

## VIBRACIONES TRANSVERSALES POR EL MÉTODO DE CUADRATURA DIFERENCIAL DE UNA VIGA TIMOSHENKO ROTANTE, ESCALONADA Y ELÁSTICAMENTE VINCULADA

Daniel H. Felix<sup>a</sup>, Raúl E. Rossi<sup>a</sup>, Diana V. Bambill<sup>a,b</sup>

<sup>a</sup>Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur, Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina <http://www.uns.edu.ar>

<sup>b</sup>Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), Argentina  
E-mail: [dhfelix@criba.edu.ar](mailto:dhfelix@criba.edu.ar), [rerossi@uns.edu.ar](mailto:rerossi@uns.edu.ar), [dbambill@criba.edu.ar](mailto:dbambill@criba.edu.ar)

**Palabras Clave:** vibraciones, cuadratura diferencial, viga rotante escalonada, vinculación elástica.

**Resumen.** En este trabajo se obtienen los coeficientes de las primeras frecuencias naturales de vibración transversal de una viga rotante, de sección escalonada, que se encuentra vinculada elásticamente al eje de rotación. El modelo propuesto para el análisis, puede ser utilizado para representar elementos estructurales de la ingeniería, tales como aspas de helicópteros, generadores eólicos o turbinas, entre otros. El sistema de ecuaciones gobernante del problema está basado en la teoría de vigas Timoshenko, que como es sabido contempla los efectos de la inercia rotatoria y la deformación por corte. El problema se resuelve mediante la aplicación del método de cuadratura diferencial (MCD), para lo cual se descompone el dominio de la viga en tramos de sección constante. También se plantea para algunos casos una solución independiente utilizando el método de elementos finitos con el fin de corroborar los resultados. En el trabajo se incluye un análisis de convergencia del MCD, para la elección del mallado de cada tramo.

## 1 INTRODUCCIÓN

La determinación de vibraciones transversales naturales en elementos estructurales rotantes tales como hélices de turbinas, brazos de robots o aspas de helicópteros, entre muchas otras aplicaciones tecnológicas, puede realizarse con precisión aceptable mediante la utilización del modelo de viga rotante, que tiene en cuenta la rigidización que produce la fuerza centrífuga, (Banerjee, 2000); (Chung and Yoo, 2002).

Si se desea incluir en el análisis modelos de reducida esbeltez, especialmente adecuada resulta la utilización de la teoría de vigas Timoshenko (Seon et al, 1999); (Lin and Hsiao, 2001), ya que la misma contempla los efectos de la deformación por corte y la inercia rotatoria, (Al-Ansary, 1998) ; (Banerjee, 2001).

En el presente estudio de vigas rotantes se contempla la variación escalonada de la sección transversal (Karami et al, 2003); (Vinod et al, 2007), y la flexibilidad de la unión de la viga con el eje de giro (Lee and Kuo, 1993). La figura 1 muestra un esquema de la viga que rota con velocidad  $\bar{\eta}$ . En el plano rotante  $\bar{X}, \bar{Y}$  se producen las vibraciones transversales.

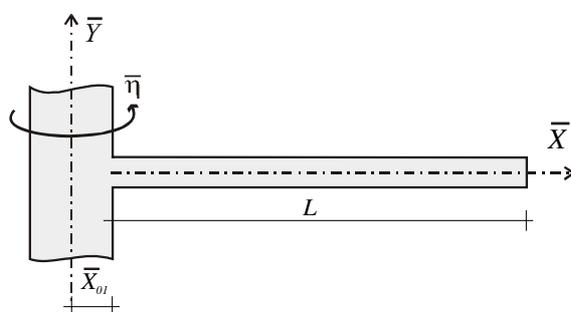


Figura 1: Viga Timoshenko rotante elásticamente empotrada al eje de rotación y libre en el otro extremo.

En la figura 2 se muestra el esquema de cálculo de los cuatro casos analizados en el presente trabajo.

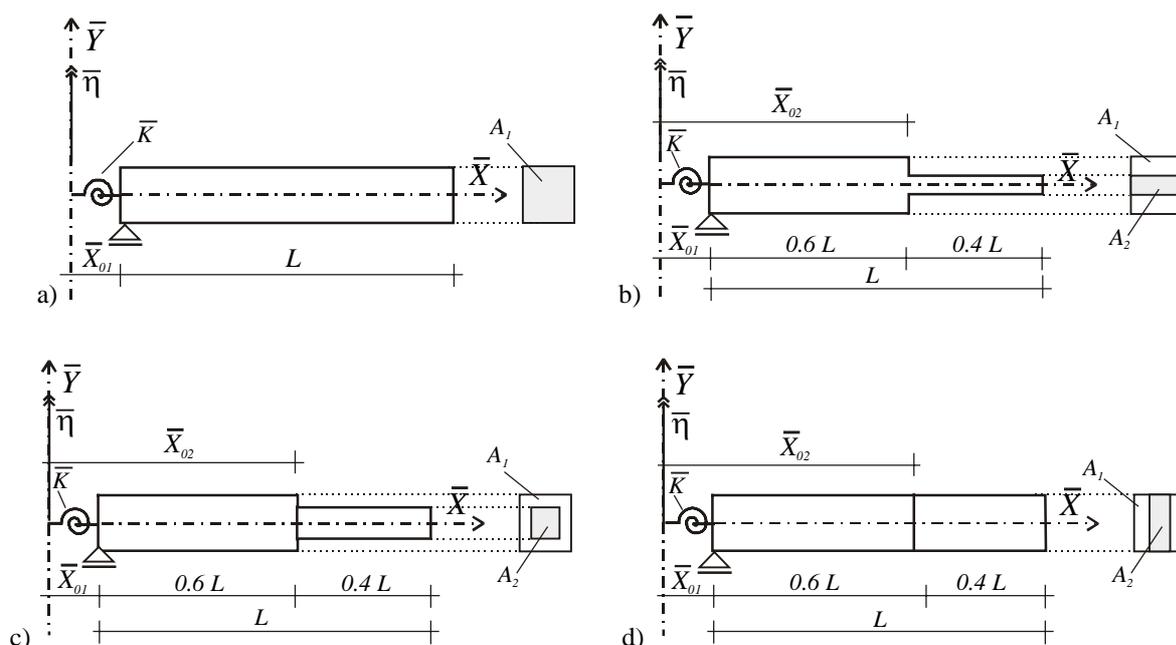


Figura 2: Esquema de cálculo de la viga rotante con empotramiento elástico.: a) de sección uniforme, b) escalonada modelo I, c) escalonada modelo II, d) escalonada modelo III.

La figura 2a muestra una viga de sección transversal uniforme que rota a velocidad angular  $\bar{\eta}$  y se halla elásticamente vinculada al eje de giro que tiene dirección  $\bar{Y}$ . La rigidez a flexión de la unión entre la viga y el eje de giro se define mediante la constante  $\bar{K}$ . Las figuras 2b, c y d muestran los modelos de viga escalonada propuestos.

A los efectos de ejemplificar el proceso de análisis, se plantea una viga de dos tramos de sección transversal rectangular, no obstante los algoritmos presentados pueden ser utilizados para un número mayor de tramos y para diferentes formas de la sección transversal.

El problema es resuelto mediante una aproximación numérica, consistente en la aplicación del método de cuadratura diferencial con descomposición de dominio (Striz et al, 1995); (Liu and Wu, 2001). El algoritmo resultante es luego codificado en el Software *Mathematica*, (Wolfram, 1991).

