

MÉTODO DE MALLA COMPUESTA (ACM) EN PROBLEMAS ELÍPTICOS

Sofía S. Sarraf^a, Ezequiel J. López^a, Marta B. Bergallo^b y Victorio E. Sonzogni^a

^aCentro Internacional de Métodos Computacionales en Ingeniería (CIMEC), INTEC CONICET, Universidad Nacional del Litoral, Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina, ssarraf@ceride.gov.ar,

<http://www.cimec.org.ar>

^bDepartamento de Matemática, Facultad de Ingeniería Química, Universidad Nacional del Litoral, Santiago del Estero 2829, 3000 Santa Fe, Argentina, bergallo@math.unl.edu.ar,

<http://math.unl.edu.ar>

Palabras clave: Mallas Compuestas Algebraicas (ACM), Multigrilla Algebraico (AMG), Error de discretización, Estimadores de error *a posteriori*

Resumen. El uso de una malla compuesta algebraica de elementos finitos puede resultar de utilidad para estimar errores de discretización e incluso obtener una solución mejorada sin elevar el costo computacional. Esta técnica surge de una analogía con la teoría de mallas compuestas geométricas.

Lo que el método propone consiste en resolver, sobre una malla dada, un sistema lineal cuyo operador resulta de una combinación lineal de operadores definidos en mallas con distintos grados de refinamiento y definidos sobre la malla más fina de manera adecuada. Las distintas mallas poseen nodos en común, los cuales vinculan sus respectivos operadores.

En este trabajo se desarrolla el método de malla compuesta algebraica para mejorar la solución numérica obtenida por el método de elementos finitos. Se presentan ejemplos sobre problemas elípticos en dominios 2D. El método no se restringe a casos bidimensionales, también puede extenderse a problemas 3D. Mediante la técnica propuesta, la mejora de las soluciones puede obtenerse sin incrementar apreciablemente el costo computacional del problema.

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo se presenta una nueva técnica de malla compuesta algebraica donde cada componente de la mezcla representa una malla con diferente error de aproximación. Dada una malla de elementos finitos se obtiene una nueva malla con nodos en común con la primera, donde luego de llevar a cabo dicha composición puede obtenerse una solución mejorada con respecto a la solución obtenida a partir del comportamiento individual de la malla inicial y sin elevar significativamente el costo computacional.

La técnica de malla compuesta algebraica (ACM) es la versión algebraica de la propuesta de mezcla de mallas (Bergallo et al., 2000). Partiendo de una malla de elementos finitos, la nueva malla con la que se llevará a cabo la mezcla proviene de la aglomeración de elementos de aquella. Tal aglomeración se obtiene mediante la utilización de técnicas del método Multigrilla Algebraico. En particular, en este trabajo se emplea una modificación al procedimiento de construcción de macroelementos propuesta por Okusanya (2002). Dados entonces los elementos de la primera malla, mediante dicho algoritmo se aglomeran adecuadamente los elementos de la misma de forma tal de obtener una nueva malla donde los elementos no necesariamente preservan la forma geométrica de la malla inicial. El sistema lineal resultante luego de utilizar la técnica de malla compuesta, puede resolverse mediante un método directo o un método iterativo, tal como el método Multigrilla (Sarraff et al., 2007).

Ya ha sido mostrado que es factible utilizar la técnica de malla compuesta geométrica sobre mallas no estructuradas (Sarraff et al., 2007). En el siguiente trabajo se presenta la técnica de malla compuesta algebraica de elementos finitos en general para mallas no estructuradas y se muestran algunos problemas test elípticos, discretizados sobre mallas estructuradas, donde se analizan los errores de discretización. El sistema lineal de ecuaciones resultante se resuelve mediante un método directo.

2. ELEMENTOS DEL MÉTODO MULTIGRILLA ALGEBRAICO

Sea el problema representado por la siguiente ecuación diferencial elíptica

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\mu(\mathbf{x})\nabla u) &= -f(\mathbf{x}), & \text{en } \Omega \\ u &= g_D, & \text{sobre } \Gamma_D \\ \mu(\mathbf{x})\nabla u \cdot \mathbf{n} &= g_N, & \text{sobre } \Gamma_N \end{aligned} \quad (1)$$

donde el dominio $\Omega \in \mathbb{R}^{\text{nde}}$, con nde el número de dimensiones espaciales, está acotado por la frontera Γ formada en general por una porción con condiciones Dirichlet Γ_D y una con condiciones Neumann $\Gamma_N = \Gamma \setminus \Gamma_D$; y la función $f(\mathbf{x})$ es dato.

Discretizando la ecuación (1) se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{A}_h \mathbf{u}_h = \mathbf{b}_h \quad (2)$$

Los operadores discretos que derivan de los métodos como Elementos Finitos, Diferencias Finitas, etc., tienden a ser grandes sistemas de ecuaciones con matrices de tipo *sparse* que se adaptan adecuadamente a los esquemas iterativos. La aplicación de dicho esquema o suavizador $\mathcal{S}(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{b}_h, \mathbf{A}_h, n)$ a la solución del sistema (2) resulta en una mejor estimación \mathbf{u}_h^n a la solución luego de un número n dado de iteraciones, partiendo de la aproximación inicial \mathbf{u}_h^0 . Se define el error por iteración como

$$\mathbf{e}_h^n = \mathbf{u}_h^n - \mathbf{u}_h \quad (3)$$

Dado que \mathbf{u}_h^n representa una aproximación a la solución, no satisface la ecuación (2) exactamente, pudiéndose definir el residuo $\boldsymbol{\tau}_h$ como

$$\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{b}_h - \mathbf{A}_h \mathbf{u}_h^n \quad (4)$$

