

VIBRACIONES LIBRES DE VIGAS CON MASAS FINITAS ADOSADAS ELÁSTICAMENTE

Santiago Maiz, Carlos A. Rossit y Diana V. Bambill

*Departamento de Ingeniería, Instituto de Mecánica Aplicada, Universidad Nacional del Sur,
Av. Alem 1253 (B8000CPB), Bahía Blanca, Argentina. <http://www.uns.edu.ar>
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
smaiz@uns.edu.ar; carossit@criba.edu.ar; dbambill@criba.edu.ar*

Palabras Clave: Vibraciones Naturales, Vigas, Masas, Inercia Rotatoria, Análisis Funcional.

Resumen. La acción dinámica de máquinas o motores sobre los elementos estructurales que los sostienen es un tema de permanente interés en diversos campos de la ingeniería.

En muchas ocasiones y a los efectos de atenuar la magnitud de los esfuerzos transmitidos se vincula elásticamente el elemento electromecánico a la estructura.

En ese caso, como es sabido, corresponde estudiar el conjunto acoplado constituido por la estructura original y el sistema discreto adosado.

En el presente trabajo se estudian las vibraciones transversales libres de vigas Bernoulli-Euler con masas adosadas elásticamente.

Se determinan frecuencias naturales de vibración del sistema estructural acoplado.

La vinculación elástica se modela con resortes traslacionales y rotacionales configurando sistemas discretos de dos grados de libertad (GDL).

Se modela el sistema discreto teniendo en cuenta la dimensión de la masa y una vinculación elástica continua evaluando su comportamiento comparativamente con el modelo habitual que considera la vinculación concentrada en un punto.

Se recurre al método variacional de Ritz aproximando la deflexión con polinomios.

1 INTRODUCCIÓN

En el estudio de vibraciones de vigas con masas adosadas elásticamente, en general se suelen tomar sistemas de 1 GDL formados por una masa y un resorte traslacional (Kuala y Posiadala, 1994, Rossit y Laura, 2001a, b, Rossit et al, 2005 y Wu and Chou, 1999) o sistemas de 2 GDL compuestos de una masa con inercia traslacional y dos resortes traslacionales (Vera et al., 2005, Whu, 2005 y Whu and Whittaker, 1999).

En una rápida revisión de la literatura técnico-científica no se encuentran los casos donde se consideren sistemas de 2 GDL adosados a una viga mediante una vinculación elástica continua, así como su respectiva simplificación a un sistema de 2 GDL con dos resortes traslacionales o un sistema de 2GDL con un resorte traslacional y uno rotacional.

En la Figura 1 se indica una viga simplemente apoyada sobre la que actúan las distintas alternativas de sistemas de 2GDL considerados: en primer lugar (caso 1) vinculación elástica continua entre la masa y la viga, los dos esquemas siguientes muestran vinculación elástica discreta de dos resortes traslacionales (caso 2) y un resorte traslacional y uno rotacional (caso 3).

En el presente trabajo se analizan las tres formas de adosar una masa a una viga, descriptas anteriormente. Se comparan los resultados obtenidos en cada caso para sistemas dinámicamente equivalentes y se analizan las zonas de validez de las simplificaciones.

2 MÉTODO GENERAL

Es bien conocido el hecho de que el método de Ritz constituye una de las herramientas más poderosas para aproximar la solución de problemas físico-matemáticos (Laura et al. 1995).

La aplicación tradicional de la metodología consiste en expresar la solución del funcional gobernante en términos de una suma de funciones coordenadas multiplicadas cada una por una constante C_i . Tales funciones deben satisfacer, al menos, las condiciones de borde esenciales (estables) del problema, aunque se obtendrá una mejor aproximación si además cumplen con las condiciones de borde naturales (inestables).

Cuando el sistema viga-masa efectúa una de sus modos normales de vibración se tendrá para la viga:

$$v(x, t) = V(x) \cos(\omega t) \quad (1)$$

donde es aproximada la componente espacial de la solución:

$$V(x) \approx V_a(x) = \sum_{j=1}^P C_j \varphi_j \quad (2)$$

Siendo φ_j funciones coordenadas que satisfacen, al menos, las condiciones de borde esenciales del problema, multiplicadas por una constante arbitraria C_j .

