

## OSCILACIONES DE RELAJACIÓN EN LA DINÁMICA NO LINEAL DE LA DEPRDACIÓN ENTRE SISTEMAS

Ferreyra, R. T<sup>a,b</sup>, Fogliato, E<sup>b</sup>, Ferreyra, M. A<sup>b</sup>, García, Sandra<sup>a</sup>

<sup>a</sup>*Departamento de Matemáticas, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Vélez Sarsfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, rferrey@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

<sup>b</sup>*Grupo de Análisis No Lineal de Oscilaciones en Sistemas Discretos, Facultad de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales. Universidad Nacional de Córdoba, Avenida Vélez Sarsfield 1601, 5000 Córdoba, Argentina, rferrey@efn.uncor.edu, <http://www.efn.uncor.edu>*

**Palabras Clave:** Interacción asimétrica, Contracción, Relajación, Depredación.

**Resumen.** Se proporciona un modelo para la dinámica de la depredación de sistemas que interaccionan en competencia donde uno de ellos cumple un rol protagónico en el sentido de interactuar en forma asimétrica por tener la propiedad de autodegradación. El modelo que se propone incluye propiedades másicas, elásticas y de disipación y se realiza a través de un oscilador amortiguado no lineal. Esta alternativa se fundamenta en el análisis dinámico de un sistema oscilatorio con términos fuertemente no lineales en velocidad, que evoluciona bajo condiciones de carga e iniciales que le son propias. Finalmente, la respuesta se investiga para facilitar la predicción aproximada, el análisis y la interpretación de las oscilaciones de relajación que describen la evolución del sistema.

## 1 INTRODUCCIÓN

El objetivo de este trabajo es contribuir con un modelo de validez multidisciplinaria que resulte natural a la experiencia y que vislumbre un amplio rango de aplicaciones si se considera que las interacciones no lineales con frecuencia no son simétricas. Para ello se asume la validez de propiedades globales de sistemas evolutivos como el almacenamiento y disipación de energía, la propiedad de inercia y la de autodegradación. Si bien no se pretende dar una contribución en ecología, ni en etología, ni en la dinámica de poblaciones, la vinculación de esas disciplinas con el modelo oscilatorio no lineal que se presenta es apreciable.

El problema oscilatorio que se estudia y resuelve como ejemplo se puede encuadrar dentro de una familia de modelos ecológicos de sistemas en competencia, Murray (1970). Este modelo representa a una comunidad con dos poblaciones, N y P, que compiten porque la cantidad de recursos es limitada. La ley de crecimiento de cada población en forma aislada se asume exponencial. Además, se asume que la población N presenta un comportamiento autodestructivo cuyo modelo se establece a partir de términos con exponentes impares como una opción posible. En la ecuación del modelo,  $\epsilon$  es un parámetro de control y K un número entero, ( véase (1)).

$$\begin{pmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \epsilon \frac{dP}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N + P - \epsilon \frac{dP}{dt} - \epsilon N^{2K+1} \\ -N \end{pmatrix}. \quad (1)$$

En virtud de conocer la naturaleza oscilatoria del problema y de la posibilidad de replantear los sistemas diferenciales de primer orden en variables de estado como sistemas de segundo orden en fuerzas, el modelo se describe mediante propiedades másicas, elásticas y de disipación de la misma forma que se haría con un oscilador amortiguado no lineal. Desde este punto de vista, el modelo permite reconocer que los sistemas en interacción poseen capacidad de almacenar energía y liberarla y predice la existencia de un ciclo límite como sucede en sistemas ecológicos reales. En términos de fuerzas, (véase (2)), se rescribe el modelo ecológico como un oscilador

$$\frac{d^2 p}{dt^2} + \frac{dp}{dt} + p = \frac{dp}{dt} (1 + \epsilon) - \epsilon \left( \frac{dP}{dt} \right)^{2K+1} \quad (2)$$

donde t es el tiempo, P,  $\frac{dp}{dt}$ ,  $\frac{d^2 p}{dt^2}$ , son el número de individuos de la población y sus derivadas primera y segunda. El segundo miembro de la ecuación, por otro lado, agrupa fuerzas no lineales dependientes de la velocidad. El modelo permite también describir la interacción dinámica de las poblaciones mediante oscilaciones de relajación. Las oscilaciones de relajación se asocian a la dinámica de sistemas fuertemente no lineales y se puede dar en una inmensa cantidad de escenarios. Su exploración gráfica en tiempo y frecuencia, permite conocer propiedades específicas del sistema como amplitudes, frecuencias y períodos asociadas a degradaciones y restauraciones de interés para la predicción de la evolución de las interacciones asimétricas entre sistemas.