Calculando la diferencia entre las ecuaciones (2) y (4) y utilizando la linealidad del operador discreto se obtiene

$$\boldsymbol{\tau}_h = \mathbf{A}_h(-\mathbf{e}_h^n) \quad (5)$$

Utilizando las definiciones previas, se describe brevemente a continuación cómo trabaja el método Multigrilla. La idea básica es el cálculo de correcciones al error \mathbf{e}_h^n sobre una grilla gruesa Ω_H partiendo del conjunto de ecuaciones que surge de la discretización de una EDP (Ecuación Diferencial a derivadas Parciales) sobre una grilla fina Ω_h . Específicamente, se considera un operador de restricción $\mathbf{R}_h : \mathbb{R}^{n_h} \rightarrow \mathbb{R}^{n_H}$, donde $n_h > n_H$ son las dimensiones de los espacios de dimensión finita asociados con las grillas Ω_h y Ω_H respectivamente. Se define entonces la componente oscilante \mathbf{e}_h^{rough} del error \mathbf{e}_h^n como las componentes para las cuales

$$\mathbf{R}_h \mathbf{e}_h^{rough} = \mathbf{0} \quad (6)$$

de forma tal que las componentes suaves del error \mathbf{e}_h^{smooth} son simplemente el complemento. Esto asegura que la transferencia del error a la malla gruesa involucra sólo la componente suave del mismo. Luego, la aplicación de un suavizador $\mathcal{S}(\mathbf{u}_h^0, \mathbf{b}_h, \mathbf{A}_h, n)$ a la estimación actual de la solución implica que el suavizador elegido sea efectivo en la eliminación de \mathbf{e}_h^{rough} . Una representación de la ecuación (5) en la malla gruesa que puede resolverse más eficientemente es

$$\mathbf{A}_H \mathbf{e}_H^n = -\mathbf{R}_h \boldsymbol{\tau}_h \quad (7)$$

donde \mathbf{A}_H y \mathbf{e}_H^n son las representaciones en la malla gruesa de \mathbf{A}_h y \mathbf{e}_h^n respectivamente. La corrección del error \mathbf{e}_H^n calculada sobre la malla gruesa es ahora interpolada a la grilla fina y utilizada para actualizar la solución mediante el operador de prolongación $\mathbf{P}_h : \mathbb{R}^{n_H} \rightarrow \mathbb{R}^{n_h}$,

$$\mathbf{u}_h^n \leftarrow \mathbf{u}_h^n - \mathbf{P}_h \mathbf{e}_H^n \quad (8)$$

2.1. Operadores de Interpolación y Restricción

Todo algoritmo Multigrilla requiere una aproximación del operador de la grilla fina dentro del espacio de la malla gruesa. La matriz correspondiente a dicho espacio se denomina \mathbf{A}_k y se calcula mediante la siguiente relación algebraica recursiva

$$\mathbf{A}_{k+1} = \mathbf{R}_k \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \quad (9)$$

donde, si bien los operadores \mathbf{R}_k y \mathbf{P}_k son independientes, la elección $\mathbf{R}_k = \mathbf{P}_k^t$ minimiza el error de la solución medido en norma- A luego de las correcciones a la grilla gruesa para operadores simétricos y definidos positivos (Briggs et al., 2000). Dada la ecuación (9), se supone independientes a los operadores \mathbf{R}_k y \mathbf{P}_k . Sea \mathbf{v}_{k+1} la corrección sobre la grilla gruesa y sea $\bar{\mathbf{u}}_k$ la solución actual estimada sobre la malla fina. El error en la solución luego de la corrección será entonces

$$\mathbf{e}_k = \bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k \quad (10)$$

Si se mide el error en norma- A y se minimiza, se obtiene que

$$\min_{\mathbf{v}_{k+1}} \|\mathbf{e}_k\|_{\mathbf{A}_k} = \min_{\mathbf{v}_{k+1}} (\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k)^t \mathbf{A}_k (\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k) \quad (11)$$

Diferenciando la forma cuadrática resultante con respecto a \mathbf{v}_{k+1} y aplicando las condiciones estacionarias se tiene

$$\mathbf{P}_k^t (\mathbf{A}_k + \mathbf{A}_k^t) (\bar{\mathbf{u}}_k + \mathbf{P}_k \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{A}_k^{-1} \mathbf{b}_k) = \mathbf{0} \quad (12)$$

Considerando una matriz \mathbf{A}_k simétrica, puede resolverse fácilmente para obtener

$$\mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{P}_k^t \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k)^{-1} \mathbf{P}_k^t (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{u}}_k) \quad (13)$$

La matriz Hessiana resultante para la ecuación (11) es

$$\mathbf{H} = 2\mathbf{P}_k^t \mathbf{A}_k \mathbf{P}_k \quad (14)$$

lo que muestra que la ecuación (13) es un mínimo cuando \mathbf{A}_k es definida positiva. La corrección de la malla gruesa para el algoritmo Multigrilla lineal es (Briggs et al., 2000)

$$\mathbf{v}_{k+1} = (\mathbf{A}_{k+1})^{-1} \mathbf{R}_k (\mathbf{b}_k - \mathbf{A}_k \bar{\mathbf{u}}_k) \quad (15)$$

Comparando las ecuaciones (9), (13) y (15) se obtiene que

$$\mathbf{R}_k = \mathbf{P}_k^t \quad (16)$$

No puede llevarse a cabo el mismo razonamiento para una matriz no simétrica. Esta elección de los operadores de interpolación tiene también la ventaja de que sólo uno de los operadores debe construirse. Este método algebraico para la construcción del operador en el espacio de la malla gruesa se denomina *Galerkin Coarse Grid Approximation* (GCA).