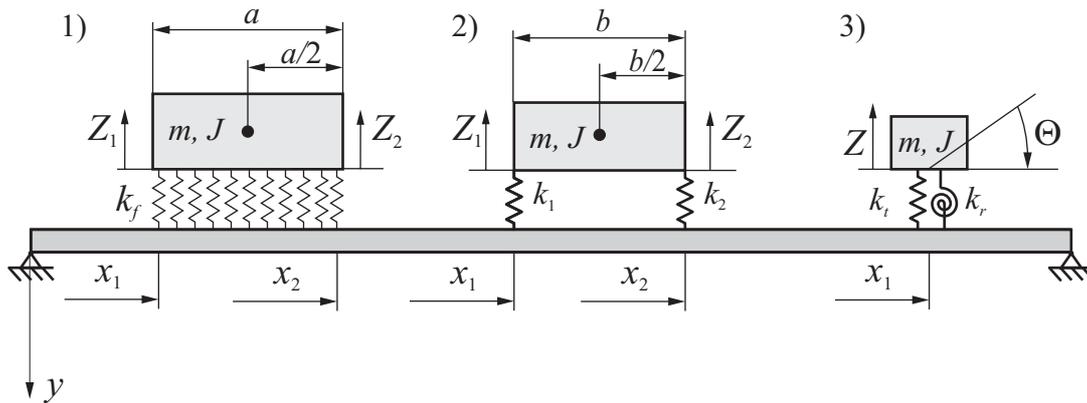


Figura 1: Viga simplemente apoyada con diversos sistemas de dos grados de libertad

El funcional para el caso de vigas esbeltas vibrantes con sistemas discretos adosados se puede escribir de la siguiente manera:

$$F[V_a] = U_{V\text{máx}} + U_{S\text{máx}} - T_{V\text{máx}} - T_{S\text{máx}} \quad (3)$$

donde $U_{V\text{máx}}$ representa la máxima energía de deformación y $T_{V\text{máx}}$ la máxima energía cinética de la viga, para el caso de vigas Bernoulli-Euler:

$$U_{V\text{máx}} = \frac{1}{2} \int_0^l EI \left(\frac{d^2 V_a}{dx^2} \right)^2 dx \quad (4)$$

$$T_{V\text{máx}} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_0^l \rho A [V_a(x)]^2 dx \quad (5)$$

siendo E el módulo de Young, I el momento de inercia de la sección transversal de la viga con respecto al eje de flexión, A la sección transversal de la viga, ρ la densidad de masa del material, l la longitud de la viga y ω la frecuencia natural circular del sistema.

Por otro lado $U_{S\text{máx}}$ representa la máxima energía de deformación y $T_{S\text{máx}}$ la máxima energía cinética del sistema discreto acoplado a la viga de masa m e inercia rotatoria J . Estos últimos términos dependerán del sistema discreto adosado que se considere.

2.1 Sistemas discretos adosados.

A modo de hacer una comparación entre los tres sistemas discretos propuestos anteriormente en la Figura 1, se analizaron dinámicamente los sistemas aislados, de modo que haya una semejanza dinámica entre ellos. Entonces dados a y k_f para el caso 1), se encontraron los valores correspondientes a b , k_1 y k_2 para el caso 2) y k_t y k_r para el caso 3). Se aclara que para el caso 3) los resortes se consideran idealmente aplicados sobre una masa de magnitud m e inercia J

En la siguiente tabla se indican para cada sistema discreto las frecuencias de vibración circular naturales de traslación y rotación:

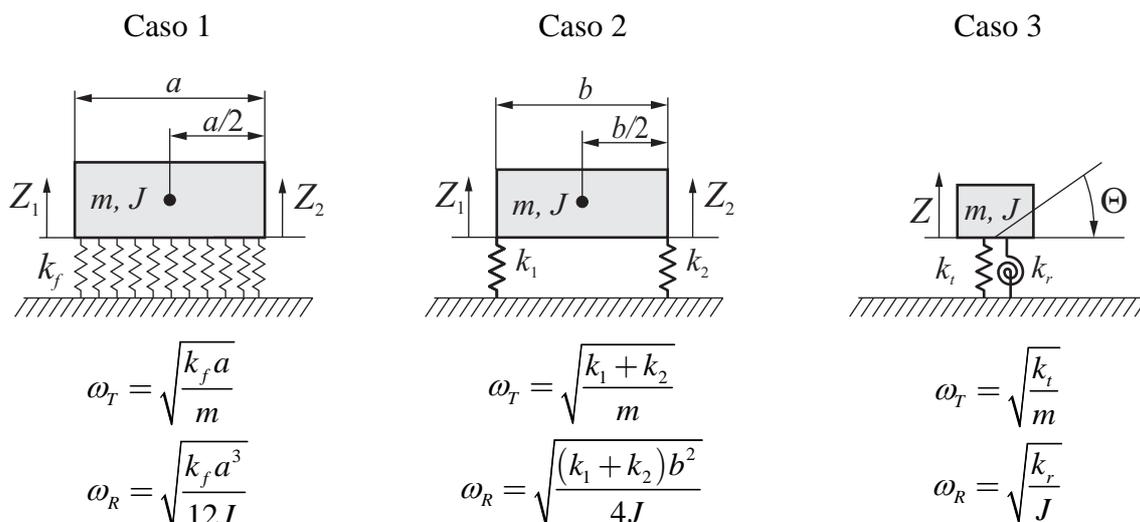


Tabla 1: Frecuencias naturales circulares de rotación y traslación de los distintos sistemas de 2GDL en estudio.

Igualando las frecuencias de vibración de cada sistema, a modo de hacerlos dinámicamente equivalentes, se deducen las siguientes relaciones:

$$k_f a = k_1 + k_2 = k_t \quad (6)$$

$$\frac{k_f a^3}{12} = \frac{(k_1 + k_2) b^2}{4} = k_r \quad (7)$$

En el caso 2) se toma también como condición $k_1 = k_2$

2.2 Viga con sistema masa resorte adosado según caso 1).

Como se muestra en la Figura 1, este sistema discreto adosado se compone de una masa de longitud a que descansa sobre una viga por intermedio de una vinculación elástica continua del tipo Winkler de constante k_f . Con Z_1 y Z_2 denotamos los desplazamientos absolutos de la masa en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente. El orden creciente lo tomamos hacia arriba de manera opuesta al desplazamiento $V(x)$ de la viga. Por lo tanto el desplazamiento de la masa relativo a la viga en cada punto x queda representado por:

$$z(x) = \frac{Z_2 - Z_1}{a}(x - x_m) + \frac{Z_2 + Z_1}{2} + V_a(x) \quad (8)$$

donde $x_m = \frac{x_1 + x_2}{2}$.

De esta manera la energía cinética y energía de deformación del sistema discreto intervinientes en la ecuación 3 vienen dadas por:

$$U_{S1\text{máx}} = \frac{1}{2} k_f \int_{x_1}^{x_2} [z(x)]^2 dx \quad (9)$$

$$T_{S1\text{máx}} = \frac{1}{2} m \omega^2 \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} J \omega^2 \left(\frac{Z_2 - Z_1}{a} \right)^2 \quad (10)$$

Definidos estos términos, el funcional de la ecuación 3 queda expresado de la siguiente manera:

$$F[V_a] = \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \left[\int_0^l \left(\frac{d^2 V_a}{dx^2} \right)^2 l^3 dx + K_f \int_{x_1}^{x_2} (z(x))^2 \frac{dx}{l} \right] - \frac{1}{2} \omega^2 \rho A l \left[\int_0^l [V_a(x)]^2 \frac{dx}{l} + M \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)^2 + M \left(\frac{c}{a} \right)^2 (Z_2 - Z_1)^2 \right] \quad (11)$$

donde:

$$K_f = \frac{k_f l^4}{EI}; \quad M = \frac{m}{\rho A l} \quad \text{y} \quad c = \sqrt{\frac{J}{m}} \quad (12)$$

Luego el funcional es minimizado con respecto a cada una de las constantes C_j , Z_1 y Z_2 :

$$\begin{aligned} \frac{\partial F[V_a]}{\partial C_j} &= 0 \\ \frac{\partial F[V_a]}{\partial Z_1} &= 0 \quad P+2 \text{ ecuaciones.} \\ \frac{\partial F[V_a]}{\partial Z_2} &= 0 \end{aligned} \quad (13)$$

quedando un sistema de ecuaciones lineales en las constantes C_j , Z_1 y Z_2 :