Las expresiones que surgen de aplicar la teoría de vigas Timoshenko son utilizadas para obtener el conjunto de ecuaciones denominadas análogas de cuadratura (Gutiérrez et al, 1994), las que a su vez son llevadas de su forma escalar a la representación matricial, que resulta más conveniente para construir el algoritmo (Bert et al, 1994); (Bert and Malik, 1996).

Finalmente el algoritmo es utilizado para calcular los coeficientes correspondientes a las primeras frecuencias naturales de vibración transversal de la viga rotante.

Los valores de referencia se utilizan para comparar los resultados que se obtienen mediante el MCD. Éstos se obtuvieron mediante la aplicación del método de elementos finitos, (Rossi, 2006); (Rao and Grupta, 2001) o bien mediante resultados disponibles en la literatura (Maurizi et al, 1990); (Lee and Kuo, 1993). Los resultados son presentados tanto en forma numérica como gráfica.

## 2 DESARROLLO MATEMÁTICO

El desarrollo matemático comienza con la determinación de la fuerza centrífuga originada por la rotación de la viga, la cual es utilizada luego en el sistema de ecuaciones diferenciales que surge de aplicar la teoría de vigas Timoshenko.

En el caso de vigas de sección escalonada se plantean las ecuaciones diferenciales en cada tramo de la viga junto con las correspondientes ecuaciones de compatibilidad y condiciones de borde.

### 2.1 Teoría de vigas Timoshenko rotantes de sección escalonada

El esquema de la figura 3a pone en evidencia la acción de la fuerza centrífuga  $\bar{F}_2$ , generada en el tramo 2, sobre el tramo 1 de la viga escalonada. Análogamente la figura 3b representa un esquema general que pone en evidencia la acción de la fuerza centrífuga  $\bar{F}_{k+1}$ , generada por los tramos  $k+1$  y subsiguientes, sobre el tramo  $k$ -ésimo.

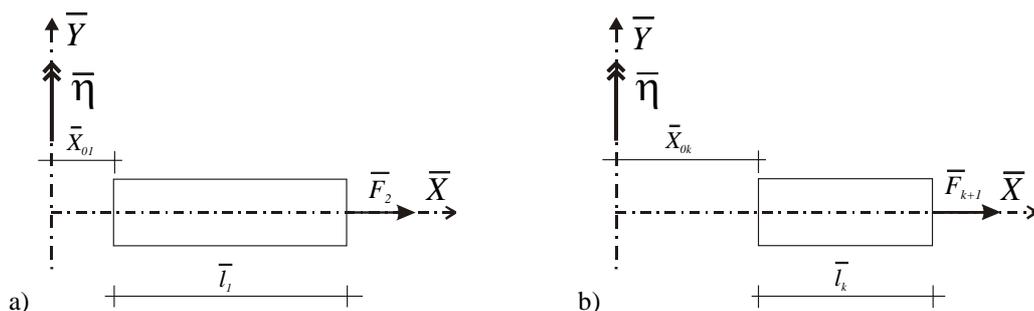


Figura 3: Fuerza centrífuga en una viga escalonada: a) sobre el tramo 1, b) sobre el tramo  $k$ -ésimo.

La forma adimensional de la fuerza centrífuga puede ser expresada en la siguiente forma (Banerjee, 2001):

$$N_k(x) = \eta^2 \frac{l_k^2}{s_1^2} \left( X_{0k} + \frac{1}{2} - X_{0k} x - \frac{1}{2} x^2 \right) + F_{k+1} \quad (1)$$

Los parámetros y variables presentes en la ecuación (1) y siguientes, se hallan definidos en la Tabla 1.

| Descripción   | Parámetro de configuración       | Forma o relación adimensional                  |
|---|----------------------------------|--|
| Módulo de Young   | $E$                              | -  |
| Densidad del material   | $\rho$                           | -  |
| Coeficiente de Poisson  | $\nu$                            | -  |
| Factor de corte   | $\kappa$                         | -  |
| Luz de la viga.   | $L$                              | -  |
| Longitud del tramo $k$ -ésimo.  | $\bar{l}_k$                      | $l_k = \bar{l}_k / L$                          |
| Área de la sección transversal del tramo $k$ -ésimo.  | $A_k$                            | $\alpha_k = A_k / A_1$                         |
| Momento de inercia de la sección transversal del tramo $k$ -ésimo.                              | $I_k$                            | -  |
| Radio de giro de la sección transversal del tramo $k$ -ésimo.                                   | $i_k = \sqrt{I_k / A_k}$         | -  |
| Parámetro de esbeltez del tramo $k$ -ésimo.   | -                                | $s_k = L / i_k$                                |
| Rigidez a flexión de la viga con el eje de rotación   | $\bar{K}$                        | $K = \bar{K} L / EI_1$                         |
| Coordenada espacial local (utilizada en cada tramo de la viga).                                 | $\bar{x}$                        | $x = \bar{x} / \bar{l}_k$                      |
| Coordenada espacial global.   | $\bar{X}_{0k}$                   | $X_{0k} = \bar{X}_{0k} / L$                    |
| Amplitud de la deflexión transversal de la viga en el tramo $k$ -ésimo.                         | $\bar{W}_k = \bar{W}_k(\bar{x})$ | $W_k = \bar{W}_k(\bar{x}) / \bar{l}_k$         |
| Amplitud de giro de la sección transversal en el tramo $k$ -ésimo.                              | $\bar{\Psi}_k(\bar{x})$          | $\Psi_k = \bar{\Psi}_k(\bar{x})$               |
| Amplitud del esfuerzo axial en el tramo $k$ -ésimo.   | $\bar{N}_k(\bar{x})$             | $N_k = \bar{N}_k(\bar{x}) / EA_k$              |
| Amplitud del esfuerzo de corte en el tramo $k$ -ésimo.  | $\bar{Q}_k(\bar{x}, t)$          | $Q_k(x) = \bar{Q}_k(\bar{x}) / EA_k$           |
| Amplitud del momento flector en el tramo $k$ -ésimo.  | $\bar{M}_k(\bar{x}, t)$          | $M_k(x) = (l_k / EI_k) \bar{M}_k(\bar{x})$     |
| Fuerza centrífuga aplicada al tramo $k$ -ésimo, producida por los tramos $k+1$ y subsiguientes. | $\bar{F}_{k+1}(\bar{x})$         | $F_{k+1} = \bar{F}_{k+1} / EA_{k+1}$           |
| Velocidad de rotación de la viga.   | $\bar{\eta}$                     | $\eta = \sqrt{\rho A_1 / EI_1} L^2 \bar{\eta}$ |
| Frecuencia natural de vibración transversal.  | $\omega$                         | $\Omega = \sqrt{\rho A_1 / EI_1} L^2 \omega$   |

Tabla 1: Descripción de los parámetros y variables utilizadas en los modelos de viga rotante que se muestran en la figura 2.

