

VIBRACIÓN DE UNA PLACA CIRCULAR ORTÓTROPA CON UN SISTEMA MASA-RESORTE ADOSADO EN UNA POSICIÓN ARBITRARIA

Samanta J. Escanes^a, Santiago Maiz^{a,b}, V. Yanina González^{b,c}, Diana V. Bambill^{a,b} y Daniel H. Felix^a

^a *Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dtoinge@criba.edu.ar, ima@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>*

^b *Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina*

^c *Departamento de Matemática, Universidad Nacional del Sur, Av. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina, dmat@criba.edu.ar, <http://www.uns.edu.ar>, sescanes@uns.edu.ar, smaiz@uns.edu.ar, vgonzal@uns.edu.ar, dbambil@criba.edu.ar, dhfelix@criba.edu.ar*

Palabras Clave: placa, circular, vibraciones, masa-resorte, ortotropía, cilíndrica, polar.

Resumen: El estudio dinámico de elementos estructurales ortótropos con presencia de masas adosadas elásticamente asume gran interés por su variada gama de aplicaciones tecnológicas. Éste es el caso de elementos estructurales en los que es necesaria que su resistencia a acciones mecánicas sea distinta en diferentes direcciones por lo que son reforzados en las direcciones radial y circunferencial con respecto a un centro.

En el presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico-estructural de un sistema placa-masa. Se analiza la influencia de la posición de la masa sobre las frecuencias naturales de vibración, así como el efecto que causa la variación de la relación de la masa con respecto a la masa de la placa. El modelo estudiado es de una placa circular con ortotropía cilíndrica, que tiene un sistema masa-resorte adosado en una posición puntual arbitraria cualquiera. Se utiliza para su resolución el método de Ritz, aproximando la solución mediante una suma de funciones coordenadas que satisfacen las condiciones de borde; y el método de Ritz optimizado con unas pocas funciones aproximantes, con el fin de realizar un análisis comparativo entre ambas versiones del método. Los valores obtenidos de los dos primeros coeficientes de frecuencia natural evidencian una muy buena aproximación con casos particulares disponibles en la literatura.

1 INTRODUCCIÓN

El estudio dinámico de placas circulares isótropas con masas adosadas rígidamente se encuentra en un gran número de investigaciones. En el caso de la masa ubicada en el centro de la placa se conocen soluciones exactas, expresadas en términos de funciones de Bessel, para los casos de contorno libre o empotrado (Leissa, 1969). Para los casos en que la masa se encuentra en posiciones arbitrarias también se conocen soluciones aproximadas calculadas mediante métodos como el de Ritz (1908), (Bambill et al., 2002, Maiz et al., 2008), experimentalmente (Bambill et al., 2004) o mediante elementos finitos, (Ranjan y Ghosh, 2006). También se pueden encontrar en la bibliografía estudios de placas circulares isótropas con la masa adosada elásticamente (Avalos et al., 1994).

Diferentes autores han realizado estudios dinámicos de placas circulares ortótropas y en el caso de adosarse alguna masa, se las estudia vinculadas rígidamente (Escanes et al., 2003).

Los elementos estructurales ortótropos con presencia de masas adosadas elásticamente asumen gran interés por su variada gama de aplicaciones tecnológicas.

En el presente trabajo se estudia el comportamiento dinámico-estructural de un sistema placa-masa. En particular, se modela una placa circular con ortotropía cilíndrica, que tiene un sistema masa-resorte adosado en una posición puntual arbitraria cualquiera. Y se analiza la influencia de la posición de la masa sobre los modos y frecuencias naturales de vibración, así como el efecto que causa la variación de la relación de la masa con respecto a la masa de la placa.

Nuestro aporte consiste en comparar dos versiones del método de Ritz (Lord Rayleigh, 1945; Ritz, 1908). Uno de ellos es aproximando la solución mediante una suma de funciones coordenadas que satisfacen las condiciones de borde; y el otro, es el método de Ritz optimizado con unas pocas funciones aproximantes donde se incluye un parámetro exponencial de optimización en las mismas.

2 DESCRIPCIÓN DEL MODELO ESTRUCTURAL

Los modelos analizados consisten en placas circulares con ortotropía cilíndrica, con una masa concentrada elásticamente adosada, como puede observarse en el esquema de la Figura 1. Dichos modelos difieren en la ubicación en que se adosa el sistema discreto masa-resorte, en la rigidez del vínculo elástico, en el valor de la masa concentrada y en las condiciones de contorno.

Se consideran, a los efectos del presente estudio, las condiciones de contorno clásicas simplemente apoyada y empotrada. Se adoptan para la ubicación del sistema masa-resorte: el centro de la placa y una posición excéntrica en la mitad del radio.