$$\begin{bmatrix} a_{1-1} & a_{1-2} & \cdots & a_{1-P} & a_{1-P+1} & a_{1-P+2} \\ a_{2-1} & a_{2-2} & \cdots & a_{2-P} & a_{2-P+1} & a_{2-P+2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{P-1} & a_{P-2} & \cdots & a_{P-P} & a_{P-P+1} & a_{P-P+2} \\ a_{P+1-1} & a_{P+1-2} & \cdots & a_{P+1-P} & a_{P+1-P+1} & a_{P+1-P+2} \\ a_{P+2-1} & a_{P+2-2} & \cdots & a_{P+2-P} & a_{P+2-P+1} & a_{P+2-P+2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_P \\ Z_1 \\ Z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

donde la matriz \mathbf{A} de los coeficientes a_{i-j} resulta ser simétrica. La solución no trivial del sistema de ecuaciones (14) está dada por:

$$\det(\mathbf{A}) = 0, \quad (15)$$

cuyas raíces $\Omega = \omega l^2 \sqrt{\frac{\rho A}{EI}}$, son los autovalores del problema.

2.3 Viga con sistema masa resorte adosado según caso 2).

En este caso la masa tiene una longitud b y se apoya sobre la viga mediante dos resortes traslacionales de constante k_1 y k_2 ubicados en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente.

Al igual que el caso anterior con Z_1 y Z_2 denotamos los desplazamientos absolutos de la masa en las posiciones x_1 y x_2 respectivamente con el orden creciente hacia arriba de manera opuesta al desplazamiento $V(x)$ de la viga. Por lo tanto el desplazamiento de la masa relativo a la viga en los puntos x_1 y x_2 representado por:

$$\begin{aligned} z_1 &= Z_1 + V_a(x_1) \\ z_2 &= Z_2 + V_a(x_2) \end{aligned} \quad (16)$$

Para este caso la energía cinética y energía de deformación del sistema discreto en la ecuación 3, quedan expresados de la siguiente forma:

$$U_{S2\text{máx}} = \frac{1}{2}(k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2) \quad (17)$$

$$T_{S2\text{máx}} = \frac{1}{2}m\omega^2 \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \left(\frac{Z_2 - Z_1}{a}\right)^2 \quad (18)$$

definidos estos términos, el funcional de la ecuación 3 se expresa como sigue:

$$\begin{aligned} F[V_a] &= \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \left[\int_0^l \left(\frac{d^2 V_a}{dx^2} \right)^2 l^3 dx + K_1 (Z_1 + V_a(x_1))^2 + K_2 (Z_2 + V_a(x_2))^2 \right] - \\ & \frac{1}{2} \omega^2 \rho A l \left[\int_0^l [V_a(x)]^2 \frac{dx}{l} + M \left(\frac{Z_1 + Z_2}{2} \right)^2 + M \left(\frac{c}{a} \right)^2 (Z_2 - Z_1)^2 \right] \end{aligned} \quad (19)$$

donde:

$$K_1 = \frac{k_1 l^3}{EI} \text{ y } K_2 = \frac{k_2 l^3}{EI} \quad (20)$$

Luego el funcional es minimizado con respecto a cada una de las constantes C_j , Z_1 y Z_2 al igual que en el caso anterior, llegando a una solución similar a la ecuación (15).

2.4 Viga con sistema masa resorte adosado según caso 3).

Este es distinto a los demás porque la masa no tiene dimensiones, sino que tiene masa e inercia rotacional, pero es considerada puntual. No se encontraron estudios de sistemas de 2GDL como este en la literatura, y debe mencionarse que presenta la ventaja que se adosa a un solo punto de la viga o placa. La masa está adosada a la estructura por medio de un resorte traslacional y uno rotacional de constantes k_t y k_r respectivamente, ubicados en la posición x_1 .

Con Z y Θ denotamos el desplazamiento y el giro absolutos de la masa, el desplazamiento y el giro de la masa relativo a la viga se expresa como:

$$\begin{aligned} z &= Z + V_a(x_1) \\ \theta &= \Theta + V_a'(x_1) \end{aligned} \quad (21)$$

Los términos energéticos correspondientes al sistema discreto que intervienen en el funcional de la ecuación (3) se expresan de la siguiente manera:

$$U_{S3\text{máx}} = \frac{1}{2}(k_t z^2 + k_r \theta^2) \quad (22)$$

$$T_{S3\text{máx}} = \frac{1}{2}m\omega^2 Z^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 \Theta^2 \quad (23)$$