Las ecuaciones adimensionales que gobiernan el movimiento causado por la vibración transversal (perpendicular al plano de rotación), resultan para cada tramo de la viga:

$$\eta^2 (X_{0k} + x) \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_k \frac{d^2W_k}{dx^2} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \left( \frac{d^2W_k}{dx^2} - \frac{d\Psi_k}{dx} \right) = \Omega^2 W_k \quad (2)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 \frac{dW_k}{dx} - \frac{s_1^2}{l_k^2} \frac{d^2\Psi_k}{dx^2} + \left( \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 - \eta^2 \right) \Psi_k = \Omega^2 \Psi_k \quad (3)$$

En la unión de tramos adyacentes se deben satisfacer las ecuaciones de compatibilidad de desplazamientos siguientes:

$$-l_{(k-1)} W_{(k-1)} \Big|_{x=1} + l_k W_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (4)$$

$$-\Psi_{(k-1)} \Big|_{x=1} + \Psi_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (5)$$

y las ecuaciones de compatibilidad de esfuerzos internos:

$$-\alpha_{(k-1)} Q_{(k-1)} \Big|_{x=1} + \alpha_k Q_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (6)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} M_{(k-1)} \Big|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{l_k} M_k \Big|_{x=0} = 0 \quad (7)$$

Si en las ecuaciones (6) y (7) se expresan los esfuerzos de corte y de momento flector en función de los desplazamientos, se tiene:

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_{(k-1)}}{dx} - \frac{\kappa \Psi_{(k-1)}}{2(1+\nu)} \right) \Big|_{x=1} + \alpha_k \left( \left( N_k + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_k}{dx} - \frac{\kappa \Psi_k}{2(1+\nu)} \right) \Big|_{x=0} = 0 \quad (8)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} \frac{d\Psi_{(k-1)}}{dx} \Big|_{x=1} + \frac{\alpha_k}{l_k} \frac{d\Psi_k}{dx} \Big|_{x=0} = 0 \quad (9)$$

La unión del extremo interior de la viga con el eje de giro establece las siguientes condiciones de borde:

$$W_1 \Big|_{x=0} = 0 \quad (10)$$

$$\frac{1}{l_1} K \Psi_1(0) - M_1(0) = 0 \quad (11)$$

Si en la ecuación (11), se expresa el esfuerzo de flexión en función de los desplazamientos se tiene:

$$\frac{1}{l_1} K \Psi_1(0) - \frac{d\Psi_1}{dx}(0) = 0 \quad (12)$$

Por otra parte, las condiciones de borde naturales aplicables al borde exterior libre son:

$$Q_d \Big|_{x=1} = 0 \quad (13)$$

$$M_d \Big|_{x=1} = 0 \quad (14)$$

donde el subíndice  $d$  señala al último tramo de la viga (el más alejado del eje de rotación). Expresando la condiciones de borde naturales en término de los desplazamientos se llega a:

$$\left[ \left( N_d + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \frac{dW_d}{dx} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \Psi_d \right]_{x=1} = 0 \quad (15)$$

$$\frac{d\Psi_d}{dx} \Big|_{x=1} = 0 \quad (16)$$

## 2.2 Ecuaciones análogas de cuadratura diferencial

Las ecuaciones análoga de cuadratura de las ecuaciones diferenciales se obtienen aplicando las reglas de cuadratura a las ecuaciones diferenciales (2, 3):

$$\eta^2 (X_{0k} + x_i) \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(1)}) W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} N_{ki} \sum_{j=1}^n (A_{ij}^{(2)}) W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} W_{kj} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} \Psi_{kj} = \Omega^2 W_{ki} \quad (17)$$

$$-\frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(1)} W_{kj} - \frac{s_1^2}{l_k^2} \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(2)} \Psi_{kj} + \left( \frac{\kappa}{2(1+\nu)} s_1^2 s_k^2 - \eta^2 \right) \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(0)} \Psi_{kj} = \Omega^2 \Psi_{ki} \quad (18)$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura correspondientes a las ecuaciones de compatibilidad de los desplazamientos se obtienen a partir de las ecuaciones (4, 5) y se expresan en la forma:

$$-l_{(k-1)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} W_{(k-1)j} + l_k \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (19)$$

$$-\sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} + \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (20)$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura de las ecuaciones de compatibilidad de los esfuerzos internos se obtienen a partir de las ecuaciones (8, 9) y resultan:

$$-\alpha_{(k-1)} \left( \left( N_{(k-1)n(k-1)} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} W_{(k-1)j} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(0)} \Psi_{(k-1)j} \right) + \alpha_k \left( \left( N_{k1} + \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \right) \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} \right) = 0 \quad (21)$$

$$-\frac{\alpha_{(k-1)}}{l_{(k-1)}} \sum_{j=1}^n A_{nj}^{(1)} \Psi_{(k-1)j} + \frac{\alpha_k}{l_k} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (22)$$

Las ecuaciones análogas de las condiciones de borde en la unión de la viga con el eje de giro se establecen a partir de las ecuaciones (10,12) y resultan:

$$\sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} W_{kj} = 0 \quad (23)$$

$$\frac{K}{l_1} \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(0)} \Psi_{kj} - \sum_{j=1}^n A_{1j}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (24)$$

Mientras que para el borde exterior libre, se obtienen a partir de las ecuaciones (15, 16), siendo:

$$\frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{dj}^{(1)} W_{kj} - \frac{\kappa}{2(1+\nu)} \sum_{j=1}^n A_{dj}^{(0)} \Psi_{kj} = 0 \quad (25)$$

$$\sum_{j=1}^n A_{dj}^{(1)} \Psi_{kj} = 0 \quad (26)$$

La forma de obtener el conjunto de coeficientes de ponderación  $A_{1j}^{(q)}$ , y las reglas de cuadratura aplicadas en las ecuaciones precedentes es común a todas las aplicaciones del método y se detalla en el [apéndice](#) del presente trabajo ([Bert and Malik, 1996](#)).

El conjunto de ecuaciones (17-26) permite obtener los coeficientes de frecuencia buscados, si bien previamente se requiere reordenar adecuadamente el sistema de ecuaciones resultante, ([Felix et al, 2008](#)).

### 3 RESULTADOS NUMÉRICOS

En todos los ejemplos presentados se adopta el coeficiente de Poisson  $\nu=0.3$  y la relación adimensional  $E/\kappa G=3.059$ , que corresponde aproximadamente a una sección rectangular.

Previamente se realizó un análisis de convergencia del MCD con el fin de elegir el número adecuado de nodos de malla en cada tramo de la viga. Los resultados del análisis de convergencia se muestran en la [Tabla 2](#).

El ejemplo de la [Tabla 2](#) corresponde a los datos:  $\eta=5$ ,  $\nu=0.3$ ;  $l_1=0.6$   $l_2=0.4$ ;  $\alpha_2=0.6$ ;  $s_1=30$ ;  $s_2=50$ ; (sección I, ver [figura 2b](#)).

Se observa en la misma que  $n=15$  nodos por tramo resulta un valor adecuado para el presente estudio y en consecuencia, es el valor adoptado en este trabajo en todos los mallados realizados al utilizar el MCD.