El modelo ortótropo queda definido al adoptar las relaciones de rigideces elásticas del material como $D_\theta/D_r = 1/2$ y $D_k/D_r = 1/3$, donde D_r , D_θ y D_k son los coeficientes de rigidez a flexión en la dirección radial y tangencial y la rigidez torsional respectivamente, cuyas expresiones son, (Lekhnitskii, 1968):

$$D_r = \frac{E_r h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}; D_\theta = \frac{E_\theta h^3}{12(1-\nu_r \nu_\theta)}; D_k = \frac{G_{r\theta} h^3}{12}$$

El polo de anisotropía es coincidente con el centro de la placa.

Para cada uno de los casos mencionados, se considera un rango amplio de valores de rigidez del resorte que constituye el sistema discreto y tres valores diferentes para la masa concentrada.

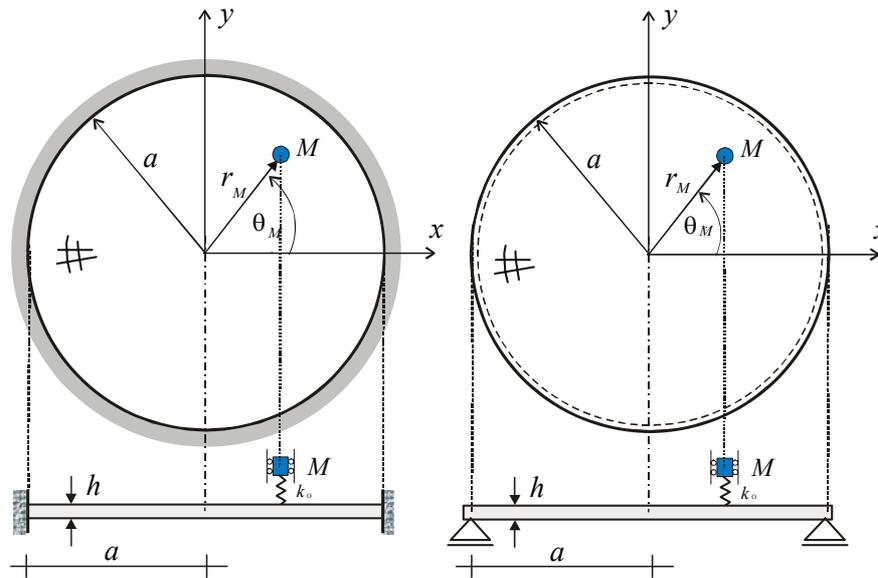


Figura 1: Placa circular ortótropa con masa elásticamente adosada.

3 DESCRIPCIÓN DEL MODELO MATEMÁTICO

El problema de la placa vibrante del modelo propuesto está gobernado por la funcional de energía que se expresa como:

$$\begin{aligned}
 J(W(r, \theta)) = & \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^a \left[D_r \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \right)^2 + D_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 + \right. \\
 & \left. + 2 D_r \nu_\theta \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right) + 4 D_k \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \theta} \right)^2 \right] r dr d\theta - \\
 & - \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \rho h W^2 r dr d\theta - \frac{1}{2} M \omega^2 (W(r_M, \theta_M) + v)^2 + \frac{1}{2} k_0 v^2
 \end{aligned} \quad (1)$$

La función amplitud de desplazamiento se indica con $W = W(r, \theta)$. El espesor de la placa se indica con h , el radio con r y la densidad del material con ρ . Con M se expresa la magnitud de la masa puntual y con k_0 la constante del resorte al cual se encuentra adosada la masa puntual. Se asume que el resorte posee características lineales.

v es la amplitud del desplazamiento relativo de la masa puntual con respecto a la placa. $W(r_M, \theta_M)$ y $(W(r_M, \theta_M) + v)$ son la amplitud del desplazamiento de la placa y amplitud total del desplazamiento del punto donde se encuentra adosada la masa puntual, respectivamente.

La frecuencia natural circular de vibración del sistema estructural placa-masa de la [Figura 1](#) se expresa como ω .

Con ν_r y ν_θ se indican los coeficientes principales de Poisson, y con E_r , E_θ y $G_{r\theta}$ a los módulos de elasticidad en la dirección radial, tangencial y transversal para las direcciones elásticas principales r y θ , respectivamente.

La notación utilizada es la propuesta por Lekhnitskii ([Lekhnitskii, 1968](#)) en su clásico tratado.

Se estudian dos condiciones de borde en el contorno de la placa.

