447	12.310	16.770	21.794
		0.1	2.527	4.267	10.857	16.671	21.707
		0.5	2.141	3.898	8.972	16.586	21.348
	0.2	1	1.806	3.738	8.385	16.563	21.195
		0	2.828	5.526	18.901	20.092	27.515
		0	2.753	5.389	18.980	20.011	27.419
		0.1	2.601	5.230	17.776	19.761	26.724
1	0.1	0.5	2.148	4.919	15.420	19.681	25.990
		1	1.804	4.776	14.498	19.668	25.790
		0	1.082	4.579	18.257	19.423	26.272
		0.1	1.059	4.284	17.063	18.836	25.574
	0.2	0.5	0.976	3.596	14.485	18.711	24.983
		1	0.892	3.199	13.545	18.696	24.841
		0	2.449	6.193	19.474	24.733	44.145
		0	2.236	5.865	19.434	24.971	43.894
3/2	0.1	0.1	2.126	5.637	19.292	24.289	41.417
		0.5	1.794	5.171	18.876	22.964	37.362
		1	1.530	4.940	18.584	22.411	36.035
		0	2.358	6.384	19.375	28.004	44.772
	0.2	0.1	2.235	6.152	19.235	26.625	42.485
		0.5	1.872	5.676	18.816	24.120	39.356
		1	1.591	5.439	18.514	23.175	38.468

Tabla 3. Coeficientes de frecuencias naturales para una placa anisótropa cantilever rectangular con hueco centrado, de distintos tamaños y con distintas magnitudes de una masa concentrada ubicada sobre el eje horizontal de simetría ($\bar{x}_m=0.75$, $\bar{y}_m=0.5$)

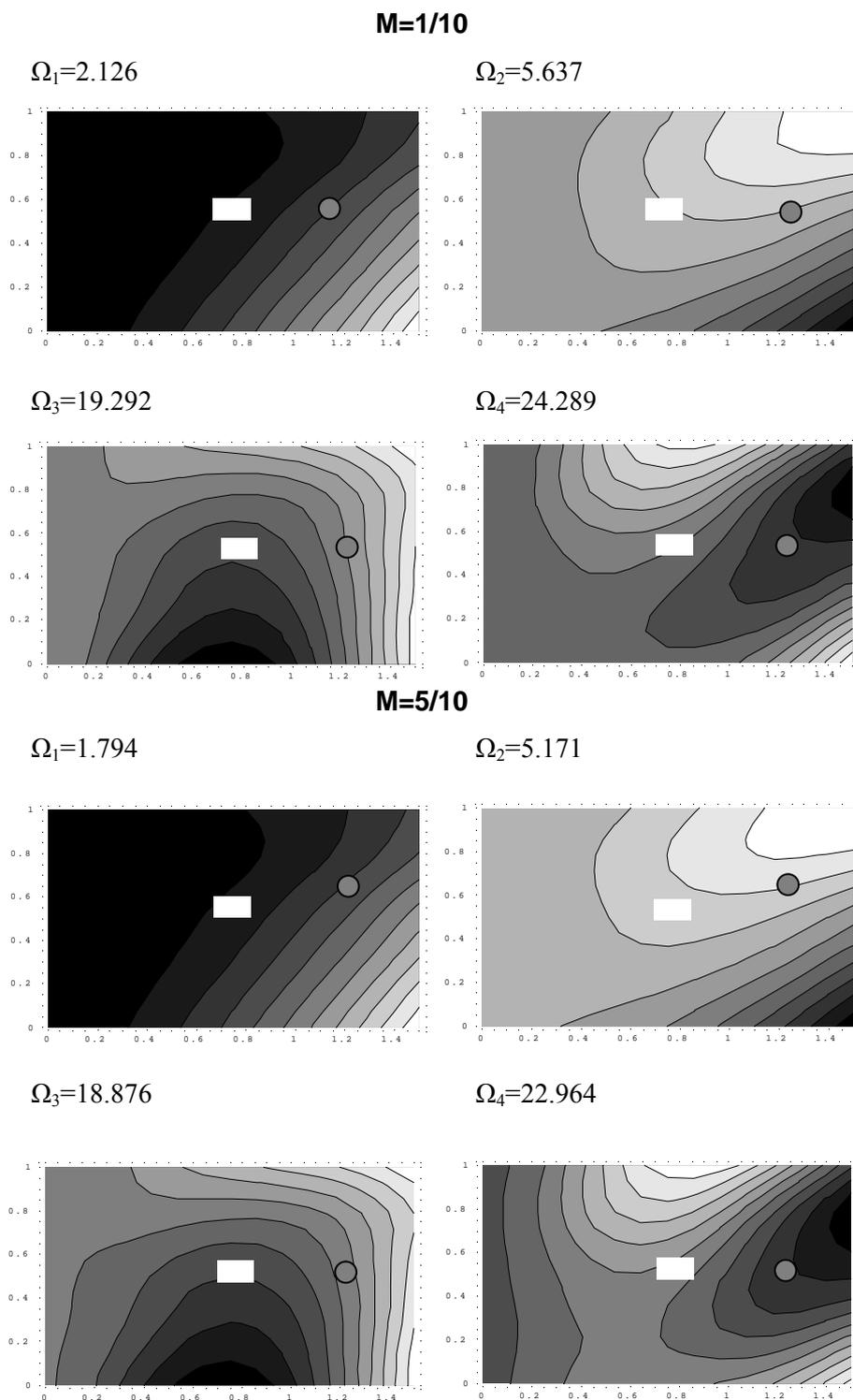
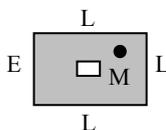


