

# MÉTODO DE DIFERENCIAS FINITAS DOMINIO TEMPORAL DE CUARTO ORDEN CON MALLA VARIABLE PARA SIMULAR LA PROPAGACIÓN DE ONDAS SÍSMICAS EN FRACTURAS

Francisco Gamboa O<sup>a</sup>, Herling Gonzales<sup>b</sup>, Saúl E Guevara<sup>b</sup> y Maria del Carmen Lasprilla<sup>a</sup>

<sup>a</sup>Universidad Industrial de Santander, Colombia, franciscogamboa12@gmail.com, marlas@uis.edu.co  
<http://www.uis.edu.co>

<sup>b</sup>Grupo de Geofísica, Instituto Colombiano de Petróleo, ICP-ECOPETROL, herling@tux.uis.edu.co,  
<http://www.petrosismica.com>

**Palabras clave:** Diferencias Finitas Dominio del Tiempo FDTD (Finite-Difference Time Domain), Malla Variable, Malla intercalada, Fracturas.

**Resumen.** Se desarrollo un esquema numérico usando diferencias finitas en el dominio del tiempo (FDTD) que utiliza el concepto de malla variable. Para tal fin se discretizaron las ecuaciones que modelan una onda elástica propagandose en un medio continuo (Ecuaciones de Navier ). El campo de velocidad es función de los esfuerzos de corte y la simulacion de la fractura se realiza mediante la variacion de la malla computacional en la vecidad de la discontinuidad.

## 1. INTRODUCTION

La dinámica de un medio continuo está descrita por un conjunto de ecuaciones diferenciales no lineales en derivadas parciales denominadas ecuaciones de Navier, estas ecuaciones representan las ecuaciones de Newton para un continuo y describen el movimiento relativo de los puntos del medio provocado por los esfuerzos internos y las fuerzas de volumen aplicadas al mismo. Desde el punto de vista matemático, las ecuaciones de Navier contienen bastantes incógnitas lo que las hace difícil describir el sistema, razón por la cual deben complementarse con algún conjunto de relaciones empíricas entre los esfuerzos y la cinemática que describe al movimiento, también llamado relaciones constitutivas. En general y aún cuando se disponga de un conjunto de relaciones constitutivas las ecuaciones de Navier suelen mantener su carácter de no linealidad por lo que son extraordinariamente complicadas y en general es necesario recurrir a la búsqueda de soluciones a través de métodos numéricos.

Estos métodos numéricos permiten describir las ecuaciones de Navier-Stokes en una formula discreta en el espacio y en el tiempo, y trasladan esta formulación a un algoritmo que puede ser resuelto numéricamente por un código computacional. Entre las diferentes formas de discretización posible una de las más simples y de mayor confiabilidad es el Método de Diferencias Finitas. El presente trabajo pretende describir una aplicación de este método para simular la propagación de una onda elástica en un medio continuo, usando una malla variable que permite mejorar la solución de las ecuaciones cuando los cambios de interfaz son muy fuertes, reduciendo el tamaño de la malla en la vecindad de la discontinuidad.

## 2. MARCO TEORICO

### 2.1. Operador de Cuarto Orden en Diferencias Finitas Para una Malla Variable

La base para solucionar la ecuación de onda que modela un problema sísmico es plantear espacios continuo a discretos; para ello se define un operador básico de la derivada de primer orden espacial para una malla variable (Pitarka,1999).

Supongamos que el campo variable  $g$  representa las velocidades  $(v_x, v_y, v_z)$  o el tensor de esfuerzo  $(\tau_{xx}, \tau_{xz}, \tau_{zz})$  mostrados en la ecuaciones que modela la propagación de la onda 2D de una onda elastica para un medio isótropo (Levander,1986)

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z}, \quad (1)$$

$$\rho \frac{\partial v_z}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial v_z}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \tau_{zz}}{\partial t} = (\lambda + 2\mu) \frac{\partial v_z}{\partial z} + \lambda \frac{\partial v_x}{\partial x}, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial t} = \mu \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right), \quad (5)$$

El operador para discretizar estas derivadas es:

$$\frac{\partial g(x, z)}{\partial x} = D_x g = c_1 g(x + \Delta_1, z) + c_2 g(x - \Delta_2, z) + c_3 g(x + \Delta_3, z) + c_4 g(x - \Delta_4, z) \quad (6)$$

Donde  $c_i$  son los coeficientes (son variables) a determinar  $\Delta_i$  es el incremento puede ser expresado en términos de la malla variable  $dx$  como lo muestra la figura 1.