Para el caso Empotrado las expresiones para desplazamiento y giro nulos son:

$$W(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad ; \quad \left. \frac{\partial W(r, \theta)}{\partial r} \right|_{r=a} = 0 \quad (2.a, b)$$

Y para el caso de borde Simplemente Apoyado, además de la condición de desplazamiento nulo, se tiene la condición de momento flector nulo en la dirección radial, quedando:

$$W(r, \theta)|_{r=a} = 0 \quad ; \quad M_r = -D_r \left[\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \nu_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)^2 \right] \Big|_{r=a} = 0 \quad (3.a, b)$$

Para la resolución del modelo estructural en el presente trabajo se utilizan las dos versiones anteriormente mencionadas y se realiza un análisis comparativo entre las mismas.

3.1 Método 1: Ritz optimizado

A los efectos de aplicar el método de Ritz optimizado, se aproxima la función amplitud de desplazamiento de la placa mediante una suma de unas pocas funciones coordenadas, las cuales cumplen las condiciones de borde.

$$W(r, \theta) \cong W_a(r, \theta) = A_0 f_0(r) + A_1 f_1(r) + A_2 f_2(r) \cos(n\theta) \quad (4)$$

Las expresiones adoptadas para las funciones coordenadas son:

$$f_i(r) = (1 + r^\gamma \alpha_i + r^2 \beta_i) r^i \quad i = 0, 1, 2. \quad (5)$$

donde γ es el parámetro de optimización sugerido por Lord Rayleigh (Lord Rayleigh, 1945) que permite una minimización ulterior de los autovalores en estudio y α_i, β_i son los coeficientes que se determinan a partir de la verificación de las condiciones de borde (2.a,b) y (3.a,b)

Al considerar los casos propuestos se obtienen las expresiones para condición de borde empotrado:

$$\alpha_i = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2}{(\gamma - 2)} \quad i = 0, 1, 2. \quad (6)$$

$$\beta_i = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma}{(\gamma - 2)}$$

y para borde simplemente apoyado:

$$\alpha_i = \frac{1}{a^\gamma} \frac{2(1 + 2i + \nu_\theta)}{(\gamma - 2)(1 + 2i + \gamma + \nu_\theta)} \quad i = 0, 1, 2. \quad (7)$$

$$\beta_i = -\frac{1}{a^2} \frac{\gamma(\gamma + \nu_\theta - 1 + 2i)}{(\gamma - 2)(1 + 2i + \gamma + \nu_\theta)}$$

Se requiere, de acuerdo al método de Ritz, que la funcional de energía sea un mínimo.

En la expresión (4), cuando se propuso la configuración deformada para la placa, se consideraron tres parámetros: A_0 , A_1 y A_2 . Es con respecto a estos parámetros que se minimiza la funcional tomando las derivadas parciales con respecto a cada uno de ellos e igualados a cero.

$$\frac{\partial J(W_a(r, \theta))}{\partial A_i} = 0; \quad i = 0, 1, 2. \quad (8)$$

Este procedimiento conduce a un sistema de ecuaciones simultáneas, lineales en los coeficientes A_i , cuya solución no trivial conduce a la ecuación-determinante en $\omega(\gamma)$

Se obtienen así los autovalores del problema que constituyen los coeficientes de frecuencia natural del sistema y que expresamos en forma adimensional

$$\Omega = \omega a^2 \sqrt{\rho h / D_r} \quad (9)$$

Estos coeficientes quedan expresados en función del parámetro de optimización γ y como los autovalores de la ecuación son cotas superiores, minimizando con respecto a este parámetro γ se obtienen los valores optimizados de los coeficientes de frecuencia natural.

$$\frac{\partial \Omega(\gamma)}{\partial \gamma} = 0 \quad (10)$$

Como es conocido el menor coeficiente de frecuencia es el coeficiente de frecuencia fundamental.

3.2 Método 1: Ritz con sumatoria de funciones

Para el método de Ritz, con el cual se realiza la comparación de resultados, se propone una aproximación utilizando una sumatoria de funciones coordenadas en r y θ :

$$W_a(r, \theta) = \sum_{k=1}^{(p+1)(q+1)} C_k \phi_k(r, \theta); \quad \text{con } k = j(p+1) + 1 + i \quad (11)$$

donde cada función coordenada $\phi_k(r, \theta)$ satisface las condiciones de borde de la placa. Se adoptan para este análisis funciones generadas de la siguiente forma:

$$\phi_{j(p+1)+1+i} = (r^2 - 1)^2 r^{(2i+j)} \cos(j\theta); \quad j = 0, 1, \dots, p; \quad i = 0, 1, \dots, q; \quad (12)$$