Cuando se aplica el método de Elementos Finitos, la tasa de convergencia independiente del tamaño de la malla para la formulación Multigrilla (GCA) utiliza una regla fundamental de precisión de los operadores de interpolación (Brandt, 1977; Wesseling, 1992) que se enuncia a continuación:

Regla del Orden de Interpolación: Sean m_P y m_R el orden (el grado incrementado en una unidad) de los polinomios que son interpolados exactamente por los operadores de prolongación \mathbf{P} y restricción \mathbf{R} respectivamente, y sea $2m$ el orden de la ecuación diferencial. Una condición necesaria para obtener convergencia independientemente de la malla es que

$$m_P + m_R > 2m \quad (17)$$

Con la idea de obtener tasas de convergencia independientes de la malla, los subespacios deben satisfacer ciertas propiedades (Chan et al., 1997). Este análisis se extiende a la tasa de convergencia de un método Multigrilla cuando la definición del espacio Ω_k se obtiene mediante interpolación en el espacio Ω_{k-1} . Luego, estos espacios de Multigrilla deben satisfacer las siguientes propiedades de estabilidad y aproximación para asegurar dicha tasa independiente de la malla:

$$|\mathcal{R}u|_{1,\Omega} \leq C|u|_{1,\Omega}, \quad (\text{estabilidad}) \quad \forall u \in H^{1h}(\Omega) \quad (18)$$

$$\|\mathcal{R}u - u\|_{0,\Omega} \leq Ch|u|_{1,\Omega}, \quad (\text{aproximación}) \quad \forall u \in H^{1h}(\Omega) \quad (19)$$

donde \mathcal{R} es algún operador continuo de proyección o interpolación sobre los subespacios relacionados con \mathbf{R}_k , y C una constante.

Una técnica efectiva para la construcción de los operadores que satisfacen las citadas propiedades es la técnica de aglomeración (Lallemant et al., 1992; Koobus et al., 1994), la cual se basa en la fusión de elementos vecinos de la malla fina para formar macroelementos de la malla gruesa. Esto provee una técnica natural y automática para la construcción del espacio correspondiente a la grilla gruesa. Esta técnica definida sobre el espacio de elementos finitos puede estar basada en los vértices (denominada nodal) (Hutchinson y Raithby, 1986) o basada en los elementos (Brezina et al., 2000; Jones y Vassilevski, 1999). La elección de aglomeración elemental está motivada por la necesidad de alcanzar mayor precisión en los operadores de interpolación (Chan et al., 1997).

La utilización de la aglomeración nodal para la construcción de los operadores de interpolación define la restricción como el operador de inyección, el cual viola la propiedad de estabilidad y, para el caso de la ecuación de Laplace, no se satisface la ecuación (17), resultando en una tasa de convergencia subóptima (Mavriplis, 1995).

3. ESPACIO DE LA MALLA GRUESA MEDIANTE AGLOMERACIÓN

Dado que la técnica de aglomeración nodal resulta en una convergencia subóptima debido a que viola la ecuación (17) cuando se aplica a ecuaciones diferenciales de orden superior, una alternativa es la técnica de aglomeración elemental que permite construir fácilmente interpolantes de mayor orden que sí satisfacen la regla del orden de interpolación.

El algoritmo se basa en la fusión de elementos en macroelementos junto a una adecuada definición de la topología de la malla gruesa y las funciones de base (Chan et al., 1997). La idea detrás de esta propuesta de aglomeración elemental es la reducción de la anisotropía de la malla, lo cual será importante en el futuro para problemas de convección-difusión. La diferencia principal de este método con la primeras propuestas es que los elementos de la malla gruesa no se convierten en elementos estandar mediante una retriangularización, sino que son polígonos generales formados por la aglomeración de elementos de la malla fina.

La topología de la malla gruesa se construye particionando los elementos en grupos de macroelementos. Una macroarista (*macroedge*) se define como la colección ordenada de las aristas de la malla fina que son compartidas por dos macroelementos vecinos. Para completar la definición del grafo de la malla gruesa, se eligen los nodos de la misma como aquellos nodos de la malla fina donde se unen tres o más macroaristas. Los macroelementos con exactamente dos nodos de la malla gruesa se modifican mediante la incorporación de nodos adicionales utilizando nodos de la malla fina que yacen en la macroarista que conectan estos dos nodos, como se observa en la figura 1.

3.1. Algoritmo de Aglomeración Elemental

El algoritmo utilizado en este trabajo consiste en una modificación del algoritmo de aglomeración elemental propuesto por Okusanya (2002). El mismo se basa en la remoción de la anisotropía de la malla utilizando las longitudes de las aristas elementales de manera que la geometría de los espacios correspondientes a la malla gruesa se definan en función de la malla fina. Es decir, las longitudes de las macroaristas son simplemente la suma de las longitudes de las aristas de los elementos de la malla fina que componen el macroelemento correspondiente. Cuando no se especifica la geometría de la malla fina, entonces la técnica se torna topológicamente pura, donde los elementos se asumen isotrópicos o equiláteros. La decisión de aglomerar