Figura 6. Formas modales de una placa anisótropa cantilever rectangular ($\lambda=3/2$) con un hueco de dimensiones $0.1a \times 0.1b$ centrado y con una masa concentrada ($M=1/10$ y $5/10$) ubicada en $(\bar{x}_m=0.75, \bar{y}_m=0.5)$



$\lambda=a/b$	a_1/a	$M=m/m_p$	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	
2/3	0	0	3.066	4.875	12.639	18.856	22.456	
		0	3.033	4.807	12.650	18.654	22.389	
	0.1	0.1	2.993	4.040	12.241	17.954	18.275	
		0.5	2.347	3.412	12.082	13.871	17.757	
		1	1.922	2.944	11.269	11.936	16.733	
	0.2	0	2.636	4.447	12.310	16.770	21.794	
		0.1	2.634	3.725	12.274	15.887	21.685	
		0.5	2.475	2.661	12.211	14.924	21.580	
		1	1.915	2.643	12.184	14.649	21.552	
	1	0	0	2.828	5.5269	18.901	20.092	27.515
			0	2.753	5.389	18.980	20.011	27.419
		0.1	0.1	2.750	4.222	15.175	17.694	23.122
0.5			2.151	3.611	14.992	17.485	22.753	
1			1.759	3.161	14.783	17.251	19.978	
0.2		0	1.082	4.579	18.257	19.423	26.272	
		0.1	1.079	3.850	18.096	19.374	25.969	
		0.5	1.067	2.627	17.846	19.319	25.456	
		1	1.049	2.060	17.750	19.303	25.255	
3/2		0	0	2.449	6.193	19.474	24.733	44.145
			0	2.236	5.865	19.434	24.971	43.894
		0.1	0.1	2.206	5.044	19.428	24.891	43.145
	0.5		2.064	3.697	19.421	24.770	41.608	
	1		1.864	3.173	19.418	24.724	40.925	
	0.2	0	2.358	6.384	19.375	28.004	44.772	
		0.1	2.317	5.478	19.357	27.879	43.942	
		0.5	2.135	4.042	19.333	27.686	42.126	
		1	1.906	3.500	19.324	27.611	41.348	

Tabla 4. Coeficientes de frecuencias naturales para una placa anisótropa cantilever rectangular con hueco centrado, de distintos tamaños y con distintas magnitudes de una masa concentrada ubicada sobre la diagonal ($\bar{x}_m=0.75$, $\bar{y}_m=0.75$)