quedando definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= (r^2 - 1)^2 \\
\phi_2 &= (r^2 - 1)^2 r^2 \\
&\dots \\
\phi_{(p+1)+1} &= (r^2 - 1)^2 r \cos(\theta) \\
\phi_{(p+1)+2} &= (r^2 - 1)^2 r^3 \cos(\theta) \\
&\dots \\
\phi_{2(p+1)+1} &= (r^2 - 1)^2 r^2 \cos(2\theta) \\
\phi_{2(p+1)+2} &= (r^2 - 1)^2 r^4 \cos(2\theta) \\
&\dots \\
\phi_{j(p+1)+1+i} &= (r^2 - 1)^2 r^{(2i+j)} \cos(j\theta) \\
&\dots \\
\phi_{(p+1)(q+1)} &= (r^2 - 1)^2 r^{(2p+q)} \cos(q\theta)
\end{aligned} \tag{13}$$

Adoptando $p = q = 8$ el sistema queda determinado por 81 ecuaciones.

Una vez que se tienen todas las funciones coordenadas generadas se puede, de acuerdo con el método de Ritz, introducir estas funciones aproximantes dentro de la funcional (1) donde la integración de $J(W_a(r, \theta))$ tiene la forma de una función homogénea cuadrática de coeficientes C_k . El mínimo de esta función lleva a un sistema de ecuaciones homogéneo de primer orden para los coeficientes de desplazamiento C_k :

$$\frac{\partial J(W_a(r, \theta))}{\partial C_k} = 0; \quad k = 0, 1, \dots, (q+1)(p+1); \tag{14}$$

El sistema de ecuaciones homogéneo puede ser escrito de la forma:

$$[\mathbf{K}^* - \omega^2 \mathbf{L}^*][\mathbf{C}] = 0 \tag{15}$$

Donde ω y su adimensionalización Ω ya fueron definidos anteriormente en la expresión (9), \mathbf{K}^* y \mathbf{L}^* están definidas de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & k_0 \end{bmatrix} \\
\mathbf{L}^* &= \begin{bmatrix} \mathbf{L} & -M\phi_i(r_M, \theta_M) \\ -M\phi_j(r_M, \theta_M) & M \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{16.a,b}$$

y \mathbf{K} y \mathbf{L} son matrices simétricas cuyos elementos son de la forma:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}_{ij} = & D_r \int_0^{2\pi} \int_0^r \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} r dr d\theta + D_\theta \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) r dr d\theta \\
& + D_r \nu_\theta \int_0^{2\pi} \int_0^r \left[\frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r^2} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \phi_i}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial \theta^2} \right) \right] r dr d\theta \\
& + D_k \int_0^{2\pi} \int_0^r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_i}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi_j}{\partial r \partial \theta} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial \phi_j}{\partial \theta} \right) r dr d\theta \\
\mathbf{L}_{ij} = & \rho h \int_0^{2\pi} \int_0^r \phi_i \phi_j r dr d\theta + M \phi_i(r_M, \theta_M) \phi_j(r_M, \theta_M)
\end{aligned} \tag{17.a,b}$$

Los coeficientes de frecuencia natural del sistema se obtienen de la resolución del determinante igual a cero en la ecuación (15) ya que la condición de no trivialidad conduce a una ecuación trascendental en Ω . Como se mencionara el método de Ritz permite obtener cotas superiores de las frecuencias, las raíces de esta ecuación constituyen cotas superiores en los coeficientes de frecuencia natural.

4 RESULTADOS NUMÉRICOS

A continuación se dan los valores de los coeficientes adimensionales de frecuencia Ω obtenidos por los métodos descriptos anteriormente: (1) Optimizado y (2) Sumatoria de funciones. Se consideran dos posiciones (r_M, θ_M) de la masa puntual y tres valores diferentes de la magnitud M , expresados con relación a la masa propia de la placa ($M_p = 2 \pi \rho h a$), siendo esta relación $m = M/M_p$.

En la Tabla 1 se comparan las primeras frecuencias naturales de una placa isótropa ($D_\theta/D_r = 1$; $D_k/D_r = 7/20$), empotrada en su contorno y con el sistema masa-resorte adosado en el centro de la misma ($r_M = 0$). Para una relación de rigidez del resorte definida por $K_m = k_0 a^2/D_r$ de 1, 2, 5 y tendiendo a infinito, fue posible realizar comparaciones con trabajos publicados para placas circulares isótropas ($D_r = D$) con masa elástica y rígidamente adosada respectivamente.

Los resultados de la Tabla 2 corresponden al modelo anteriormente descripto, con la masa adosada a una distancia del centro igual a $0.5 a$. Al igual que en la Tabla 1 se tiene para el caso de $K_m \rightarrow \infty$ la comparación de los valores con los existentes en trabajos de placa isótropa con masa rígidamente adosada.