Luego expresamos el funcional del sistema viga-masa correspondiente al esquema de la figura 1 caso 3) como sigue:

$$F[V_a] = \frac{1}{2} \frac{EI}{l^3} \left[\int_0^l \left(\frac{d^2 V_a}{dx^2} \right)^2 l^3 dx + K_t (Z + V_a(x_1))^2 + K_r l^2 (\Theta + V_a'(x_1))^2 \right] - \frac{1}{2} \omega^2 \rho A l \left[\int_0^l [V_a(x)]^2 \frac{dx}{l} + M Z^2 + M \left(\frac{c}{l} \right)^2 \Theta^2 \right] \tag{24}$$

siendo:

$$K_t = \frac{k_t l^3}{EI} \text{ y } K_r = \frac{k_r l}{EI} \tag{25}$$

Luego el funcional es minimizado con respecto a cada una de las constantes C_j , Z y Θ , llegando a una solución similar a la ecuación (15).

3 RESULTADOS NUMERICOS

Se calcularon las primeras 6 frecuencias naturales del sistema viga-masa para el caso de la viga bi-empotrada y simplemente apoyada.

Para el caso de la viga bi empotrada se tomó el siguiente conjunto de funciones coordenadas:

$$\varphi_j = (x-l)^2 x^{j+1} \text{ para } j=1..P \tag{26}$$

que cumplen con las condiciones de borde. Para el caso de la viga simplemente apoyada se tomó el siguiente conjunto de funciones:

$$\varphi_j = (x-l)x^j \text{ para } j=1..P \tag{27}$$

Para todos los casos se tomó la misma masa y radio de giro ($M = 1$, $c/l = 0.1$) y la posición central en la viga ya que para este trabajo se estudió la influencia de las dimensiones de la masa y la constante elástica de la vinculación continua.

Se realizó un estudio de convergencia para el caso de la viga bi empotrada con un sistema de 2 GDL como el caso 2) ubicado en el centro y se verificó que para $P=23$ las diferencias en el segundo coeficiente de frecuencia radicaban en la quinta cifra significativa (Tabla 2). Por lo tanto, al no haber diferencias notables en el tiempo de ejecución se tomó para todos los cálculos $P=25$.

	$P=11$	$P=15$	$P=19$	$P=21$	$P=23$	$P=25$
Ω_1	14.240	14.240	14.239	14.239	14.239	14.239
Ω_2	29.916	29.909	29.907	29.907	29.907	29.906
Ω_3	35.042	35.041	35.039	35.038	35.038	35.038
Ω_4	66.188	66.185	66.184	66.184	66.184	66.184
Ω_5	120.91	120.91	120.91	120.91	120.91	120.91
Ω_6	200.88	200.88	200.88	200.88	200.88	200.88

Tabla 2: Análisis de convergencia para una viga biempotrada con un sistema discreto del caso 2). Con $K_1 = K_2 = 125$, $M = 1/2$, $c/l = 0.1$ y $b = l\sqrt{3}/6$.

En las Tablas 3 a 6 se muestran los primeros 6 coeficientes de frecuencia natural de vibración de una viga bi empotrada con un sistema de dos grados de libertad y en las Tablas 7

a 10 para una viga simplemente apoyada. En estas tablas se muestran los valores que resultan de considerar una masa adosada a través de una vinculación elástica continua y sus respectivas simplificaciones a los casos 2) y 3).

$K_f = 50$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1		.6454	2.208	22.65	61.68	120.9	199.9
Caso 2	0.1	.6454	2.208	22.65	61.68	120.9	199.9
Caso 3		.6454	2.207	22.66	61.68	120.9	199.9
Caso 1		1.825	3.087	22.91	61.70	121.0	199.9
Caso 2	0.2	1.824	3.087	22.91	61.71	121.0	199.9
Caso 3		1.824	3.082	22.94	61.71	121.0	199.9
Caso 1		3.348	3.746	23.13	61.76	121.0	199.9
Caso 2	0.3	3.347	3.746	23.12	61.78	120.9	199.9
Caso 3		3.343	3.726	23.22	61.79	121.0	200.0
Caso 1		4.296	5.148	23.30	61.85	121.0	199.9
Caso 2	0.4	4.297	5.143	23.28	61.89	120.9	200.0
Caso 3		4.249	5.125	23.51	61.95	121.1	200.1
Caso 1		4.784	7.186	23.41	61.94	121.0	199.9
Caso 2	0.5	4.786	7.170	23.37	62.04	120.9	200.0
Caso 3		4.691	7.112	23.80	62.22	121.1	200.4