## 2 MODELO ECOLÓGICO OSCILATORIO

El modelo se obtiene a partir de las leyes de crecimiento exponencial de cada subsistema o población en forma aislada y de la ley de competencia, (véase (3)), donde aparece  $C$  como una constante

$$\begin{pmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \in \frac{dP}{dt} \\ N + P \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ P \\ C \end{pmatrix} \quad (3)$$

El modelo ecológico, (véase (4)), que se deduce de las leyes anteriores, no permite la existencia de un ciclo límite en el espacio (N-P), ni considera la autodegradación de una de las poblaciones. Por el momento, la influencia de P sobre N y de N sobre P es recíproca, aunque no es simétrica si  $\in \neq 1$

$$\begin{pmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \frac{dP}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N + P - \in \frac{dP}{dt} \\ -N \end{pmatrix} \quad (4)$$

La inclusión de un modelo de autodegradación se efectiviza introduciendo no linealidades que, además de explicar la propia degradación de N, se relacionan con el amortiguamiento negativo que es responsable del ciclo límite en la respuesta no lineal.

$$\begin{pmatrix} \frac{dN}{dt} \\ \frac{dP}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N + P - \in \frac{dP}{dt} - \in N^{2k+1} \\ -N \end{pmatrix} \quad (5)$$

El modelo planteado, (véase (5)), representa a una población P, con crecimiento aislado exponencial y contenida en  $N + P$ , que compite por los recursos con N, también con crecimiento exponencial. A su vez, se propone que N posea propia degradación de carácter no lineal,  $N^{2k+1}$ , donde  $2k+1$  es un entero impar.

El modelo análogo dinámico, en términos de masa, resorte, amortiguador para la población P, (véase (6)), se puede apreciar en la figura (véase 1).

$$\frac{d^2 p}{dt^2} - \in \frac{dp}{dt} + p = - \in \left( \frac{dP}{dt} \right)^{2k+1} \quad (6)$$

El modelo se puede interpretar como de dos grados de libertad si se consideran ambas poblaciones, N y P. Sin embargo, el problema se desacopla tanto en el análisis como en la resolución y se puede reducir a un grado de libertad. En lo sucesivo, la descripción del problema se limita a la población P.

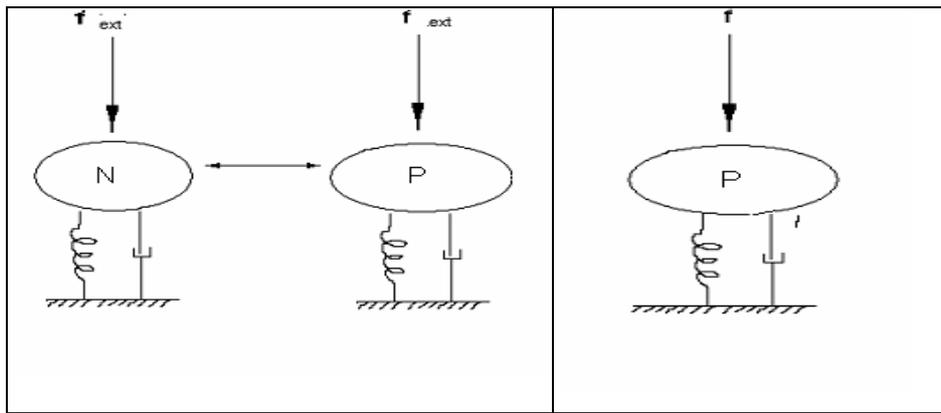


Figura 1: Osciladores No Lineales : a) Poblaciones N-P b) Población P.