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1				Ω_2			
			(1)	(2)	D. R. Avalos et al. (1994)	V. Ranjan and M. K. Ghosh (2006)	(1)	(2)	D. R. Avalos et al. (1994)	S. Maiz et al. (2008)
0,00			10,2160	10,2158	10,21583	10,135	40,4142	21,2604	39,77115	21,260
0,10	1	3,16	1,76619	1,76636	1,76620	-	10,3034	10,3030	10,30300	-
	2	4,47	2,47190	2,47237	2,47191	-	10,3950	10,3941	10,39414	-
	5	7,07	3,78183	3,78347	3,78182	-	10,6951	10,6908	10,69069	-
	10	10,00	5,04050	5,04409	-	-	11,2814	11,2545	-	-
	50	22,36	7,39303	7,39774	-	-	-	16,1254	-	-
	100	31,62	7,76825	7,77183	-	-	-	20,0764	-	-
	250	50,00	7,98028	7,98305	-	-	-	21,2604	-	-
	500	70,71	8,04779	8,05029	-	-	-	21,2604	-	-
∞	-	8,11351	8,11573	8,10940	8,045	-	21,2604	29,88797	21,260	
0,25	1	2,00	1,11721	1,11732	1,11721	-	10,3018	10,3014	10,30143	-
	2	2,83	1,56433	1,56463	1,56434	-	10,3886	10,3878	10,38778	-
	5	4,47	2,40093	2,40201	2,40096	-	10,6541	10,6505	10,65041	-
	10	6,32	3,23366	3,23624	-	-	11,1136	11,0957	-	-
	50	14,14	5,26401	5,27304	-	-	-	14,3497	-	-
	100	20,00	5,79971	5,81012	-	-	-	17,1556	-	-
	250	31,62	6,16673	6,17755	-	-	-	21,2397	-	-
	500	44,72	6,29515	6,30597	-	-	-	21,2604	-	-
∞		6,42575	6,43649	6,42348	-	-	21,2604	26,46105	-	
0,50	1	1,41	0,79003	0,79010	0,79003		10,3013	10,3009	10,30092	-
	2	2,00	1,10637	1,10658	1,10637		10,3866	10,3858	10,38575	-
	5	3,16	1,69966	1,70042	1,69968	-	10,6418	10,6384	10,63834	-
	10	4,47	2,29577	2,29764	-	-	11,0672	11,0513	-	-
	50	10,00	3,86159	3,86983	-	-	-	13,8386	-	-
	100	14,14	4,35197	4,36304	-	-	-	16,2035	-	-
	250	22,36	4,72906	4,74226	-	-	-	19,7776	-	-
	500	31,62	4,87141	4,88536	-	-	-	21,2604	-	-
∞		5,02264	5,03732	5,02183	4,983	-	21,2604	24,85446	21,260	

Tabla 1: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular isótropa ($D_o/D_r = 1$; $D_k/D_r = 7/20$; $D = D_r$) Empotrada en su contorno con una masa elásticamente adosada en el centro de la misma ($r_M = 0$).

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1				Ω_2		
			(1)	(2)	V. Ranjan and M. K. Ghosh (2006)	S. Maiz et al. (2008)	(1)	(2)	S. Maiz et al. (2008)
0,00			10,2160	10,2158	10,135	10,216	40,4142	21,2604	21,260
0,10	1	3,16	1,77977	1,77422	-	-	10,2402	10,2398	-
	2	4,47	2,51048	2,49492	-	-	10,2658	10,2648	-
	5	7,07	3,93501	3,87547	-	-	10,3527	10,3468	-
	10	10,00	5,46365	5,30769	-	-	10,5387	10,5089	-
	50	22,36	8,93875	8,60325	-	-	-	12,6409	-
	100	31,62	9,29280	9,05830	-	-	-	14,4752	-
	250	50,00	9,44103	9,26044	-	-	-	16,0662	-
	500	70,71	9,48210	9,31688	-	-	-	16,6205	-
∞			9,51964	9,36845	9,291	9,3695	-	17,1498	17,160
0,25	1	2,00	1,12568	1,12217	-	-	10,2397	10,2394	-
	2	2,83	1,58806	1,57826	-	-	10,2640	10,2630	-
	5	4,47	2,49189	2,45440	-	-	10,3398	10,3350	-
	10	6,32	3,47620	3,37633	-	-	10,4773	10,4571	-
	50	14,14	6,70816	6,12287	-	-	-	11,4270	-
	100	20,00	7,76535	7,04197	-	-	-	12,3319	-
	250	31,62	8,36646	7,67926	-	-	-	13,5238	-
	500	44,72	8,53721	7,89012	-	-	-	14,1069	-
∞			8,69010	8,09295	-	-	-	14,7871	-
0,50	1	1,41	0,79584	0,79351	-	-	10,2396	10,2392	-
	2	2,00	1,12300	1,11607	-	-	10,2634	10,2625	-
	5	3,16	1,76269	1,73623	-	-	10,3361	10,3315	-
	10	4,47	2,46187	2,39118	-	-	10,4615	10,4435	-
	50	10,00	4,93140	4,44109	-	-	-	11,1947	-
	100	14,14	6,06576	5,26673	-	-	-	11,8127	-
	250	22,36	7,01845	5,98539	-	-	-	12,6534	-
	500	31,62	7,35531	6,27167	-	-	-	13,1063	-
∞			7,67931	6,57967	6,514	6,5858	-	13,6886	13,701