Teniendo en cuenta la definición de transformada de Fourier :

$$g(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp(ikx) dx$$

y derivando con respecto a  $x$  tenemos:

$$\frac{\partial g(x)}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (ik)G(k) \exp(ikx) dx = ikg(x) \quad (7)$$

Analogamente para los valores de:

$$\begin{aligned} c_i g(x \pm \Delta_i) &= c_i \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp[i(x \pm \Delta_i)k] dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} G(k) \exp(ikx) e^{\pm \Delta_i ik} dx \\ &= c_i e^{\pm \Delta_i ik} g(x) \end{aligned} \quad (8)$$

Mediante esta deducción la ecuación (6) se puede escribir como:

$$ik = c_1 \exp(ik\Delta_1) + c_2 \exp(-ik\Delta_2) + c_3 \exp(ik\Delta_3) + c_4 \exp(-ik\Delta_4) \quad (9)$$

Usando la expansión de Taylor para la función :

$$\exp x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

y aproximando hasta cuarto orden cada termino exponencial de la ecuación (9):

$$\begin{aligned} ik &= c_1 \left( 1 + ik\Delta_1 + \frac{(ik\Delta_1)^2}{2!} + \frac{(ik\Delta_1)^3}{3!} \right) \\ &+ c_2 \left( 1 - ik\Delta_2 + \frac{(-ik\Delta_2)^2}{2!} + \frac{(-ik\Delta_2)^3}{3!} \right) \\ &+ c_3 \left( 1 + ik\Delta_3 + \frac{(ik\Delta_3)^2}{2!} + \frac{(ik\Delta_3)^3}{3!} \right) \\ &+ c_4 \left( 1 - ik\Delta_4 + \frac{(-ik\Delta_4)^2}{2!} + \frac{(-ik\Delta_4)^3}{3!} \right) \end{aligned} \quad (10)$$

Igualando los ordenes de igual magnitud:

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 0$$

$$\Delta_1 c_1 - \Delta_2 c_2 + \Delta_3 c_3 - \Delta_4 c_4 = 1$$

$$\Delta_1^2 c_1 + \Delta_2^2 c_2 + \Delta_3^2 c_3 + \Delta_4^2 c_4 = 0$$

$$-\Delta_1^3 c_1 + \Delta_2^3 c_2 - \Delta_3^3 c_3 + \Delta_4^3 c_4 = 0$$

Reorganizando estas cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas permiten obtener los valores de las constantes  $c_i$  en términos de los desplazamientos  $\Delta_i$ , para ello se realiza la siguiente matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \Delta_1 & -\Delta_2 & \Delta_3 & \Delta_4 \\ \Delta_1^2 & \Delta_2^2 & \Delta_3^2 & \Delta_4^2 \\ -\Delta_1^3 & \Delta_2^3 & -\Delta_3^3 & \Delta_4^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (11)$$