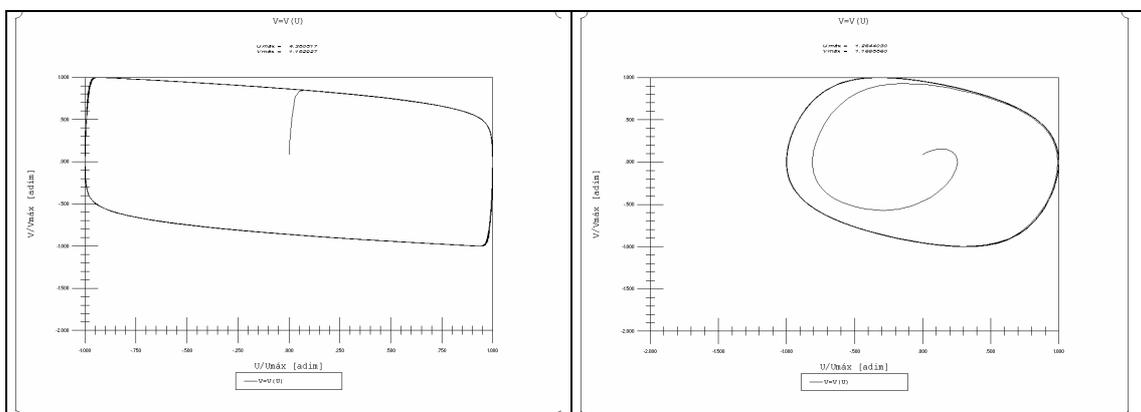
Se reconoce de esta forma que los sistemas en interacción poseen inercia, disipación y capacidad de almacenar energía y liberarla. Naturalmente, la predicción de tipo exponencial se obtiene como respuesta particular del oscilador amortiguado sin términos elásticos.

### 3 ANÁLISIS DE RESPUESTA

El oscilador desarrollado permite describir la dinámica de la población P (o N), que interactúa en competencia asimétrica ya que N posee la propiedad de auto-degradación. Se encuentran oscilaciones de relajación asociadas a términos fuertemente no lineales. Este tipo de oscilaciones pueden ocurrir en una inmensa cantidad de escenarios.

Las gráficas de la respuesta, repiten la forma con ligeras variaciones para distintos valores de K, pero se representan para  $K=1$  por su analogía con el oscilador asociado a la ecuación de Rayleigh o de van der Pol, véanse otras aplicaciones en [Nayfeh y Mook \(1979\)](#), usualmente utilizado para describir oscilaciones auto-excitadas.

Se hace  $(U, V) = (N, P)$  en (5) y (6), y se resuelve con  $(U_0, V_0) = (0, 0.1)$  en casos a), b) y c) y  $(U_0, V_0) = (0, 20)$  en d), para distintos valores de  $\epsilon$ . Luego, se interpreta  $(U, V) = (N - N_0, P - P_0)$ , (véase 2), con  $N_0$  y  $P_0$  como poblaciones iniciales.