| $K$      | $n$       | $\Omega_1$     | $\Omega_2$     | $\Omega_3$     | $\Omega_4$     | $\Omega_5$     |
|----------|-----------|----------------|----------------|----------------|----------------|----------------|
| 1        | 7         | 5.33799        | 17.7971        | 41.5950        | 79.2193        | 118.955        |
|          | 11        | 5.33789        | 17.7930        | 41.5617        | 79.0950        | 119.934        |
|          | <b>15</b> | <b>5.33789</b> | <b>17.7930</b> | <b>41.5617</b> | <b>79.0949</b> | <b>119.939</b> |
|          | 19        | 5.33789        | 17.7930        | 41.5617        | 79.0949        | 119.939        |
| 10       | 7         | 6.29901        | 19.4588        | 44.5184        | 81.8052        | 121.894        |
|          | 11        | 6.29856        | 19.4525        | 44.4937        | 81.6186        | 122.739        |
|          | <b>15</b> | <b>6.29856</b> | <b>19.4525</b> | <b>44.4937</b> | <b>81.6185</b> | <b>122.744</b> |
|          | 19        | 6.29856        | 19.4525        | 44.4937        | 81.6185        | 122.744        |
| 100      | 7         | 6.78598        | 20.6676        | 47.3472        | 84.7732        | 125.853        |
|          | 11        | 6.78533        | 20.6594        | 47.3386        | 84.5463        | 126.521        |
|          | <b>15</b> | <b>6.78533</b> | <b>20.6594</b> | <b>47.3387</b> | <b>84.5462</b> | <b>126.527</b> |
|          | 19        | 6.78533        | 20.6594        | 47.3387        | 84.5462        | 126.527        |
| 1000     | 7         | 6.85497        | 20.8650        | 47.8797        | 85.3901        | 126.768        |
|          | 11        | 6.85429        | 20.8564        | 47.8752        | 85.1605        | 127.401        |
|          | <b>15</b> | <b>6.85429</b> | <b>20.8564</b> | <b>47.8752</b> | <b>85.1604</b> | <b>127.407</b> |
|          | 19        | 6.85429        | 20.8564        | 47.8752        | 85.1604        | 127.407        |
| $\infty$ | 7         | 6.86295        | 20.8883        | 47.9440        | 85.4659        | 126.882        |
|          | 11        | 6.86227        | 20.8796        | 47.9400        | 85.2361        | 127.511        |
|          | <b>15</b> | <b>6.86227</b> | <b>20.8796</b> | <b>47.9400</b> | <b>85.2360</b> | <b>127.517</b> |
|          | 19        | 6.86227        | 20.8796        | 47.9400        | 85.2360        | 127.517        |

Tabla 2: Aplicación del MCD: análisis de convergencia de los coeficientes de las primeras frecuencias en la viga escalonada de dos tramos que se muestra en la [figura 2b](#),  $n$  indica el número de nodos adoptados por tramo.

La siguiente tabla presenta comparaciones de los valores de frecuencia fundamental de una viga Timoshenko de sección uniforme, elásticamente vinculada en un extremo y libre en el otro. Las primeras dos columnas corresponden a valores hallados en la literatura, la tercera a resultados obtenidos mediante el MEF ([ALGOR, 2001](#)), y la cuarta a resultados obtenidos mediante el MCD. Se destaca la excelente concordancia entre los resultados de las diferentes metodologías.

| $K$      | $\Omega_1$ |                     |         |         |
|----------|------------|---------------------|---------|---------|
|          | Lee, 1993  | Maurizi et al, 1990 | MEF     | MCD     |
| 1        | 1.5537     | 1.5520              | 1.55198 | 1.55200 |
| 10       | 2.9556     | 2.9444              | 2.94437 | 2.94442 |
| 100      | 3.4290     | 3.4132              | 3.41321 | 3.41327 |
| 1000     | 3.4892     | 3.4729              | 3.47295 | 3.47302 |
| $\infty$ | 3.4961     | 3.4798              | 3.47977 | 3.47984 |

Tabla 3: Viga Timoshenko de sección uniforme, elásticamente vinculada. Comparación con bibliografía:  $\nu = 0.3$ ,  $E/\kappa G = 3.059$ ,  $s = 30$ .

En los modelos resueltos con el MEF se utilizó una malla de 1000 elementos de igual longitud con la cual se logra una buena convergencia.

En la **Tabla 4** se presentan los coeficientes correspondientes a las primeras 5 frecuencias, de una viga uniforme calculados mediante el MCD y mediante el MEF, para el caso en que la viga no rota ( $\eta = 0$ ).

| K        | $\Omega_1$         |            | $\Omega_2$         |            | $\Omega_3$         |            | $\Omega_4$         |            | $\Omega_5$         |            |
|----------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|
|          | MCD<br>MEF         | $\Delta\%$ |
| 1        | 1.55200<br>1.55198 | -0.0013    | 15.6677<br>15.6673 | -0.0026    | 46.0112<br>46.0095 | -0.0037    | 87.4271<br>87.4232 | -0.0045    | 135.816<br>135.801 | -0.0110    |
| 10       | 2.94442<br>2.94437 | -0.0017    | 18.3735<br>18.3731 | -0.0022    | 49.3536<br>49.3523 | -0.0026    | 90.5429<br>90.5404 | -0.0028    | 138.480<br>138.467 | -0.0094    |
| 100      | 3.41327<br>3.41321 | -0.0018    | 20.2524<br>20.2520 | -0.0020    | 52.6413<br>52.6403 | -0.0019    | 94.3512<br>94.3496 | -0.0017    | 142.157<br>142.145 | -0.0084    |
| 1000     | 3.47302<br>3.47295 | -0.0020    | 20.5537<br>20.5533 | -0.0019    | 53.2645<br>53.2635 | -0.0019    | 95.1758<br>95.1742 | -0.0017    | 143.028<br>143.015 | -0.0091    |
| $\infty$ | 3.47984<br>3.47977 | -0.0020    | 20.5892<br>20.5887 | -0.0019    | 53.3398<br>53.3388 | -0.0019    | 95.2778<br>95.2763 | -0.0016    | 143.138<br>143.125 | -0.0091    |

Tabla 4: Viga Timoshenko de sección uniforme, elásticamente vinculada.

$$\nu = 0.3, E/\kappa G = 3.059, s = 30.$$

El análisis de la viga uniforme se completa mediante el cálculo de los coeficientes de las primeras frecuencias de la viga rotante, adoptando para el parámetro de velocidad de rotación, el valor  $\eta = 5$ . Los resultados se muestran en la **Tabla 5**.

Tanto en la **Tabla 4** como en la **Tabla 5** se han calculado en columnas adicionales, las diferencias porcentuales relativas entre los resultados de ambas metodologías, observándose una excelente concordancia.

| K        | $\Omega_1$         |            | $\Omega_2$         |            | $\Omega_3$         |            | $\Omega_4$         |            | $\Omega_5$         |            |
|----------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|
|          | MCD<br>MEF         | $\Delta\%$ |
| 1        | 5.23003<br>5.24091 | 0.2076     | 19.9511<br>19.9776 | 0.1326     | 50.3514<br>50.3874 | 0.0714     | 92.0329<br>92.1014 | 0.0744     | 140.781<br>140.902 | 0.0859     |
| 10       | 5.93885<br>5.94995 | 0.1866     | 22.0725<br>22.0993 | 0.1214     | 53.3496<br>53.3904 | 0.0764     | 94.9662<br>95.0445 | 0.0824     | 143.344<br>143.477 | 0.0927     |
| 100      | 6.32327<br>6.33496 | 0.1845     | 23.7112<br>23.7396 | 0.1198     | 56.3921<br>56.4404 | 0.0857     | 98.5791<br>98.6739 | 0.0962     | 146.877<br>147.033 | 0.1062     |
| 1000     | 6.37932<br>6.39113 | 0.1848     | 23.9883<br>24.0170 | 0.1196     | 56.9824<br>57.0324 | 0.0877     | 99.3688<br>99.4678 | 0.0996     | 147.716<br>147.878 | 0.1097     |
| $\infty$ | 6.38584<br>6.39766 | 0.1848     | 24.0212<br>24.0500 | 0.1199     | 57.0541<br>57.1043 | 0.0880     | 99.4668<br>99.5663 | 0.1000     | 147.822<br>147.985 | 0.1103     |

Tabla 5: Viga Timoshenko rotante, de sección uniforme, elásticamente vinculada.