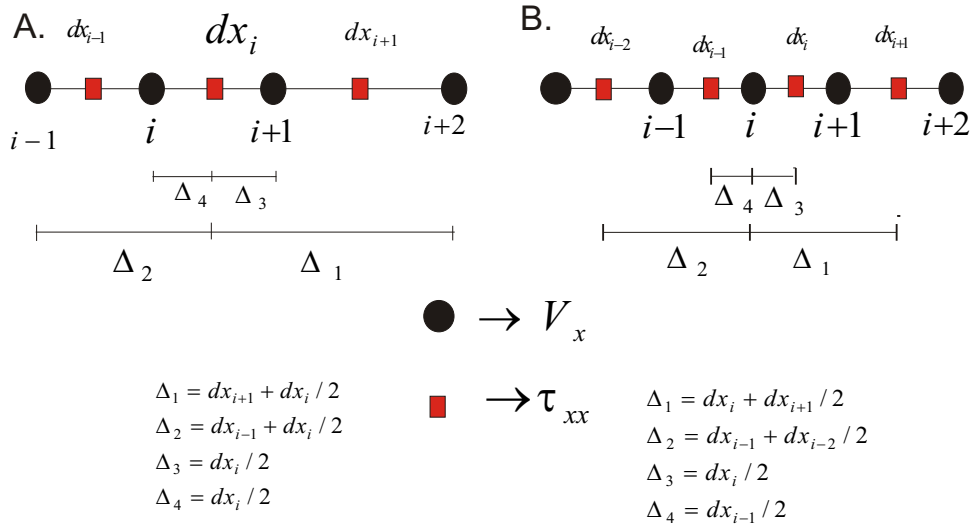


Figura 1. Malla con nodos espaciadamente no uniformes en la dirección  $x$ .  $\Delta_i (i = 4)$  son usados para calcular el operador  $D_x$  centrado entre (a) el nodo  $i$  y  $i + 1$  (b) centrado en el nodo  $i$

El método de diferencias finitas aproxima la solución de la ecuación de onda en los vértices de una malla, la figura 1 muestra las posiciones para los valores de la velocidad y el esfuerzo en una dimensión; esto permite interpolar los valores de la solución de la ecuación en función de los esfuerzos o velocidades. Así por ejemplo si se requiere evaluar una ecuación teniendo en cuenta las posiciones y el dominio temporal se debe seguir el siguiente algoritmo.

### Forma Continua

$$\rho \frac{\partial v_x}{\partial t} = \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} \quad (12)$$

### Forma Discreta FD

$$\rho(i) \frac{V_x^{n+1/2}(i) - V_x^{n-1/2}(i)}{\delta t} = c_1 \tau_{xx}^n(i + \Delta_1) + c_2 \tau_{xx}^n(i + \Delta_2) + c_3 \tau_{xx}^n(i + \Delta_3) + c_4 \tau_{xx}^n(i + \Delta_4) \quad (13)$$