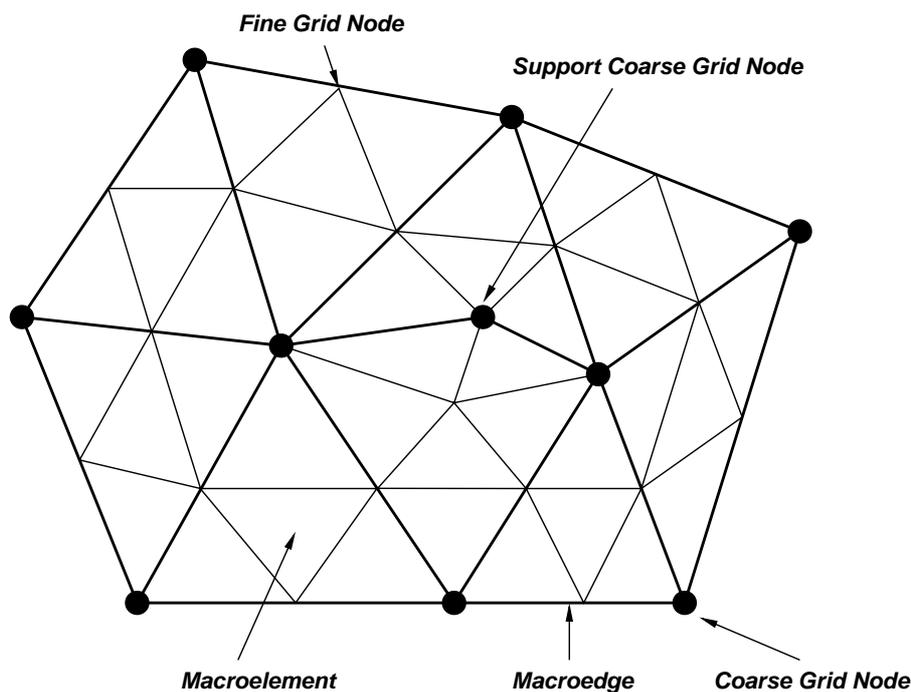


Figura 1: Topología de la malla gruesa con macroelementos excepcionales

dos elementos vecinos se determina mediante un concepto de conectividad geométrica denominado *skew* macroelemental.

Definición 1: *Skew Macroelemental.* Para un macroelemento definido mediante un polígono general de n lados, se denomina *skew* macroelemental a una medida de la anisotropía que se define como el área del polígono dividida por el área de un polígono de n lados isotrópico con el mismo perímetro.

En casos extremos, esta medida es cero para polígonos con vértices colineales y unitaria para polígonos isotrópicos de n lados. El concepto de *skew* macroelemental puede extenderse a 3D mediante una adecuada redefinición.

Las áreas macroelementales se calculan simplemente como la suma de los elementos aglomerados. De esta manera se define un concepto de conectividad basada en las aristas y denominado *edge skew*.

Definición 2: *Edge Skew.* Para un elemento que limita con un macroelemento/elemento mediante una de sus aristas, se denomina *edge skew* como el *skew* macroelemental del macroelemento que podría crearse si el elemento se fusiona con el macroelemento/elemento a lo largo de esa arista.

Algoritmo de Construcción Macroelemental

- **Paso 0:** Se considera el grafo de la malla $G = (V; E)$ y se calcula la longitud de los lados del conjunto de aristas E .
- **Paso 1:** Se obtiene el elemento semilla: Si no hay elemento semilla en la cola, se elige cualquier elemento adecuado que no pertenezca a algún macroelemento.

- **Paso 2:** Se lleva a cabo la adición de elementos alrededor del elemento semilla. Se fusionan los elementos vecinos con *edge skew* mayor que una fracción previamente especificada (típicamente 0.75) del *edge skew* promedio en la malla.
- **Paso 3:** Agregar a la cola los elementos semilla. Se colocan nuevos elementos semilla en la cola para continuar el algoritmo. Éstos se eligen como aquellos elementos que comparten un vértice pero no una arista con el último macroelemento creado. En 3D, este paso se extiende a los elementos que comparten un vértice y/o una arista pero no caras con el macroelemento.
- **Paso 4:** Se repite el **Paso 1** hasta que, o bien todos los elementos pertenezcan a un macroelemento, o no haya más elementos semilla.

Una vez que el algoritmo termina, es necesario un post-proceso para resolver el problema de los elementos *sliver*, los cuales son elementos de la malla fina que no han sido originalmente escogidos por el algoritmo para formar parte de un macroelemento. La decisión de en cuál macroelemento incluir estos elementos se lleva a cabo *a priori* basándose en el *edge skew* de los mismos.

En el paso 1 del algoritmo se da la instrucción de elegir un elemento “adecuado”, lo cual resulta ser un tanto vago. De hecho, el modo de seleccionar el elemento semilla adecuado conduce a resultados totalmente diferentes. Cuando el algoritmo es aplicado a una malla estructurada, sería deseable recuperar un desrefinamiento 4:1. Justamente, la elección del elemento en el paso 1 determinará el éxito de la aplicación del algoritmo. La implementación que se utiliza en el presente trabajo realiza la selección del elemento semilla basándose en etiquetas de los nodos, pudiendo obtener la relación 4:1 en mallas estructuradas. Sin embargo, la aplicación del código desarrollado a mallas no estructuradas no arrojó resultados aceptables.

3.2. Funciones de Base del Espacio de la Malla Gruesa

La construcción de los operadores de interpolación se facilita mediante la definición de funciones de base sobre el espacio de la malla gruesa y se presenta como una extensión natural del algoritmo de elementos finitos sobre estos espacios. Dado que una serie de propiedades deben satisfacerse para garantizar una buena tasa de convergencia, las mismas se resumen a continuación:

- *Suavidad:* Para garantizar la propiedad de estabilidad (18).
- *Aproximación:* Para garantizar la propiedad de aproximación (19).
- *Soportar Pequeño:* Para reducir el patrón de densidad de los operadores en el espacio de la malla gruesa.
- *Conformidad:* Para facilitar el análisis y la construcción de algoritmos.
- *Recursión:* Para asegurar que los espacios de la malla gruesa tengan las mismas propiedades que los de la malla fina.