Tabla 3: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga biempotrada con distintos sistemas

discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l} \right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 100$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1		.9127	3.083	22.93	61.68	121.0	199.9
Caso 2	0.1	.9127	3.083	22.93	61.68	121.0	199.9
Caso 3		.9127	3.082	22.94	61.68	121.0	199.9
Caso 1		2.579	4.263	23.45	61.74	121.0	199.9
Caso 2	0.2	2.578	4.263	23.45	61.74	121.0	199.9
Caso 3		2.577	4.249	23.51	61.74	121.1	199.9
Caso 1		4.727	5.126	23.89	61.86	121.0	199.9
Caso 2	0.3	4.724	5.126	23.89	61.88	121.0	200.0
Caso 3		4.713	5.076	24.08	61.91	121.1	200.1
Caso 1		5.841	7.258	24.24	62.03	121.0	200.0
Caso 2	0.4	5.842	7.243	24.21	62.11	120.9	200.1
Caso 3		5.720	7.194	24.65	62.23	121.2	200.4
Caso 1		6.477	10.12	24.48	62.22	121.1	200.0
Caso 2	0.5	6.480	10.07	24.40	62.41	120.9	200.1
Caso 3		6.246	9.914	25.22	62.77	121.3	200.9

Tabla 4: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga biempotrada con distintos sistemas

discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l} \right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 500$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	2.039	6.258	25.19	61.72	121.3	199.9
Caso 2		2.039	6.258	25.19	61.72	121.3	199.9
Caso 3		2.039	6.246	25.22	61.72	121.3	199.9
Caso 1	0.2	5.735	8.018	27.77	61.99	121.5	200.1
Caso 2		5.731	8.018	27.77	62.00	121.4	200.1
Caso 3		5.720	7.923	28.00	62.02	121.7	200.2
Caso 1	0.3	9.123	10.42	29.95	62.60	121.5	200.3
Caso 2		9.121	10.39	29.93	62.71	121.3	200.5
Caso 3		8.837	10.28	30.61	62.85	122.2	201.0
Caso 1	0.4	10.01	15.82	31.68	63.53	121.6	200.4
Caso 2		9.998	15.67	31.57	63.92	121.0	200.9
Caso 3		9.411	15.18	33.05	64.43	122.6	202.4
Caso 1	0.5	10.86	21.78	32.96	64.63	121.8	200.4
Caso 2		10.81	21.33	32.63	65.61	120.9	200.9
Caso 3		9.803	19.90	35.31	66.92	123.0	204.8

Tabla 5: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga biempotrada con distintos sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 1000$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	2.881	7.948	27.94	61.76	121.7	199.9
Caso 2		2.880	7.948	27.94	61.76	121.7	199.9
Caso 3		2.880	7.923	28.00	61.76	121.7	199.9
Caso 1	0.2	8.057	9.571	32.74	62.30	122.1	200.3
Caso 2		8.044	9.570	32.74	62.34	122.0	200.4
Caso 3		8.014	9.411	33.05	62.37	122.6	200.5
Caso 1	0.3	10.52	14.49	36.63	63.56	122.1	200.8
Caso 2		10.51	14.38	36.59	63.77	121.8	201.2
Caso 3		10.09	14.10	37.42	64.01	123.5	202.1
Caso 1	0.4	11.34	21.65	39.66	65.54	122.2	201.0
Caso 2		11.27	21.24	39.50	66.29	121.2	201.9
Caso 3		10.47	20.07	41.25	67.04	124.4	204.9
Caso 1	0.5	12.21	29.24	41.91	68.12	122.7	201.0
Caso 2		12.03	28.11	41.36	70.02	120.9	201.9
Caso 3		10.72	25.04	44.65	71.44	125.3	209.2