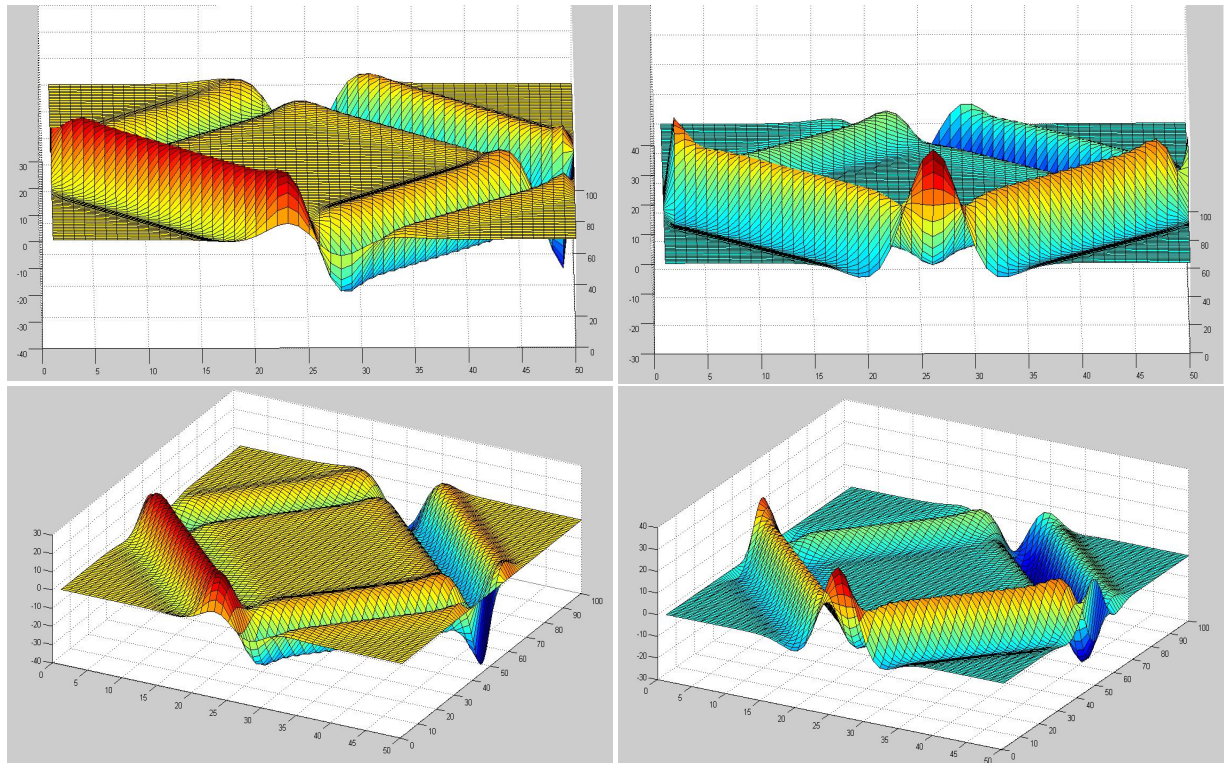


Figura 2. Las graficas muestran el campo de velocidades y esfuerzos respectivamente, de la solución de ecuación de onda 1D, el eje horizontal muestra la evolución espacial, la altura su amplitud y la profundidad la evolución en el tiempo, en este caso la malla posee 50 nodos , esto permite observar el funcionamiento correcto del método

Donde  $n$  representa la evolución temporal y  $\rho$  la densidad volumétrica del medio, la discretización de la ecuación (13) muestra una aproximación de segundo orden en el tiempo y de cuarto orden para una malla variable en el espacio. Los valores de  $c_1, c_2, c_3, c_4$  son calculados mediante la matriz propuesta en (11)

El siguiente algoritmo es la forma con la que se programo el ejemplo anterior:

```
for(int i = 2; i < N; i++){
    d1 = dx1(i) + dx1(i + 1)/2;
    d2 = dx1(i - 1) + dx1(i - 2)/2;
    d3 = dx1(i)/2;
    d4 = dx1(i - 1)/2;
}
```

$d1, d2, d3, d4$ , son los correspondientes valores  $\Delta_i$  de la matriz (11) que representan los espaciamientos de la malla.

$dx1$  corresponde a la función que define la distribución de los espaciamientos; Para el caso de una fractura se implementa una función que tienda a hacer mas pequeños las celdas en la vecindad de la discontinuidad(fractura).

$$\begin{aligned}
& \text{for}(inti = 0; i < N - 1; i++) \{ \\
V2[i] = & V1[i] + (dt) * (1/rho2[i]) * ((c3) * T1[i+1] + (c4) * T1[i] + (c1) * T1[i+2] + (c2) * T1[i-1]); \\
& \} \\
& \text{for}(inti = 1; i < N; i++) \{ \\
T2[i] = & T1[i] + (dt) * (lamda[i] + 2 * miu[i]) * ((c3) * V2[i] + (c4) * V2[i-1] + (c1) * \\
V2[i+1] + & (c2) * V2[i-2]); \\
& \}
\end{aligned}$$

Donde  $V2[i]$  y  $T2[i]$  son  $v_x$  y  $\tau_{xx}$  de forma iterativa respectivamente y  $c1, c2, c3, c4$  son los pesos para las aproximaciones de cuarto orden de las derivadas parciales calculados con la matriz (11).

Un análisis teórico de la condición de estabilidad muestra un esquema difícil de obtener. La aproximación usual para deducir esta condición para una malla con espaciamento regular (por ejemplo, [5]) resulta muy complicado para el presente esquema (malla variable). Guiados por estudios recientes Pitarka (1999) y usando una serie de test numéricos, encontramos que el criterio de estabilidad para cada celda unitaria debe satisfacer:

$$\Delta t_{cell} < 0,495h/v_{max} \quad (14)$$

Donde  $\Delta t_{cell}$ ,  $h$  y  $v_{max}$  son el incremento en el tiempo, la grilla mas pequeña, y la velocidad maxima de la onda respectivamente