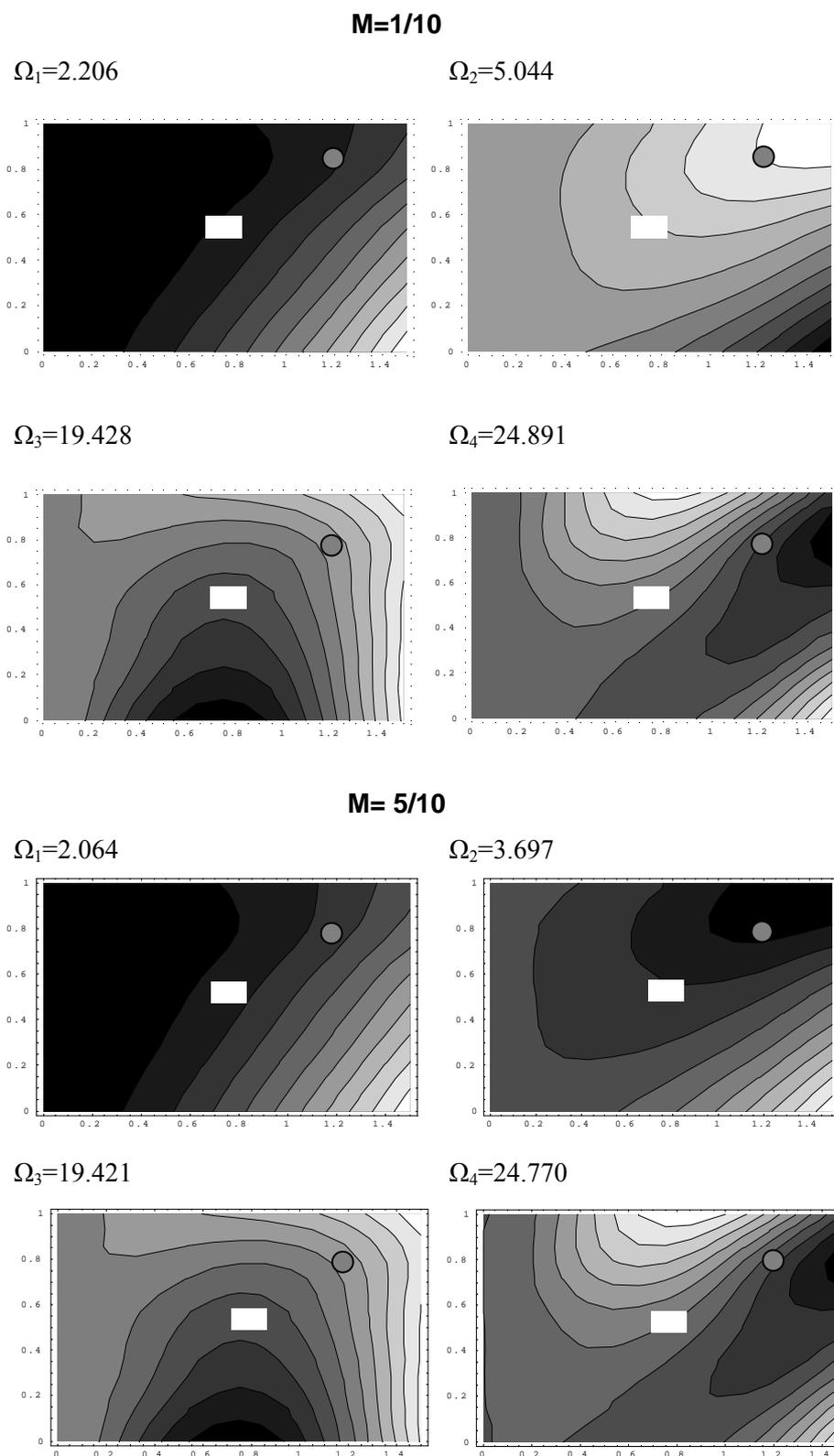


Figura 7: Formas modales de una placa anisótropa cantilever rectangular ($\lambda=3/2$) con un hueco de dimensiones $0.1a \times 0.1b$ centrado y con una masa concentrada ($M=1/10$ y $5/10$) ubicada en $(\bar{x}_m=0.75, \bar{y}_m=0.75)$

4 CONCLUSIONES

El presente trabajo permite comprobar que el método de Ritz, aproximando la deflexión mediante funciones viga, constituye una herramienta rápida y eficaz para atacar un problema complejo como el de la vibración transversal de placas de material anisótropo con distintas condiciones de borde y complejidades adicionales como la presencia de huecos y masas adosadas.

En general, se observa que en el caso de materiales anisótropos, la cantidad de parámetros que intervienen en su desempeño estructural, torna dificultoso establecer patrones de comportamiento, máxime cuando se presentan complejidades adicionales.