Se requiere que las funciones de base satisfagan como mínimo las condiciones de estabilidad (18) y aproximación (19), preserven la función constante y se comporten como interpolantes

estandar, es decir,

$$\Phi_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1, & \text{si } i = j; \\ 0, & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (20)$$

La construcción de las funciones de base hace uso de la topología y de la geometría, si es provista. Si la geometría no fuese dada los elementos se asumen equiláteros, lo que permite obtener un interpolante topológico puro. Se definen las funciones de base mediante distancias de interpolación gráfica en la frontera y en el interior, la cuál es geoméricamente ponderada para formar interpolantes más adecuados. Esta técnica es una extensión de la interpolación que hace uso de la distancia de interpolación gráfica sobre la frontera y una interpolación constante en el interior(Chan et al., 1997), lo que genera un interpolante cuasi-lineal como puede verse en la figura 2. La misma muestra la función de base Φ definida sobre el macroelemento aglomerado para el nodo de la malla gruesa en \mathbf{x}_0 . Esta función de base se construye mediante una interpolación de distancia gráfica sobre el macroelemento ponderada con la longitud de las aristas. La misma satisface la condición (20) dado que toma el valor unitario en \mathbf{x}_0 y el valor cero en cualquier otro nodo de la malla gruesa.

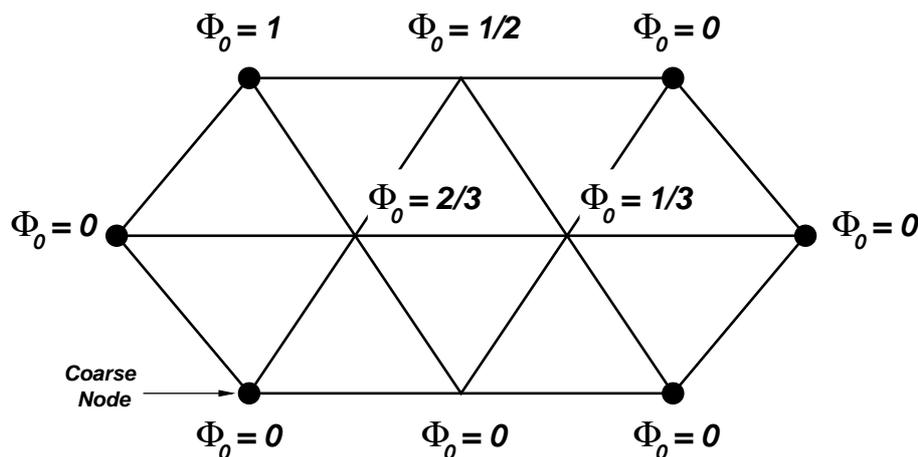


Figura 2: Funciones de base para el espacio de la malla gruesa basadas en distancia gráfica

Como componente del algoritmo de construcción de las funciones de base, se utiliza un algoritmo de búsqueda llamado *Breadth First Search* (BFS).

Definición 3: El algoritmo BFS es un algoritmo de búsqueda que considera vecinos de un vértice, esto es, aristas “salientes” del predecesor del vértice en la búsqueda, antes de que cualquier arista “saliente” del vértice, de tal forma que los extremos son buscados en último lugar.

A continuación se presentan el algoritmo para la construcción del interpolante en el espacio de la malla gruesa como también los coeficientes del operador de prolongación \mathbf{P}_k en 2D. El operador de restricción \mathbf{R}_k se obtiene utilizando la formulación GCA, *i.e.* la ecuación (16).

Algoritmo de Construcción de Funciones de Base

- **Paso 1:** Para cada macroelemento se crea un subgrafo local. En el proceso, se crea un orden de las aristas de la frontera de manera que pueda ser recorrida.

- **Paso 2:** Se extraen la lista de los vértices interiores y la lista ordenada de los vértices de la malla gruesa recorriendo las aristas de la frontera.
- **Paso 3:** Para todos los vértices de la malla fina que yacen entre nodos de la malla gruesa consecutivos, se construyen datos de longitud de interpolación ponderados. La longitud de la macroarista se calcula simultáneamente.
- **Paso 4:** Interpolación en los vértices interiores. Para cada nodo de la malla gruesa en el macroelemento, se lleva a cabo una iteración del algoritmo de búsqueda sobre el subgrafo local con dicho nodo como semilla. Tanto el *level set* como la distancia gráfica desde el macronodo se computa para todos los nodos interiores de la malla fina del subgrafo. Se calcula la distancia gráfica de cada nodo de la malla fina desde los nodos de la malla gruesa. Para cada nodo de la malla fina, se ponderan estas distancias para que sumen uno.

Algoritmo de Construcción del Operador de Prolongación

- **Paso 1:** Para cada nodo de la malla fina i en un macroelemento que corresponde a un nodo de la malla gruesa j , se define el coeficiente del operador de prolongación como

$$\mathbf{P}_k(i, j) = 1 \quad (21)$$

- **Paso 2:** Para todos los otros puntos de la malla fina i en un macroelemento que no corresponda a un nodo de la malla gruesa, dada la longitud ponderada de la distancia gráfica $dist(i, j)$ desde cualquier nodo j de la malla gruesa, el coeficiente del operador se calcula como

$$\mathbf{P}_k(i, j) = \frac{\frac{1}{dist(i, j)}}{\sum_j \frac{1}{dist(i, j)}} \quad (22)$$

4. TÉCNICA DE MALLA COMPUESTA ALGEBRAICA

Como fuera puntualizado con anterioridad, el principal objetivo de este trabajo consiste en la presentación de la técnica de malla compuesta algebraica aplicable a problemas elípticos. Para la mezcla, se trabajará con dos mallas, una primera malla fina la cuál surge de la discretización del dominio y una segunda malla más gruesa obtenida a partir de la primera mediante la aplicación de las técnicas provenientes del método Multigrilla Algebraico (AMG) presentadas en la sección §3. El operador discreto en la malla gruesa se calcula mediante la GCA (véase la ecuación (9)).

Dado que una malla compuesta de elementos finitos aplicada a la resolución de un problema elíptico puede utilizarse para mejorar una solución numérica sin elevar en forma apreciable el costo computacional y, además, estimar el error de discretización (Bergallo et al., 2000; Sonzogni et al., 1996; Sarraf et al., 2007), en su versión algebraica nuevamente el método consiste en sustituir el operador discreto por una combinación lineal del propio operador y el correspondiente a una malla más gruesa. El factor de participación de cada malla en el modelo compuesto, es decir, el coeficiente en la combinación lineal entre las mallas, se introduce de forma tal de minimizar el error de discretización.