### 3. ESQUEMA EN DIFERENCIAS FINITAS PARA LA ECUACIÓN DE ONDA ELÁSTICA 2D EN UN MEDIO ISÓTROPO

El esquema usa una malla intercalada, en la cual se ubica la solución de la ecuación de onda sobre los vértices de la malla (velocidades y esfuerzos). Este método fue propuesto por Virieux (1986) y Levander (1988) y permite trasladar el modelo continuo a un algoritmo discreto de ecuaciones algebraicas.

$$v_x^{n+1/2}(i, j) = v_x^{n-1/2}(i, j) + \Delta t b_x (D_x \tau_{xx} + D_z \tau_{xz}) |_{(i,j)}^n \quad (15)$$

$$v_y^{n+1/2}(i+1/2, j+1/2) = v_y^{n-1/2}(i+1/2, j+1/2) + \Delta t b_y (D_x \tau_{xz} + D_z \tau_{zz}) |_{(i+1/2, j+1/2)}^n \quad (16)$$

$$\tau_{xx}^{n+1}(i+1/2, j) = \tau_{xx}^n(i+1/2, j) + \Delta t [(\lambda + 2\mu) D_x v_x + \lambda D_z v_z] |_{(i+1/2, j)}^n \quad (17)$$

$$\tau_{yy}^{n+1}(i+1/2, j) = \tau_{yy}^n(i+1/2, j) + \Delta t [\mu D_z v_z + \lambda D_x v_x] |_{(i+1/2, j)}^n \quad (18)$$

$$\tau_{xz}^{n+1}(i, j+1/2) = \tau_{xz}^n(i, j+1/2) + \Delta t [\mu D_x v_z + \mu D_z v_x] |_{(i, j+1/2)}^n \quad (19)$$

Donde el índice  $n$  representa el dominio temporal, los subíndice  $i, j$  representan la posición,  $\Delta t$  es el paso de tiempo. Los operadores  $D_x, D_z$  son las discretizaciones correspondientes a las derivadas parciales centradas de cuarto orden deducidas anteriormente, el termino  $b$  corresponde al inverso de la densidad y  $\mu, \lambda$  son los parámetros de corte o rigidez.

#### 4. MEDIO ELÁSTICO HETEROGÉNEO ISÓTROPICO ESQUEMA CON MALLA VARIABLE

Consideramos un medio con una velocidad máxima (onda P) de:  $v_{maxima} = 4200m/s$ , una velocidad mínima (onda s) de:  $v_{minima} = 2700m/s$ , una densidad de  $\rho = 2490kg/m^3$  para la fractura la velocidad máxima es de:  $v_{maximaF} = 1500m/s$  y velocidad mínima de  $v_{minimaF} = 0m/s$  y  $\rho = 1000kg/m^3$

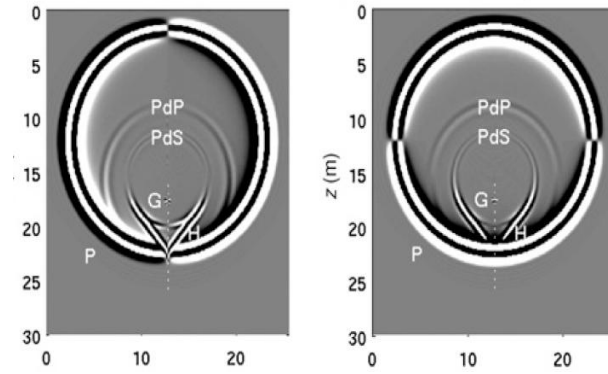


Figura 3. snapshots de las componentes horizontal y vertical de las velocidades  $v_x$  y  $v_z$ , P, H y G son la onda P, la onda principal y la onda guiada de la fractura, respectivamente; PdP y PdS son la ondas difractadas respectivamente