Es de interés consignar que los resultados obtenidos son el producto de un algoritmo (Felix et al., 2004) relativamente simple de implementar, que facilita la posibilidad de evaluar considerables cantidades de términos en la aproximación (2) permitiendo estudiar situaciones de semejante complejidad analítica con la sola ayuda de una P.C..

Es por ello que, tal como se expresara previamente, se estima que el presente trabajo propone un mecanismo eficaz para el tratamiento de un problema analíticamente inabordable y para el que no pueden aplicarse los códigos de uso habitual de Elementos Finitos, en virtud de no disponer de elementos anisótropos en su biblioteca.

5 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por la Secretaría de Ciencia, Arte y Tecnología de la Universidad Nacional del Centro de la Provincia de Buenos Aires, por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) y por la ANPCyT (Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica) de Argentina.

6 REFERENCIAS

- Ashton, J.E. “Natural modes of free – free anisotropic plates”, *Shock and Vibration Bull.* Vol. 39, Part A, pp. 93-100 (1969).
- Ashton J.E. y. Anderson, J.D. “Natural modes of vibration of boron-epoxy plates”, *Shock and Vibration Bull.* Vol. 39, Part 4, pp. 81-91 (1969).
- Ashton, J.E. y. Waddoups, M.E “Analysis of anisotropic plates”, *J. Comp. Mat.* Vol. 3, pp.140-165 (1969).
- Avalos, D. R., Larrondo, H. A., Laura, P. A. A. “Transverse vibrations of simply supported orthotropic rectangular plates with rectangular and circular cut-outs carrying an elastically mounted concentrated mass”. *Structural Engineering and Mechanics*, **7**(5), 503-512, 1999.
- Bambill, D. V., Ciancio, P. M., Rossit, C. A. “Vibraciones transversales libres de placas rectangulares simplemente apoyadas con un “parche” anisótropo”. *Métodos Numéricos en Ingeniería y Ciencias Aplicadas*, Edit.: CIMNE, Vol. 2, 1223-1229, 2002.

- Chiba, M y Sugimoto, T. “Vibration characteristics of a cantilever plate with an attached spring - mass system”, *Journal of Sound and Vibration* 260 237-263, 2003.
- Ciancio, P. M., Rossit, C. A. “Vibraciones libres de placas rectangulares anisótropas empotradas que soportan una masa concentrada”. *Mecánica Computacional* Vol. XXIV, 827-841, 2005.
- Ciancio, P. M., Rossit, C. A., Bambill, D. V. “Vibraciones transversales de placas rectangulares con inclusiones anisótropas como refuerzos de masas concentradas. *Mecánica Computacional* Vol. XXII, 733-742, 2003
- Ciancio P.M., Rossit C.A.y Laura, P.A.A., “Approximate study of the free vibrations of a cantilever anisotropic plate carrying a concentrated mass”, *Journal of Sound and Vibration*, 302(3), 621-628, 2007.
- Ciancio, P.M. , Rossit, C.A., Laura, P.A.A. “Comportamiento dinámico de placas anisótropas con distintas combinaciones de las clásicas condiciones de borde”. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 28(1), 77-88, 2007.
- Felix, D. H., Bambill, D. V., Rossit, C. A. “Desarrollo de un algoritmo de cálculo para la implementación del método de Rayleigh-Ritz en el cálculo de frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con complejidades diversas”. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 20(2), 123-138. 2004.
- Larrondo, H. A., Avalos, D. R., Laura, P. A. A. “Analysis of vibrating rectangular anisotropic plates with free-edge holes”. *Journal of Sound and Vibration* 222(4), 691-695, 1999.
- Larrondo, H. A., Avalos, D. R., Laura, P. A. A. “Transverse vibrations of simply supported anisotropic, rectangular plates carrying an elastically mounted concentrated mass”. *Journal of Sound and Vibration* 215, 1195-1202, 1998.
- Lekhnitskii, S.G. “*Anisotropic Plates*”, New York – London – Paris: Gordon and Breach Science Publishers 1968.
- Nallim, L. G. y Grossi, R. O. “On the use of orthogonal polynomials in the study of anisotropic plates”, *Journal of Sound and Vibration*, 264, 1201-1207, 2003.