Tabla 2: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular isótropa ($D_\theta/D_r = 1$; $D_k/D_r = 7/20$) Empotrada en su contorno con una masa elásticamente adosada en mitad del radio ($r_M = 0.50 a$).

Puede verse que los resultados obtenidos para la frecuencia fundamental, en los casos en que la masa se encuentra en el centro de la placa, el método de Ritz optimizado donde se emplean solo tres funciones tiene una excelente aproximación con respecto al método de Ritz con sumatoria de 81 funciones.

En cambio para la segunda frecuencia, tanto para la masa centrada como ubicada en la mitad del radio, el método optimizado tiene problemas numéricos (indeterminación) a medida

que el resorte aumenta su rigidez ($K_m > 10$).

Un análisis similar se realiza para una placa ortótropa empotrada en el contorno. Los resultados se presentan en las Tablas 3 y 4 para la masa centrada y excéntrica ubicada a $0.5 r$, respectivamente.

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1		Ω_2	
			(1)	(2)	(1)	(2)
0,00			9,33290	9,33156	21,7864	20,5756
0,10	1	3,16	1,75952	1,76043	9,44158	9,43944
	2	4,47	2,45294	2,45545	9,55562	9,55291
	5	7,07	3,70695	3,71590	9,92758	9,92481
	10	10,00	4,84133	4,86134	10,6277	10,6276
	50	22,36	6,67739	6,71676	-	15,9210
	100	31,62	6,95089	6,99014	-	19,6663
	250	50,00	7,10871	7,14717	-	20,5756
	500	70,71	7,15980	7,19788	-	20,5756
0,25	1	2,00	1,11310	1,11367	9,43925	9,43712
	2	2,83	1,55293	1,55449	9,54625	9,54357
	5	4,47	2,35854	2,36410	9,86959	9,86664
	10	6,32	3,12674	3,13983	10,4092	10,4086
	50	14,14	4,78746	4,83126	-	14,0563
	100	20,00	5,17480	5,22682	-	16,8562
	250	31,62	5,43353	5,49035	-	20,5132
	500	44,72	5,52360	5,58188	-	20,5756
0,50	1	1,41	0,78715	0,78755	9,43849	9,43637
	2	2,00	1,09843	1,09954	9,54329	9,54063
	5	3,16	1,67071	1,67462	9,85244	9,84944
	10	4,47	2,22406	2,23334	10,34880	10,3480
	50	10,00	3,52742	3,56373	-	13,4917
	100	14,14	3,88597	3,93318	-	15,9036
	250	22,36	4,14809	4,20376	-	19,1866
	500	31,62	4,24460	4,30341	-	20,5756

Tabla 3: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular ortótropa ($D_\theta/D_r = 1/2$; $D_k/D_r = 1/3$) Empotrada en su contorno con una masa elásticamente adosada en el centro de la misma ($r_M = 0$).

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1		Ω_2	
			(1)	(2)	(1)	(2)
0,00			9,33290	9,33156	21,7864	20,5756
0,10	1	3,16	1,77912	1,77279	9,35775	9,35645
	2	4,47	2,50852	2,49080	9,38445	9,38271
	5	7,07	3,92577	3,85821	9,47733	9,47050
	10	10,00	5,42763	5,25372	9,68771	9,65141
	50	22,36	8,33916	8,07218	-	12,0560
	100	31,62	8,57543	8,38546	-	13,8510
	250	50,00	8,67846	8,52657	-	15,3388
0,25	500	70,71	8,70776	8,56682	-	15,8587
	1	2,00	1,12528	1,12129	9,35720	9,35591
	2	2,83	1,58691	1,57576	9,38215	9,38047
	5	4,47	2,48712	2,44466	9,46097	9,45541
	10	6,32	3,46161	3,34947	9,60633	9,58383
	50	14,14	6,48967	5,90817	-	10,6134
	100	20,00	7,33038	6,67589	-	11,5365
0,50	250	31,62	7,77413	7,17534	-	12,6861
	500	44,72	7,89956	7,33658	-	13,2324
	1	1,41	0,79571	0,79289	9,35703	9,35573
	2	2,00	1,12222	1,11433	9,38143	9,37977
	5	3,16	1,75951	1,72957	9,45629	9,45107
	10	4,47	2,45273	2,37336	9,58647	9,56692
	50	10,00	4,82846	4,31405	-	10,3344
100	14,14	5,83224	5,04319	-	10,9460	
250	22,36	6,60705	5,64668	-	11,7465	
500	31,62	6,86881	5,87939	-	12,1660	