$$\eta = 5, \nu = 0.3, E/\kappa G = 3.059, s = 30.$$

También se analizaron modelos de viga escalonada. En este caso se adoptaron los modelos de dos tramos que se muestran en las figuras 2b, c y d. Entre otros efectos, la remoción de parte del material del elemento estructural considerado puede provocar su rigidización, (Laura et al, 2001).

| K        | $\Omega_1$         |            | $\Omega_2$         |            | $\Omega_3$         |            | $\Omega_4$         |            | $\Omega_5$         |            |
|----------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|
|          | MCD<br>MEF         | $\Delta\%$ |
| 1        | 1.87660<br>1.87657 | -0.0016    | 13.9155<br>13.9151 | -0.0029    | 37.3694<br>37.3686 | -0.0021    | 75.1997<br>75.1977 | -0.0027    | 115.555<br>115.553 | -0.0017    |
| 10       | 3.56497<br>3.56490 | -0.0020    | 15.8881<br>15.8876 | -0.0031    | 40.6585<br>40.6577 | -0.0020    | 77.8599<br>77.8578 | -0.0027    | 118.471<br>118.468 | -0.0025    |
| 100      | 4.12742<br>4.12733 | -0.0022    | 17.1840<br>17.1835 | -0.0029    | 43.7365<br>43.7356 | -0.0021    | 80.9035<br>80.9013 | -0.0027    | 122.395<br>122.392 | -0.0025    |
| 1000     | 4.19850<br>4.19841 | -0.0021    | 17.3851<br>17.3847 | -0.0023    | 44.3031<br>44.3022 | -0.0020    | 81.5342<br>81.5320 | -0.0027    | 123.304<br>123.301 | -0.0024    |
| $\infty$ | 4.20661<br>4.20652 | -0.0021    | 17.4087<br>17.4082 | -0.0029    | 44.3713<br>44.3704 | -0.0020    | 81.6116<br>81.6094 | -0.0027    | 123.418<br>123.415 | -0.0024    |

Tabla 6:  $\eta = 0$ ,  $\nu = 0.3$ ;  $E/\kappa G = 3.059$ ;  $l_1 = 0.6$ ;  $l_2 = 0.4$ ;  $\alpha_2 = 0.6$ ;  $s_1 = 30$ ;  $s_2 = 50$ ; (secc. I, ver figura 2b).

Para el primero de los modelos de viga escalonada adoptados (figura 2b), se obtienen también resultados mediante la aplicación del MEF. Los resultados correspondientes se presentan en la Tabla 6 para la viga sin rotación ( $\eta = 0$ ), y en la Tabla 7 para el caso de la viga rotante con  $\eta = 5$ .

| K        | $\Omega_1$         |            | $\Omega_2$         |            | $\Omega_3$         |            | $\Omega_4$         |            | $\Omega_5$         |            |
|----------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|--------------------|------------|
|          | MCD<br>MEF         | $\Delta\%$ |
| 1        | 5.33789<br>5.34877 | 0.2038     | 17.7930<br>17.8131 | 0.1130     | 41.5617<br>41.5906 | 0.0695     | 79.0949<br>79.1403 | 0.0574     | 119.939<br>120.013 | 0.0617     |
| 10       | 6.29856<br>6.30852 | 0.1581     | 19.4525<br>19.4725 | 0.1028     | 44.4937<br>44.5249 | 0.0701     | 81.6185<br>81.6687 | 0.0615     | 122.744<br>122.827 | 0.0676     |
| 100      | 6.78533<br>6.79543 | 0.1489     | 20.6594<br>20.6801 | 0.1002     | 47.3387<br>47.3739 | 0.0744     | 84.5462<br>84.6042 | 0.0686     | 126.527<br>126.627 | 0.0790     |
| 1000     | 6.85429<br>6.86443 | 0.1479     | 20.8564<br>20.8773 | 0.1002     | 47.8752<br>47.9114 | 0.0756     | 85.1604<br>85.2204 | 0.0705     | 127.407<br>127.511 | 0.0816     |
| $\infty$ | 6.86227<br>6.87242 | 0.1479     | 20.8796<br>20.9006 | 0.1006     | 47.9400<br>47.9763 | 0.0757     | 85.2360<br>85.2962 | 0.0706     | 127.517<br>127.622 | 0.0823     |

Tabla 7:  $\eta = 5$ ,  $\nu = 0.3$ ;  $E/\kappa G = 3.059$ ;  $l_1 = 0.6$ ;  $l_2 = 0.4$ ;  $\alpha_2 = 0.6$ ;  $s_1 = 30$ ;  $s_2 = 50$ ; (secc. I, ver figura 2b).

En la Tabla 8 se comparan los coeficientes de las primeras frecuencias que corresponden a los distintos modelos de viga escalonada adoptados con sección I, II y III, para  $\eta = 0$ , y en la Tabla 9 se efectúa una comparación análoga para  $\eta = 5$ , (ver figura 2).

| $K$      | Secc | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ | $\Omega_5$ |
|----------|------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1        | I    | 1.87660    | 13.9155    | 37.3694    | 75.1997    | 115.555    |
|          | II   | 1.88044    | 15.3638    | 41.4541    | 81.6381    | 125.689    |
|          | III  | 1.88241    | 16.3965    | 46.0345    | 87.4545    | 134.821    |
| 10       | I    | 3.56497    | 15.8881    | 40.6585    | 77.8599    | 118.471    |
|          | II   | 3.59751    | 17.6711    | 44.7071    | 84.6002    | 128.424    |
|          | III  | 3.61616    | 19.0001    | 49.3739    | 90.4712    | 137.569    |
| 100      | I    | 4.12742    | 17.1840    | 43.7365    | 80.9035    | 122.395    |
|          | II   | 4.18181    | 19.2447    | 47.8515    | 88.0982    | 132.172    |
|          | III  | 4.21342    | 20.8411    | 52.6796    | 94.1437    | 141.375    |
| 1000     | I    | 4.19850    | 17.3851    | 44.3031    | 81.5342    | 123.304    |
|          | II   | 4.25630    | 19.4935    | 48.4412    | 88.8383    | 133.053    |
|          | III  | 4.28995    | 21.1377    | 53.3082    | 94.9369    | 142.278    |
| $\infty$ | I    | 4.20661    | 17.4087    | 44.3713    | 81.6116    | 123.418    |
|          | II   | 4.26481    | 19.5227    | 48.5123    | 88.9294    | 133.163    |
|          | III  | 4.29870    | 21.1727    | 53.3842    | 95.0350    | 142.392    |