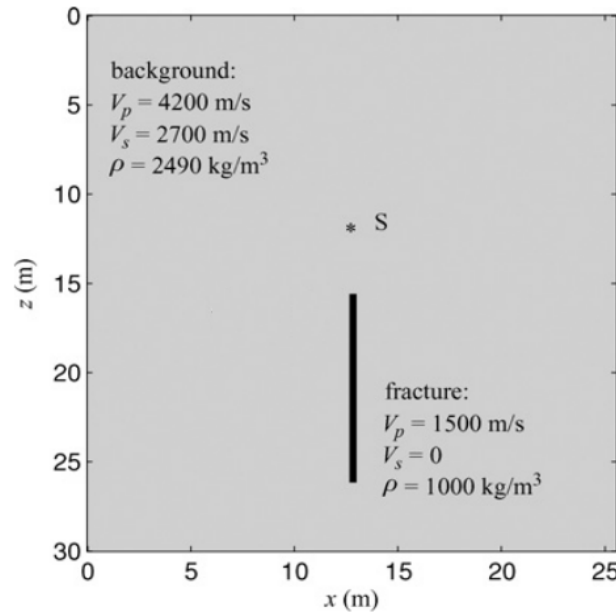


Figura 4. modelo de una fractura vertical

La figura 4 muestra el modelo de una fractura vertical con 4 mm de espesor y 10.56 m de longitud contenida en un medio homogéneo elástico. Una fuente o pulso Ricket (S) localizada a (12.78 m, 12m), el calculo de las propiedades de el medio efectivo contenidas en la fractura están basadas a partir de constantes elásticas independientes para un modelo 2D en el plano  $x - z$  (Nihei, et al 2001)

$$C_{ij} = \begin{pmatrix} (\lambda + 2\mu)(1 - \delta_N) & \lambda(1 - \delta_N) & 0 \\ \lambda(1 - \delta_N) & (\lambda + 2\mu)(1 - r^2\delta_N) & 0 \\ 0 & 0 & \mu(1 - \delta_T) \end{pmatrix} \quad (20)$$

Donde  $r = \nu/(1 - \nu)$ ,  $\delta_N = Z_N/[L + Z_N(\lambda + 2\mu)]$ ,  $\delta_T = Z_T\mu/(L + Z_T\mu)$ , y  $\nu$  es la relación de Poisson, L es la longitud de la fractura. El medio descrito por la ecuación (20) equivale a un medio transversalmente isotropo con eje de simetría horizontal (HTI). para el caso de la fractura descrita en este trabajo se utilizo:  $Z_T = \infty$  (fractura transversal), y  $Z_N = h/K = 0,004m/2,25GPa$  donde h es el ancho de la fractura y K es el modulo de volumen de el medio.

## 5. CONCLUSIONES

- Se presento un modelo computacional en DF para ondas elasticas en un medio homogeneo con una mallado variable cuya condición de estabilidad es la misma que para malla con espaciamentos fijos.
- Realizamos un algoritmo computacional para visualizar las perturbaciones de las ondas elásticas 2D en un modelo geologico sencillo, haciendo uso de diferencias finitas de cuarto orden para un medio homogéneo.
- Se plantéo un esquema numérico estable, donde los errores que se propagan tienden a un valor dado.
- Logramos ver las componentes de desplazamiento de las ondas elásticas.

## REFERENCIAS

- [1] Chunling, Jerry M. Harris, Kurt T. Nihel, and Seijil Nakagawa, "Two-dimensional finite-difference seismic modeling of an open fluid-filled fractures: Comparison of thin layer and liner slip models" *Geophysics. vol 70 No. 4 (august 2005): p. T57-T62*
- [2] Nihei, K. T., L. Nakagawa, and L. R. Myer, 2001, "Fracture imaging with converted elastic waves" *Rock mechanics in the national interest* A.A Balkerman. 1305-1311, (2001)
- [3] Levander, A., "Fourth-Order finite-difference P-SV seismograms" *Geophysics*, **53**, pp. 1425-1436 (1988)
- [4] Pitarka, A., 1999, 3D elastic finite-difference modeling of seismic motion using staggered grids with nonuniform spacing. *Bulletin of the Seismic Society of America*, Vol.89, (1999); p.54-68
- [5] Virieux, J., P-SV : "Wave propagation in heterogeneous media: Velocity-stress finite-difference method" *Society of Exploration Geophysicis. (1986)* [on line] (15 de abril del 2008).