Tabla 4: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular ortótropa ($D_\theta/D_r = 1/2$; $D_k/D_r = 1/3$) Empotrada en su contorno con una masa elásticamente adosada en mitad del radio ($r_M = 0.50 a$).

Nuevamente se observa un excelente comportamiento del método de Ritz optimizado con una rápida convergencia, para el caso de la masa centrada, con respecto al método de sumatoria de funciones. Igualmente se tienen dificultades en el método de Ritz optimizado, a medida que el resorte aumenta su rigidez ($K_m > 10$), cuando se calcula la segunda frecuencia tanto en el caso de masa centrada como ubicada en la mitad del radio.

Análogamente se hace el estudio de una placa ortótropa simplemente apoyada en su contorno y los resultados se muestran en las tablas 5 y 6 para la masa centrada y a mitad del radio, respectivamente.

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1		Ω_2	
			(1)	(2)	(1)	(2)
0,00			4,07609	4,08003	13,8882	13,2759
0,10	1	3,16	1,70306	1,70485	4,25599	4,25777
	2	4,47	2,27402	2,27867	4,49239	4,49241
	5	7,07	2,95420	2,96449	5,41694	5,41361
	10	10,00	3,22182	3,23368	7,13893	6,9188
	50	22,36	3,40407	3,41592	13,3286	13,0184
	100	31,62	3,42383	3,43561	13,6926	13,2759
	250	50,00	3,43534	3,44708	13,6942	13,2759
	500	70,71	3,43913	3,45084	13,6945	13,2759
0,25	1	2,00	1,08216	1,08322	4,23624	4,23824
	2	2,83	1,46565	1,46838	4,40871	4,40921
	5	4,47	2,03776	2,04539	4,96335	4,96305
	10	6,32	2,39821	2,41032	5,83018	5,87367
	50	14,14	2,76935	2,78564	10,8848	10,2049
	100	20,00	2,81773	2,83439	12,6778	12,5811
	250	31,62	2,84660	2,86345	13,6877	13,2759
	500	44,72	2,85618	2,87308	13,6910	13,2759
0,50	1	1,41	0,76625	0,76698	4,23051	4,23258
	2	2,00	1,04159	1,04347	4,38676	4,38742
	5	3,16	1,47435	1,47981	4,85144	4,85090
	10	4,47	1,78661	1,79631	5,59116	5,57393
	50	10,00	2,19408	2,21079	9,70213	9,1217
	100	14,14	2,25802	2,27581	10,9150	11,1797
	250	22,36	2,29767	2,31611	13,1481	13,2759
	500	31,62	2,31108	2,32973	13,6811	13,2759

Tabla 5: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular ortótropa ($D_\theta/D_r = 1/2$; $D_k/D_r = 1/3$) Simplemente Apoyada en su contorno con una masa elásticamente adosada en el centro de la misma ($r_M = 0$).

m	K_m	$\sqrt{\frac{K_m}{m}}$	Ω_1		Ω_2	
			(1)	(2)	(1)	(2)
0,00			4,07609	4,08003	13,8882	13,2759
0,10	1	3,16	1,75080	1,75921	4,15337	4,12360
	2	4,47	2,40979	2,44061	4,26718	4,18878
	5	7,07	3,30548	3,44399	4,91774	4,64229
	10	10,00	3,60842	3,76248	5,68100	5,89146
	50	22,36	3,75410	3,88009	-	10,2820
	100	31,62	3,76728	3,88961	-	11,2477
	250	50,00	3,77477	3,89493	-	11,6953
0,25	500	70,71	3,77720	3,89671	-	11,8171
	1	2,00	1,10974	1,11407	4,14423	4,11838
	2	2,83	1,54043	1,55365	4,22190	4,16202
	5	4,47	2,27721	2,33706	4,51465	4,32984
	10	6,32	2,82055	2,96851	5,15296	4,73598
	50	14,14	3,33444	3,55736	-	7,6174
	100	20,00	3,38695	3,60720	-	8,9476
0,50	250	31,62	3,41643	3,63430	-	9,9417
	500	44,72	3,42592	3,64265	-	10,2716
	1	1,41	0,78520	0,78804	4,14164	4,11691
	2	2,00	1,09209	1,10034	4,21092	4,15567
	5	3,16	1,63766	1,67127	4,43903	4,28270
	10	4,47	2,11134	2,19832	4,86759	4,52606
	50	10,00	2,82032	3,06849	-	6,3510
0,50	100	14,14	2,92402	3,19182	-	7,4683
	250	22,36	2,98481	3,26108	-	8,5319
	500	31,62	3,00470	3,28304	-	8,9580