Tabla 8: Viga Timoshenko, de 2 tramos, elásticamente vinculada,  $\eta = 0$ ,  $E/\kappa G = 3.059$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l_1 = 0.6$ ,  $l_2 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.6$ ,  $s_1 = 30$ : (Secc. I:  $s_2 = 50$ , Secc. II:  $s_2 = 38.7298$ , Secc. III:  $s_2 = 30$ )

| $K$      | Secc | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ | $\Omega_5$ |
|----------|------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 1        | I    | 5.33789    | 17.7930    | 41.5617    | 79.0949    | 119.939    |
|          | II   | 5.33667    | 18.8954    | 45.3082    | 85.3239    | 129.751    |
|          | III  | 5.33429    | 19.7506    | 49.5873    | 90.9928    | 138.705    |
| 10       | I    | 6.29856    | 19.4525    | 44.4937    | 81.6185    | 122.744    |
|          | II   | 6.30308    | 20.8240    | 48.2649    | 88.1298    | 132.406    |
|          | III  | 6.30406    | 21.9236    | 52.6606    | 93.8638    | 141.379    |
| 100      | I    | 6.78533    | 20.6594    | 47.3387    | 84.5462    | 126.527    |
|          | II   | 6.79671    | 22.2653    | 51.2053    | 91.4778    | 136.044    |
|          | III  | 6.80206    | 23.5924    | 55.7758    | 97.3845    | 145.080    |
| 1000     | I    | 6.85429    | 20.8564    | 47.8752    | 85.1604    | 127.407    |
|          | II   | 6.86691    | 22.5038    | 51.7680    | 92.1933    | 136.901    |
|          | III  | 6.87306    | 23.8728    | 56.3788    | 98.1511    | 145.960    |
| $\infty$ | I    | 6.86227    | 20.8796    | 47.9400    | 85.2360    | 127.517    |
|          | II   | 6.87504    | 22.5321    | 51.8361    | 92.2817    | 137.009    |
|          | III  | 6.88129    | 23.9061    | 56.4520    | 98.2461    | 146.071    |

Tabla 9: Viga Timoshenko rotante, de 2 tramos, elásticamente vinculada.,  $\eta = 5$ ,  $E/\kappa G = 3.059$ ,  $\nu = 0.3$ ,  $l_1 = 0.6$ ,  $l_2 = 0.4$ ,  $\alpha_2 = 0.6$ ,  $s_1 = 30$ : (Secc. I:  $s_2 = 50$ , Secc. II:  $s_2 = 38.7298$ , Secc. III:  $s_2 = 30$ ).

En la **figura 4** se grafican los valores de los coeficientes de las primeras frecuencias versus el parámetro de rotación  $\eta$ , en el rango de 0 a 10, en una viga de sección uniforme. Las diferentes curvas en cada gráfico corresponden a diferentes valores de rigidez de la vinculación elástica.

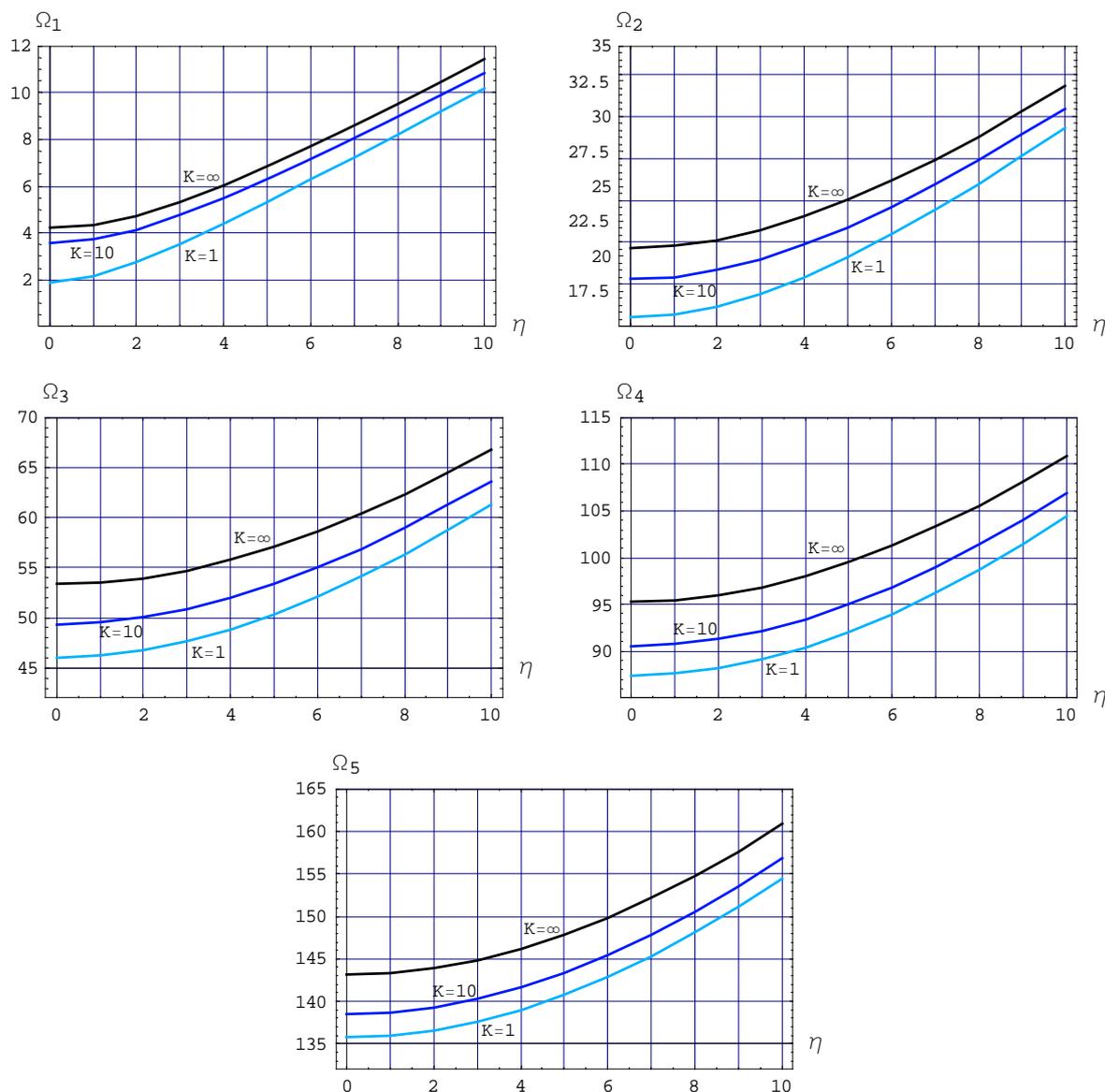


Figura 4: Coeficientes de las primeras frecuencias versus la verotación, en una viga rotante de sección uniforme (figura 2a), para diferentes valores del parámetro de rigidez a flexión  $K$  de la unión viga-eje de giro.

Un estudio similar se realizó en el caso de la viga escalonada de sección transversal que se definió: “escalonada modelo I”, (ver figura 2b), y los resultados se presentan en la figura 5.