Tabla 6: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga biempotrada con distintos sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 50$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	.6454	2.124	10.38	39.48	88.88	157.9
Caso 2		.6454	2.124	10.38	39.48	88.88	157.9
Caso 3		.6454	2.123	10.39	39.48	88.88	157.9
Caso 1	0.2	1.824	2.864	10.89	39.51	88.91	157.9
Caso 2		1.824	2.864	10.89	39.51	88.91	157.9
Caso 3		1.823	2.855	10.92	39.51	88.94	157.9
Caso 1	0.3	3.345	3.364	11.35	39.57	88.92	158.0
Caso 2		3.343	3.364	11.35	39.58	88.91	158.0
Caso 3		3.331	3.340	11.45	39.59	89.00	158.0
Caso 1	0.4	3.752	5.136	11.76	39.68	88.92	158.0
Caso 2		3.752	5.130	11.76	39.70	88.88	158.0
Caso 3		3.673	5.111	11.98	39.75	89.05	158.2
Caso 1	0.5	4.082	7.156	12.11	39.80	88.94	158.0
Caso 2		4.081	7.137	12.09	39.88	88.84	158.1
Caso 3		3.931	7.074	12.51	40.01	89.11	158.4

Tabla 7: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga simplemente apoyada con distintos sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 100$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	.9126	2.857	10.91	39.49	88.93	157.9
Caso 2		.9126	2.857	10.91	39.49	88.93	157.9
Caso 3		.9126	2.855	10.92	39.49	88.94	157.9
Caso 1	0.2	2.577	3.694	11.93	39.54	89.00	158.0
Caso 2		2.576	3.694	11.93	39.54	88.99	158.0
Caso 3		2.575	3.673	11.98	39.55	89.05	158.0
Caso 1	0.3	4.199	4.717	12.85	39.67	89.02	158.0
Caso 2		4.199	4.713	12.85	39.68	88.99	158.1
Caso 3		4.133	4.703	13.02	39.70	89.17	158.1
Caso 1	0.4	4.571	7.224	13.66	39.88	89.02	158.1
Caso 2		4.569	7.206	13.64	39.94	88.92	158.2
Caso 3		4.428	7.155	14.01	40.02	89.28	158.4
Caso 1	0.5	4.889	10.03	14.32	40.15	89.05	158.1
Caso 2		4.880	9.976	14.29	40.31	88.85	158.2
Caso 3		4.631	9.805	14.96	40.54	89.40	158.9

Tabla 8: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga simplemente apoyada con distintos sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 500$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	2.038	4.642	14.93	39.52	89.36	158.0
Caso 2		2.038	4.642	14.93	39.52	89.36	158.0
Caso 3		2.038	4.631	14.96	39.52	89.40	158.0
Caso 1	0.2	5.162	5.716	18.93	39.79	89.70	158.2
Caso 2		5.161	5.711	18.93	39.80	89.68	158.2
Caso 3		5.107	5.700	19.03	39.81	89.98	158.2
Caso 1	0.3	5.426	10.31	22.09	40.47	89.80	158.5
Caso 2		5.418	10.26	22.09	40.54	89.66	158.7
Caso 3		5.288	10.16	22.34	40.63	90.58	159.0
Caso 1	0.4	5.655	15.40	24.67	41.68	89.81	158.7
Caso 2		5.622	15.22	24.65	41.97	89.34	159.2
Caso 3		5.382	14.74	25.14	42.27	91.20	160.5
Caso 1	0.5	5.923	20.64	26.76	43.57	89.95	158.7
Caso 2		5.823	20.10	26.68	44.36	88.96	159.4
Caso 3		5.440	18.77	27.59	44.98	91.82	162.8

Tabla 9: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga simplemente apoyada con distintos

sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

$K_f = 1000$	a/l	Ω_1	Ω_2	Ω_3	Ω_4	Ω_5	Ω_6
Caso 1	0.1	2.878	5.121	19.01	39.56	89.90	158.0
Caso 2		2.878	5.121	19.01	39.56	89.90	158.0
Caso 3		2.878	5.107	19.03	39.56	89.98	158.0
Caso 1	0.2	5.446	8.002	25.11	40.11	90.62	158.4
Caso 2		5.443	7.988	25.11	40.13	90.58	158.5
Caso 3		5.382	7.958	25.14	40.16	91.20	158.6
Caso 1	0.3	5.639	14.14	29.79	41.55	90.87	159.0
Caso 2		5.621	14.03	29.80	41.69	90.58	159.4
Caso 3		5.479	13.76	29.76	41.82	92.46	160.1
Caso 1	0.4	5.857	20.38	33.65	44.36	90.89	159.5
Caso 2		5.783	19.94	33.63	44.87	89.94	160.5
Caso 3		5.528	18.91	33.50	45.11	93.78	162.9
Caso 1	0.5	6.173	25.84	36.82	49.10	91.12	159.6
Caso 2		5.960	24.77	36.68	50.36	89.12	161.1
Caso 3		5.558	22.50	36.62	50.01	95.15	167.2

Tabla 10: Primeros 6 coeficientes de frecuencia de vibración de una viga simplemente apoyada con distintos

sistemas discretos adosados. Con $K_1 + K_2 = K_t = K_f \frac{a}{l}$, $K_r = \frac{K_f}{12} \left(\frac{a}{l}\right)^3$ y $b = a/\sqrt{3}$.