Tabla 6: Comparación de los coeficientes de frecuencia para una placa circular ortótropa ($D_\theta/D_r = 1/2$; $D_k/D_r = 1/3$) Simplemente Apoyada en su contorno con una masa elásticamente adosada en mitad del radio ($r_M = 0.50 a$).

Se puede observar que en el caso de placa circular ortótropa simplemente apoyada en su contorno y masa centrada, Tabla 5, no se tuvieron inconvenientes para el cálculo de ambas frecuencias en estudio. Y se tienen mejores resultados en el método optimizado que en el de sumatoria de funciones para la frecuencia fundamental.

En el caso de masa ubicada a mitad del radio, se sigue observando igual comportamiento que en los casos anteriores, donde con el método optimizado al calcular la segunda frecuencia, se pierde precisión en los resultados al aumentar la rigidez del resorte.

5 CONCLUSIONES

Puede verse que los valores obtenidos de los dos primeros coeficientes de frecuencia natural guardan muy buena aproximación entre los métodos usados y con casos particulares

disponibles en la literatura para el caso de placa circular isótropa empotrada en su contorno.

El método optimizado permite determinar los coeficientes de frecuencia fundamental y con pocos términos lograr excelente precisión.

El método sin optimizar es más estable y con 81 términos tiene precisión aceptable en todos los casos calculados.

Para valores donde la constante de rigidez del resorte es mayor de 10 el método optimizado se indetermina al intentar obtener el coeficiente de frecuencia natural, por lo que no resulta adecuada su aplicación en estos casos en tanto que sí es aplicable el método de Ritz sin optimizar.

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue desarrollado en los Departamentos de Ingeniería y de Matemática de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la UNS, por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) de Argentina.

REFERENCIAS

- Avalos D. R., Larrondo H. A. and Laura P. A. A., Transverse vibrations of a circular plate carrying an elastically mounted mass, *Journal of Sound and Vibrations*, 177(2):251-258, 1994.
- Bambill D. V., Laura P. A. A., Rossit C. A. y Escanes S. J., Frecuencias naturales de vibración de placas circulares con una masa adosada, *Mecánica Computacional*, Vol.XXI:2168-2175, 2002.
- Bambill D. V., La Malfa S., Rossit C. A. y Laura P. A. A., Analytical and experimental investigation on transverse vibrations of solid, circular and annular plates carrying a concentrated mass at an arbitrary position with marine applications, *Ocean Engineering*, 31:127-138, 2004.
- Escanes S. J., Bambill D. V. y Rossit C. A., Vibraciones libres de placas circulares con ortotropía polar y una masa excéntrica rígidamente adosada, *Mecánica Computacional*, Vol.XXII: 786-798, 2003.
- Laura P. A. A., Vibrations of Orthotropic Plates, *Institute of Applied Mechanics*, 1998.
- Leissa A. W., *Vibrations of Plates*, NASA S. P. 160, 1969.
- Lekhnitskii S. G., *Anisotropic Plates*, Gordon and Breack Science Publishers, New York, N.Y., 1968.
- Lord Rayleigh, *The Theory of Sound*, Segunda Edición, Vol. 1, Macmillan, London, 1884, Sec. 88 (Re-Edición por Dover, New York), 1945.
- Maiz S., Rossit C. A., Bambill D. V. and Susca A., Transverse vibrations of a clamped elliptical plate carrying a concentrated mass at an arbitrary position, *Journal of Sound and Vibrations*, Aceptado para publicación, 2008.
- Ranjan V. and Ghosh M. K., Transverse vibration of thin solid and annular circular plate with attached discrete masses, *Journal of Sound and Vibrations*, 292:999-1003, 2006.
- Ritz W., Über eine neue Methode zur Lösung gewisser Variationsprobleme der mathematischen Physik (Un nuevo método para resolver ciertos problemas de variaciones en la física matemática), *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 135:1-61, 1908.