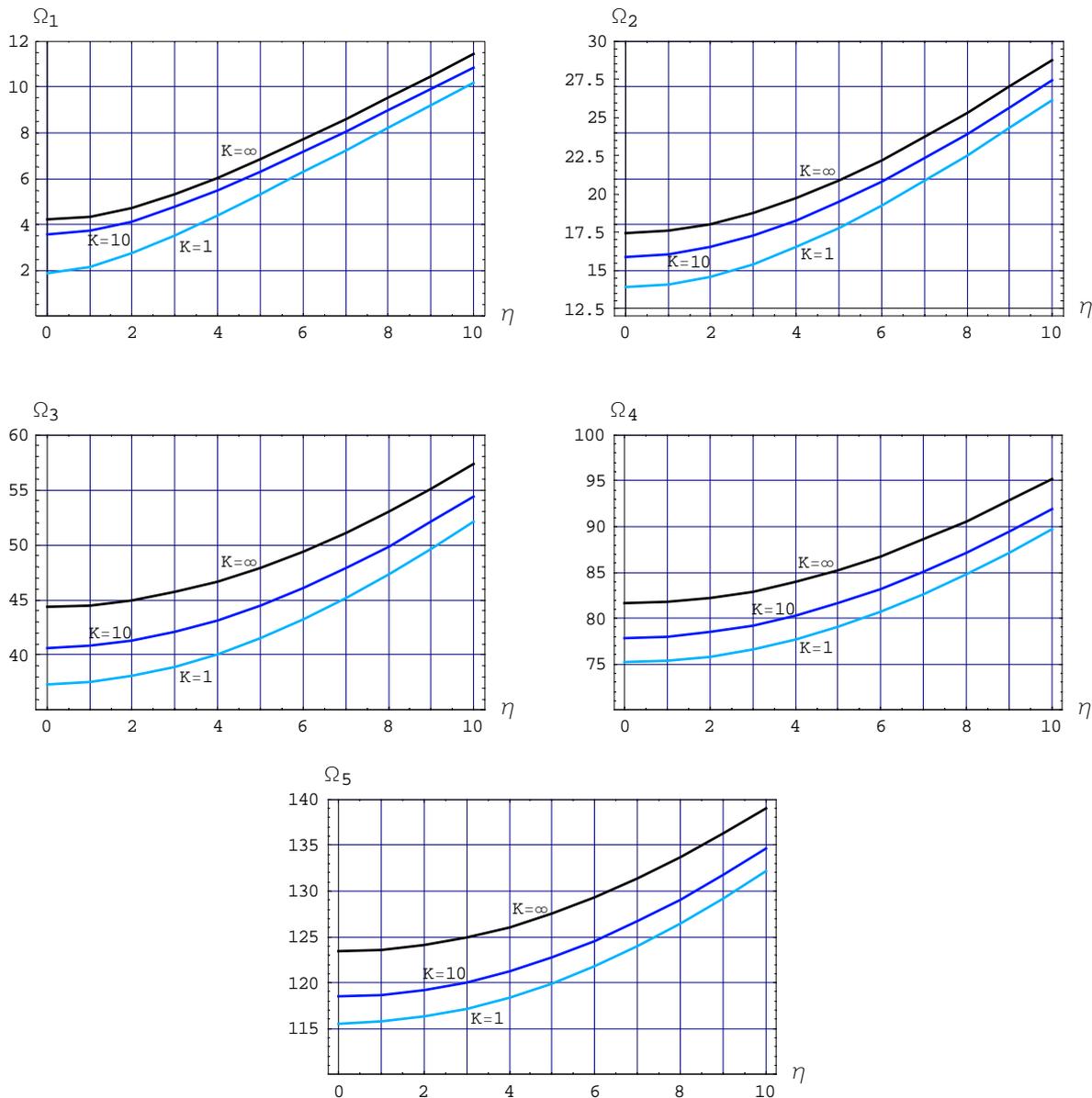


Figura 5: Coeficientes de las primeras frecuencias versus velocidad de rotación, en una viga escalonada de dos tramos (figura 2b), para diferentes valores del parámetro de rigidez a flexión  $K$  de la unión viga-eje de giro.

Los resultados obtenidos muestran que tanto para la viga uniforme como para la escalonada los incrementos en el coeficiente correspondiente a la frecuencia fundamental, cuando se incrementa la velocidad de rotación de la viga, son considerablemente más elevados que los correspondientes a las frecuencias superiores.

Además este efecto es aún más notable cuando la rigidez a flexión de la unión entre la viga y el eje de rotación se reduce. Por ejemplo, en las figuras 4a y 5a se observa que el incremento es del orden de un 200 % para  $K \rightarrow \infty$  y del orden de un 400 % para  $K = 1$ , comparando los valores de  $\eta = 0$  con los correspondientes a  $\eta = 10$ .

En la [figura 6](#) se plotea el coeficiente de frecuencia fundamental versus el coeficiente de rigidez a flexión de la unión de la viga al eje de rotación, en una viga uniforme y en la viga de 2 tramos definida como: “escalonada modelo I”, para el caso de la viga sin rotación ( $\eta = 0$ ), y en la [figura 7](#) se muestra un gráfico análogo para el caso de la misma viga rotando con  $\eta = 5$ .

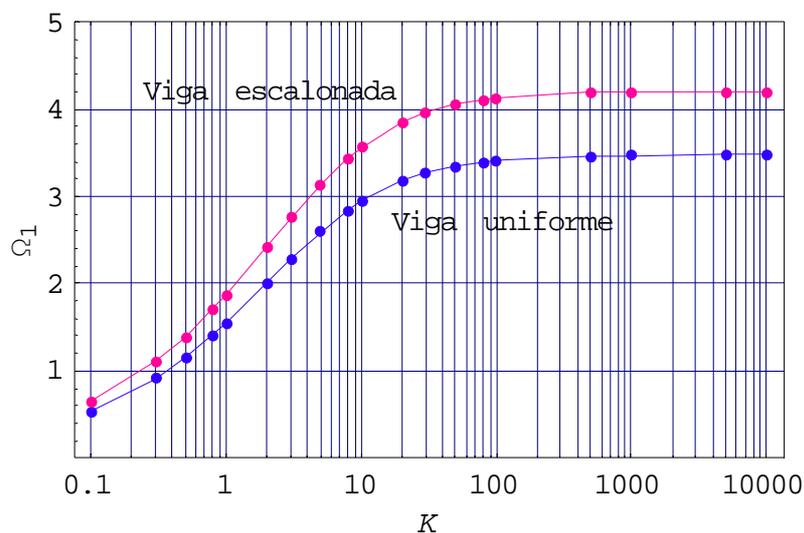


Figura 6: Coeficiente de frecuencia fundamental versus el coeficiente de rigidez a flexión de la unión viga-eje de rotación, en una viga de sección transversal **uniforme**, y en la de 2 tramos, (**modelo I**), ambas sin rotar ( $\eta = 0$ ).

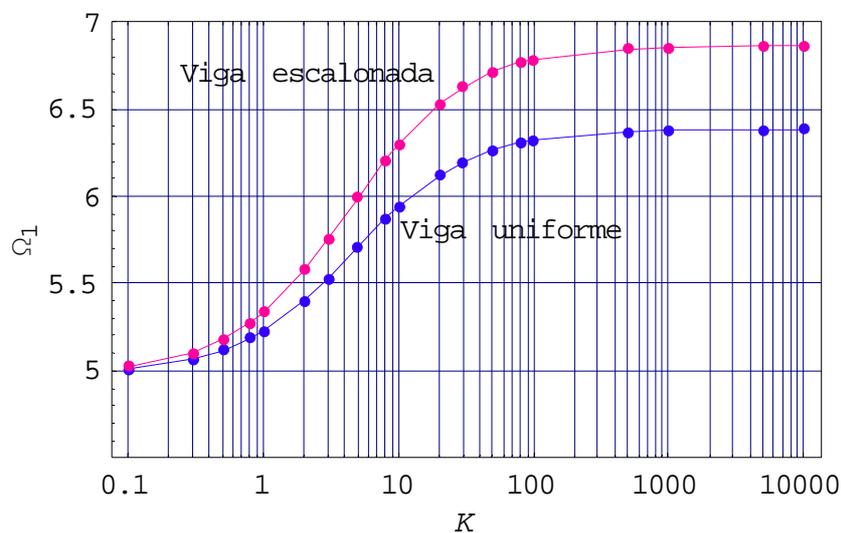


Figura 7: Coeficiente de frecuencia fundamental versus el coeficiente de rigidez a flexión de la unión viga-eje de rotación, en una viga de sección transversal **uniforme**, y en la de 2 tramos, (**modelo I**), ambas en rotación ( $\eta = 5$ ).