Para el cómputo con la malla compuesta se interpreta que el dominio está formado por la superposición de dos mallas con factores de participación α y $1 - \alpha$. Con $\alpha = 1$ se obtiene el problema original en la malla fina y con $\alpha = 0$ se obtiene el problema en la malla más gruesa.

Sean $\mathbf{A}_2 \mathbf{u}_2 = \mathbf{b}_2$ el sistema de ecuaciones proveniente de la discretización por elementos finitos para la malla Ω^{h_2} y $\mathbf{A}_{12} \mathbf{u}_{12} = \mathbf{b}_{12}$ el sistema análogo para la discretización sobre la malla Ω^{h_1} , ($\mathbf{A}_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{b}_1$) completado con ceros para obtener la dimensión requerida. La solución aproximada por el método de malla compuesta $\mathbf{u}_{h_1 h_2}$ se obtiene del sistema (Sonzogni et al., 1996)

$$[\alpha \mathbf{A}_2 + (1 - \alpha) \mathbf{A}_{12}] \mathbf{u}_{h_1 h_2} = \alpha \mathbf{b}_2 + (1 - \alpha) \mathbf{b}_{12} \quad (23)$$

5. PROBLEMAS TEST

A continuación se presentan problemas test con solución exacta, en donde se muestra la aplicación de la técnica de doble malla algebraica. Debido a que el algoritmo para la construcción de los macroelementos no funcionó correctamente sobre mallas no estructuradas generales, los tests fueron resueltos utilizando mallas estructuradas. Si bien la malla gruesa conservó la propiedad de ser estructurada, los operadores discretos sobre la misma fueron obtenidos mediante la GCA utilizando los operadores de proyección y restricción presentados.

5.1. Problema de Poisson

Se propone como primer ejemplo, resolver por el método de elementos finitos el siguiente problema:

$$\begin{cases} -\Delta u = f, & \text{en } \Omega = [0, 1] \times [0, 1] \\ u = 0, & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases} \quad (24)$$

donde f es el polinomio

$$f(x, y) = (-2500x^3 + 4050x^2 - 1905x + 237)y(250y^4 - 525y^3 + 340y^2 - 69y + 4) + (250x^4 - 675x^3 + 635x^2 - 237x + 27)x(-2500y^3 + 3150y^2 - 1020y + 69) \quad (25)$$

La solución exacta del problema está dada por:

$$u(x, y) = 31250x(x - 1)(x - \frac{3}{5})(x - \frac{1}{5})(x - \frac{9}{10})y(y - 1)(y - \frac{4}{5})(y - \frac{1}{5})(y - \frac{1}{10}) \quad (26)$$

En la figura 3 se ilustra la malla fina correspondiente y en la figura 4 se presenta la malla gruesa obtenida con el algoritmo de aglomeración elemental. Como puede observarse, el algoritmo de aglomeración conserva la relación 4:1 para mallas estructuradas.

Se resolvió el problema realizando la composición de las dos mallas de elementos finitos mediante el método propuesto. Para este problema el factor de participación óptimo es $\alpha = 4/3$ (Bergallo et al., 2000). Se empleó un método directo para resolver el sistema lineal resultante de la discretización. En la figura 5 se presenta la solución numérica obtenida.

En las figuras 6 y 7 se muestran los errores nodales entre la solución exacta y la solución numérica obtenida para la malla más fina y la compuesta, respectivamente. Para cuantificar los errores, la tabla 1 presenta algunos resultados.

En dicha tabla se muestra como disminuye el error con la mezcla, el cual puede apreciarse mejor cuando se calcula mediante la norma L_2 .

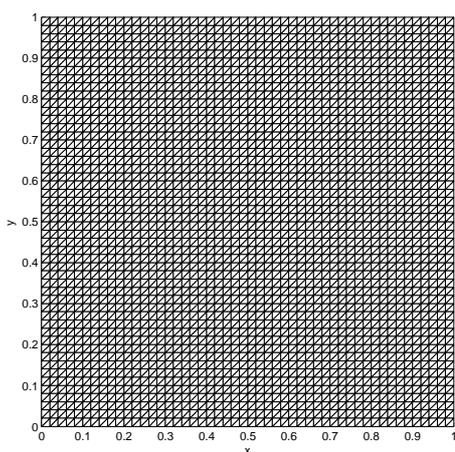


Figura 3: Malla fina para el problema de Poisson.

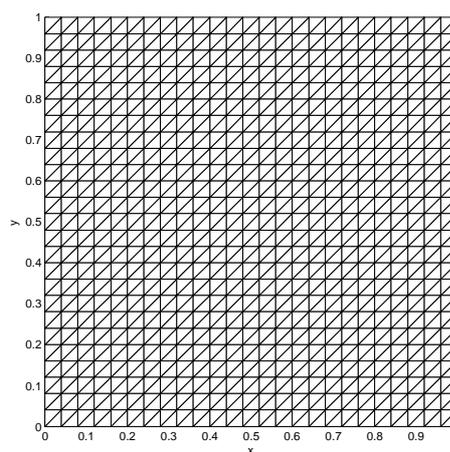


Figura 4: Malla gruesa para el problema de Poisson.