4 CONCLUSIONES

En general se puede apreciar en las tablas que si bien los sistemas discretos son diferentes, no existe demasiada diferencia entre los coeficientes de frecuencia. La mayor diferencia al comparar el caso 1) se produce con el caso 3) y se ve claramente que aumenta con a y k_f teniendo una diferencia del 12.9% en la segunda frecuencia de la Tabla 10 con $a/l=0.5$, viga simplemente apoyada, y para el mismo coeficiente de frecuencia para la viga biempotrada, la desviación es de 14.3% en la Tabla 6.

Al comparar con el caso 2), se puede notar que la mayor diferencia se produce para el

mismo coeficiente de frecuencia (segundo de las Tablas 6 y 10 para $a/l=0.5$) con una diferencia de 3.86% para la viga biempotrada y 4.15% para la viga simplemente apoyada.

Los casos donde se detectan las mayores diferencias se encuentran para valores exageradamente grandes de a , por lo que se puede ver que para valores de a hasta 0.3 la mayor desviación es para vigas simplemente apoyada del 2.83% y para vigas biempotradas de 4.11% siempre producidas por el caso 3).

Las mayores desviaciones se producen para los dos primeros coeficientes de frecuencia, siendo menores las diferencias para frecuencias superiores, esto es porque el sistema discreto adosado modifica en mayor orden las frecuencias mas bajas.

5 AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo fue desarrollado en los Departamentos de Ingeniería de la Universidad Nacional del Sur (UNS) y auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la UNS, por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET), la Agencia Nacional de Promoción Científica y Tecnológica (ANPCyT) de Argentina.

Los autores agradecen al revisor por su minuciosa lectura y valiosas sugerencias que permitieron mejorar el trabajo.

REFERENCIAS

- S. Kukla, B. Posiadala. Free vibrations of beams with elastically mounted masses. *Journal of Sound and Vibration* 175 (4): 557–564, 1994.
- P. A. A. Laura, L. Ercoli y R. Gutierrez, *Optimized Rayleigh-Ritz Method*, Department of Engineering, Universidad Nacional del Sur, Institute of Applied Mechanics. Publication N° 95-34, (1995).
- C.A. Rossit, P.A.A. Laura. Transverse vibrations of a cantilever beam with a spring mass system attached on the free end. *Ocean Engineering*, 28: 933–939, 2001a.
- C.A. Rossit, P.A.A. Laura. Transverse normal modes of vibration of a cantilever Timoshenko beam with a mass elastically mounted at the free end. *Journal of the Acoustical Society of America* 110 (6): 2837–2840, 2001b.
- C. A. Rossit, D. H. Felix, D. V. Bambill, y S. Maiz. Vibraciones transversales libres de placas delgadas sobre fundación elástica con una masa adosada. *Mecánica Computacional*, Vol. XXIV pp 3235-3253, (MECOM 2005).
- S. A. Vera, M. Febbo, C. G. Mendez, R. Paz. Vibrations of a plate with an attached two degree of freedom system. *Journal of Sound and Vibration*. 285: 457-466, 2005.
- J. J. Wu and A. R. Whittaker. The natural frequencies and mode shapes of a uniform cantilever beam with multiple two DOF spring mass systems. *Journal of Sound and Vibration*. 220 (3): 451-468, 1999.
- J. J. Wu. Use of equivalent-damper method for free vibration analysis of a beam carrying multiple two degree-of-freedom spring–damper–mass systems. *Journal of Sound and Vibration*. 281: 275-293, 2005.
- J. S. Wu and H. M. Chou. A new approach for determining the natural frequencies and mode shapes of a uniform beam carrying. *Journal of Sound and Vibration*. 227 (2): 361-381, 1999.