Los gráficos de la [figura 6](#) ( $\eta = 0$ ) y de la [figura 7](#) ( $\eta = 5$ ), muestran que los cambios más significativos en el valor del coeficiente de frecuencia fundamental se producen para el rango de valores de  $K$  que va de 0.1 a 100, manteniéndose luego la curva aproximadamente horizontal, pues para valores de 100 o mayores el vínculo puede ser considerado como rígido.

## CONCLUSIONES

Tanto el MEF como el MCD, propuesto en el presente trabajo, muestran ser herramientas de cálculo adecuadas para el análisis de vibraciones de vigas rotantes y se ha obtenido excelente concordancia entre los resultados obtenidos con ambos métodos. El MCD, obviamente con menos desarrollo que el MEF, se caracteriza por su elevada velocidad de convergencia y el escaso esfuerzo computacional requerido.

## AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por el Programa de Investigación y Desarrollo del CONICET, por la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica y por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y fue desarrollado en el Departamento de Ingeniería de dicha Universidad.

## APÉNDICE

### Determinación de los coeficientes de ponderación utilizados para obtener las ecuaciones análogas de cuadratura del MCD.

A continuación se resumen las principales expresiones utilizadas para obtener los coeficientes de ponderación en el MCD. Se adopta un mallado irregular aplicando el mallado de Chebyshev–Gauss–Lobato, que muestra buen grado de precisión y de convergencia de los resultados, (Shu and Chen, 1999), según el cual las coordenadas de los nodos del mallado se definen como:

$$x_i = \frac{1 - \cos[(i-1)\pi/(n-1)]}{2} \quad (\text{A.1})$$

siendo  $n$  el número de puntos de malla en cada tramo. Con las coordenadas espaciales de los puntos de malla se calculan polinomios de Lagrange en dichos puntos.

$$\Pi(x_i) = \prod_{j=1, j \neq i}^n (x_i - x_j) \quad (\text{A.2})$$

A su vez los polinomios de Lagrange permiten determinar los coeficientes  $A_{ij}^{(1)}$  correspondientes a las derivadas de primer orden (Bert and Malik, 1996).

$$A_{ij}^{(1)} = \frac{\Pi(x_i)}{(x_i - x_j) \Pi(x_j)} \quad (\text{A.3})$$

Como puede observarse en la expresión (A.3), solo pueden obtenerse los coeficientes en que  $i \neq j$ . Los coeficientes de la diagonal se obtienen como se indica en la expresión (A.4).

$$A_{ii}^{(1)} = - \sum_{j=1, j \neq i}^n A_{ij}^{(1)} \quad (\text{A.4})$$

Los coeficientes de ponderación correspondientes a las derivadas de orden superior se calculan mediante las siguientes expresiones recursivas:

$$A_{ij}^{(q)} = A_{ii}^{(q-1)} A_{ij}^{(1)} - \frac{A_{ij}^{(q-1)}}{x_i - x_j} \quad (\text{A.5})$$

$$A_{ii}^{(q)} = - \sum_{\substack{j=1 \\ \text{con } j \neq i}}^n A_{ij}^{(q)} \quad (\text{A.6})$$

Las ecuaciones análogas de cuadratura diferencial pueden obtenerse mediante las reglas de cuadratura siguientes:

$$\left. \frac{d^{(q)}W_k}{dx^q} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} W_{kj} \quad (\text{A.7})$$

$$\left. \frac{d^{(q)}\Psi_k}{dx^q} \right|_{x_i} = \sum_{j=1}^n A_{ij}^{(q)} \Psi_{kj} \quad (\text{A.8})$$

Las cuales se aplican al sistema de ecuaciones gobernantes del modelo.

## REFERENCIAS

- Al-Ansary M. D., Flexural vibrations of rotating beams considering rotary inertia. *Computers & Structures* 69:321-328, 1998.
- Algor Professional Mech. *Linear Stress and Dynamics Reference Division*, Pittsburgh, PA, USA. VE 12.2, 2001.
- Banerjee J. R., Free vibration of centrifugally stiffened uniform and tapered beams using the dynamic stiffness method. *Journal of Sound and Vibration*, 233:857-875, 2000.
- Banerjee J. R., Dynamic stiffness formulation and free vibration analysis of centrifugally stiffened Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 247:97-115, 2001.
- Bert C. W., Wang X. and Striz A. G., Static and free vibrational analysis of beams and plates by differential quadrature method. *Acta Mechanica*, 102:11-24, 1994.
- Bert C. W. and Malik M., Differential quadrature method in computational mechanics: A review. *Applied Mechanics Review*, 49:1-28, 1996.
- Chung J., and Yoo H. H., Dynamic analysis of a rotating cantilever beam by using the finite element method. *Journal of Sound and Vibration*, 249:147-164, 2002.
- Felix D. H., Bambill D. V. y Rossi R. E., Análisis de vibración libre de una viga Timoshenko escalonada, centrífugamente rigidizada, mediante el método de cuadratura diferencial. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, enviado para su publicación, en abril de 2008.
- Gutierrez R. H., Laura P. A. A. and Rossi R. E., The method of differential quadrature and its application to the approximate solution of ocean engineering problems. *Ocean Engineering*, 21(1):57-66, 1994.
- Karami G., Malekzadeh P., Shahpari S. A., A DQEM for vibration of shear deformable nonuniform beams with general boundary conditions. *Engineering Structures*, 25:1169-1178, 2003.
- Laura P. A. A., Bambill D. V., Rossit C. A. and La Malfa S., Comments on "Increasing the natural frequencies of circular disks using internal channels". *Journal of Sound and Vibration*, 240(5):955-956, 2001.
- Lee S. Y. and Kuo Y. H., Bending frequency of a rotating Timoshenko beam with general elastically restrained root. *Journal of Sound and Vibrations*, 162:243-250, 1993.
- Lin S. C. and Hsiao K. M., Vibration analysis of a rotating Timoshenko beam. *Journal of Sound and Vibration*, 240:303-322, 2001.

- Liu G. R. and Wu T. Y., Vibration analysis of beams using the generalized differential quadrature rule and domain decomposition. *Journal of Sound and Vibration*, 246(3):461-481, 2001.
- Maurizi M. J., Rossi R. E. and Belles P. M., Free vibrations of uniform Timoshenko beams with ends elastically restrained against rotation and translation. *Journal of Sound and Vibration*, 141, 359-362, 1990.
- Rao S. S. and Gupta R. S., Finite element vibration analysis of rotating Timoshenko beams. *Journal of Sound and Vibration* 242:103-124, 2001.
- Rossi R. E., *Introducción al análisis de Vibraciones con el Método de Elementos Finitos*. Edit. EdiUNS, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, 238 pp. ISBN 978-987-1171-71-2, 2007.
- Seon M. H., Benaroya H. and Wei T., Dynamics of transversely vibrating beams using four engineering theories. *Journal of Sound and Vibration*, 225:935-988, 1999.
- Shu C. and Chen W., On optimal selection of interior points for applying discretized boundary conditions in DQ vibration analysis of beams and plates. *Journal of Sound and Vibration*, 222(2):239-257, 1999.
- Striz A. G., Wang X. and Bert C. W., Harmonic differential quadrature method and applications to analysis of structural components. *Acta Mechanica*, 111:85-94, 1995.
- Vinod K. G., Gopalakrishnan S. and Gangul R., Free vibration and wave propagation analysis of uniform and tapered rotating beams using spectrally formulated finite elements. *International Journal of Solids and Structures*, 44:5875-5893, 2007.
- Wolfram S., *Mathematica: A System for Doing Mathematics by Computer*. Third Ed, Addison-Wesley, 1991.