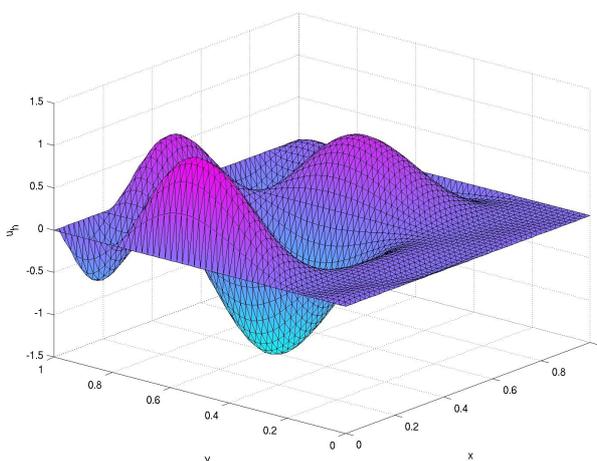


Figura 5: Solución numérica al problema de Poisson.

Problema de Poisson		
	error en L_∞	error en L_2
Sin Mezcla	1.5730×10^{-2}	5.0611×10^{-3}
Con Mezcla	1.3417×10^{-3}	1.7154×10^{-4}

Tabla 1: Errores para el problema de Poisson.

5.2. Problema de Laplace sobre un dominio en L

Considérese el problema de Laplace $\Delta u = 0$ en un dominio en forma de L con la solución exacta (dada en coordenadas polares)

$$u(r, \phi) = r^{2/3} \sin \frac{2}{3} \phi \tag{27}$$

El problema se discretiza utilizando una triangulación estructurada de 5400 elementos y 2821 nodos. Se realizó la composición de las mallas y se resolvió el problema resultante con un método directo, presentándose la solución obtenida en la figura 8. El factor de participación

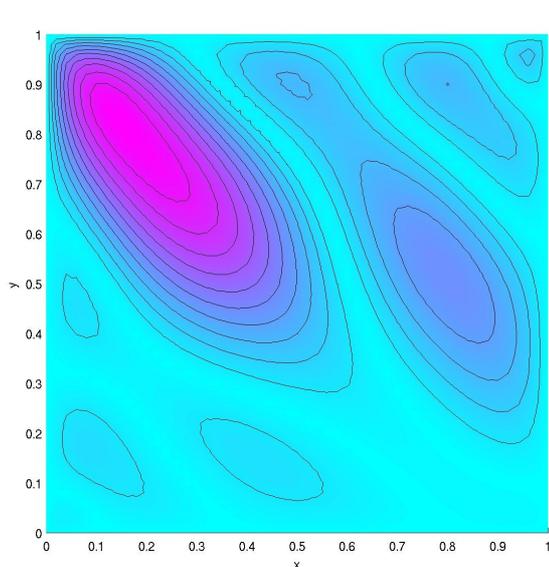


Figura 6: Curvas de nivel del error para la solución con la malla más fina para el problema de Poisson.

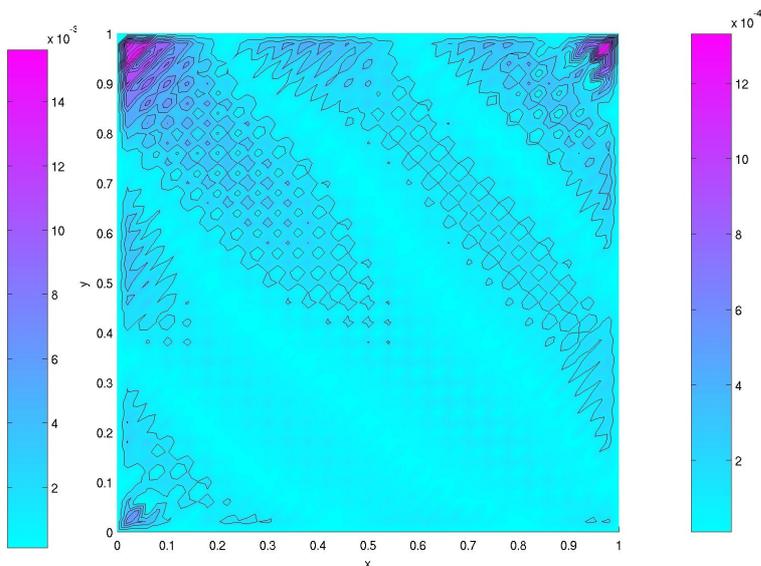


Figura 7: Curvas de nivel del error para la solución con malla compuesta algebraica para el problema de Poisson.

adecuado para este problema, teniendo en cuenta la relación de tamaños entre los elementos de las mallas fina y gruesa, es $\alpha = 2^{5/3}/(2^{5/3} - 1)$ (Bergallo et al., 2000).

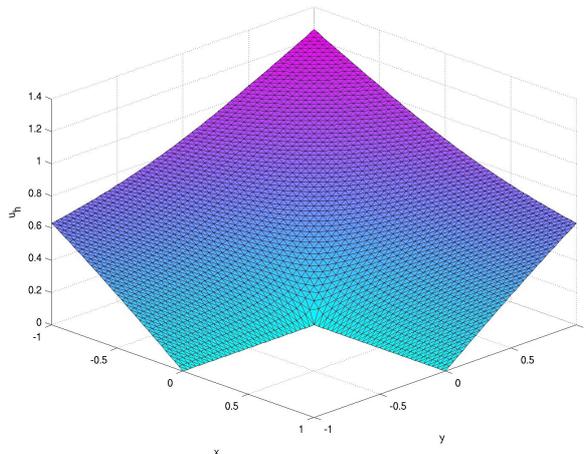


Figura 8: Solución numérica al problema con dominio en L .

En las figuras 9 y 10 se muestran los errores nodales entre la solución exacta y la solución numérica obtenida para la malla más fina y la compuesta. Las tabla 2 presenta los resultados obtenidos en cuanto a los errores en norma L_∞ y L_2 .

6. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

En el presente trabajo fueron presentados resultados preliminares de una implementación del método de malla de elementos finitos compuesta algebraica aplicada a la discretización de una EDP elíptica. En particular fueron empleadas mallas estructuradas debido a que, en su ac-

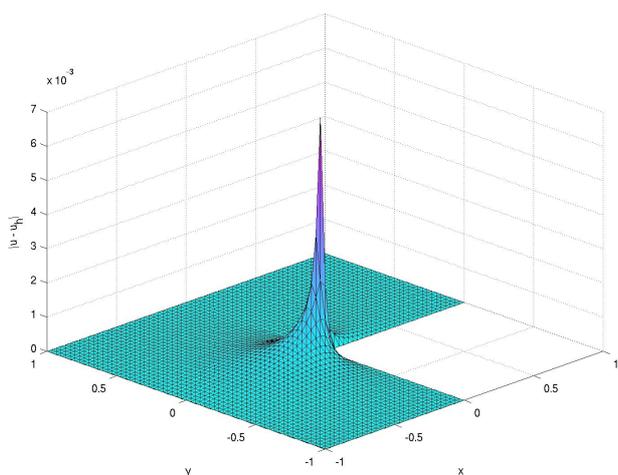


Figura 9: Error entre las soluciones exacta y aproximada para el problema con dominio en L .

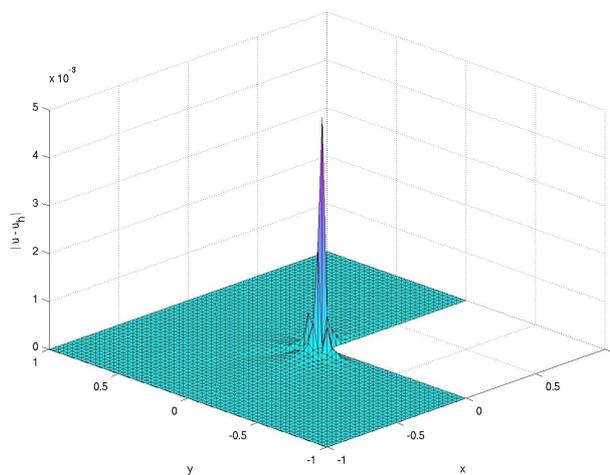


Figura 10: Error entre las soluciones exacta y aproximada para el problema con dominio en L con doble malla algebraica.

Problema con dominio en L		
	error en L_∞	error en L_2
Sin Mezcla	6.8831×10^{-3}	1.8977×10^{-4}
Con Mezcla	4.8820×10^{-3}	4.0052×10^{-5}

Tabla 2: Errores para el problema con dominio en L .

tual nivel de desarrollo, el algoritmo de aglomeración de elementos no funciona correctamente cuando se lo aplica a mallas no estructuradas generales. No obstante, todo el proceso de construcción del espacio para la malla y los respectivos operadores sobre la misma fueron calculados en forma totalmente algebraica según la propuesta presentada. Dado que los ejemplos resueltos poseen solución analítica pudo verificarse que el método ACM conserva las características de su homólogo geométrico, vale decir, reducción de los errores de discretización al utilizar una malla compuesta.

Se plantea como trabajo a futuro el ajuste del método para su aplicación sobre mallas no estructuradas, tanto en dos como en tres dimensiones. Además, se propone estudiar la utilidad de la malla compuesta para problemas más generales, no sólo elípticos sino también otros de naturaleza parabólica-hiperbólica.

REFERENCIAS

- M.B. Bergallo, C.E. Neuman, y V.E. Sonzogni. Composite mesh concept based FEM error estimation and solution improvement. *Computed Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188:755–774, 2000.
- A. Brandt. Multi-level adaptive techniques (mlat) for partial differential equations: ideas and software. *Mathematical Software III*, pages 277–318, 1977.
- M. Brezina, A.J. Cleary, R.D. Falgout, V.E. Henson, J.E. Jones, T.A Manteuffel, S.F. McCormick, y J.W. Ruge. Algebraic Multigrid Based on Element Interpolation (amge). *SIAM*, 22: 1570–1592, 2000.
- W.L. Briggs, V.E. Henson, y S.F. McCormick. *A Multigrid Tutorial*. SIAM, 2000.
- T.F. Chan, S. Go, y L. Zikatanov. *Lecture Notes on Multilevel Methods for Elliptic Problems*

- on Unstructured Grids. *VKI 28th Computational Fluid Dynamics*, pages 1–76, 1997.
- B.R. Hutchinson y G.D. Raithby. A Multigrid Method Based on the Additive Correction Strategy. *Numerical Heat Transfer*, 9:511–537, 1986.
- J. Jones y P.S. Vassilevski. Amge Based on Element Agglomeration. *CASC Lawrence Livermore National Laboratory Report*, 1999.
- B. Koobus, M.H. Lallemand, y A. Dervieux. Unstructured volumen agglomeration MG: solution of the Poisson equation. *IJNMF*, 18:27–42, 1994.
- M.H. Lallemand, H. Steve, y A. Dervieux. Unstructured multigridding by volume agglomeration: current status. *Computational Fluids*, 21:397–433, 1992.
- D.J. Mavriplis. Multigrid techniques for unstructured meshes. *ICASE Report*, 95-27, 1995.
- Tolulope O. Okusanya. *Algebraic Multigrid for Stabilized Finite Element Discretizations of the Navier Stokes Equations*. MIT, 2002.
- S.S. Sarraf, M.B. Bergallo, y Sonzogni V.E. Problemas elípticos resueltos mediante mallas compuestas aplicando métodos Multigrilla. *Proceedings ENIEF'07*, 2007.
- V.E. Sonzogni, M.B. Bergallo, y Neuman C.E. Uso de una malla compuesta para estimar errores de discretización y mejorar la solución en elementos finitos. *Proceedings MECOM'96*, I: 260–263, 1996.
- P. Wesseling. *An Introduction to Multigrid Methods*. John Wiley & Sons, 1992.