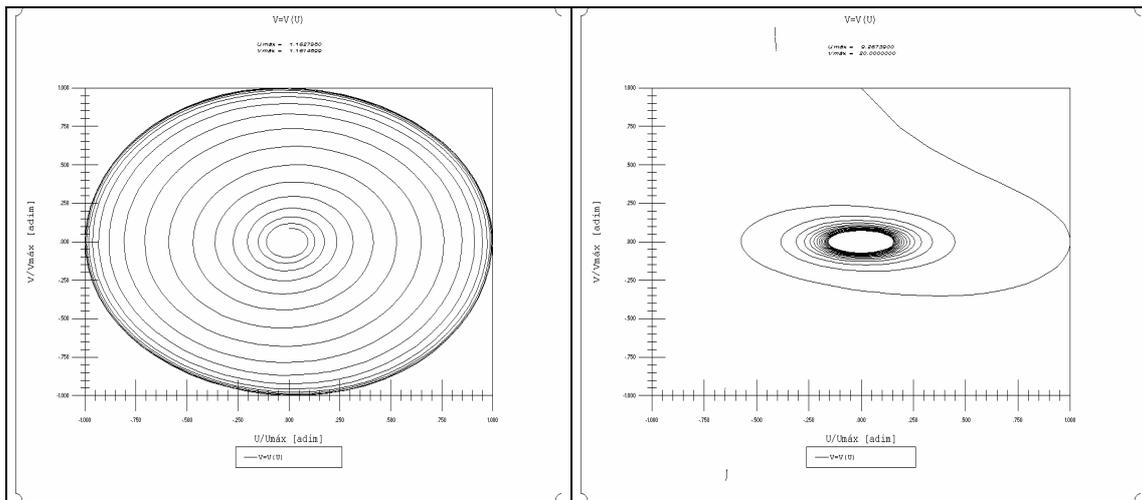
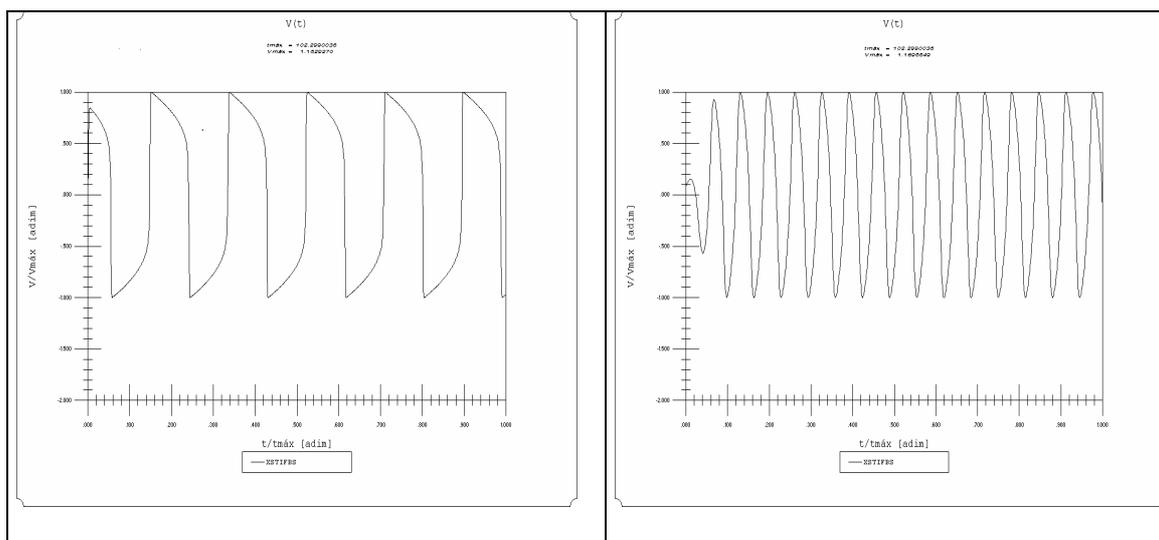


Figura 2: Planos (U-V) para a)  $\epsilon=10$  , b)  $\epsilon=1$  , c)  $\epsilon=0.1$  y d)  $\epsilon=0.01$ .

En casos a), b) y c) el sistema tiene un estado energético inicial bajo y evoluciona a estados superiores estabilizándose en un ciclo límite. En el caso d), deliberadamente se introduce un estado energético inicial muy elevado,  $P_0 = 20$ , y el sistema evoluciona disipando energía hasta mantenerse en un ciclo límite, donde se estabilizan las poblaciones alrededor de valores estacionarios de  $N$  y  $P$ . También se representa (V-t) para el mismo conjunto de valores de  $\epsilon$  y el mismo conjunto de condiciones iniciales, (véase 3). En este caso, es posible reconocer oscilaciones de relajación para  $\epsilon=10$ . Se distingue en el grafo un intervalo de contracción y otro inmediatamente siguiente de relajación que cierra el período y se repite en forma indefinida. La propiedad de relajación se asocia al término  $N^{2k+1}$  con  $k=1$  para la representación realizada.



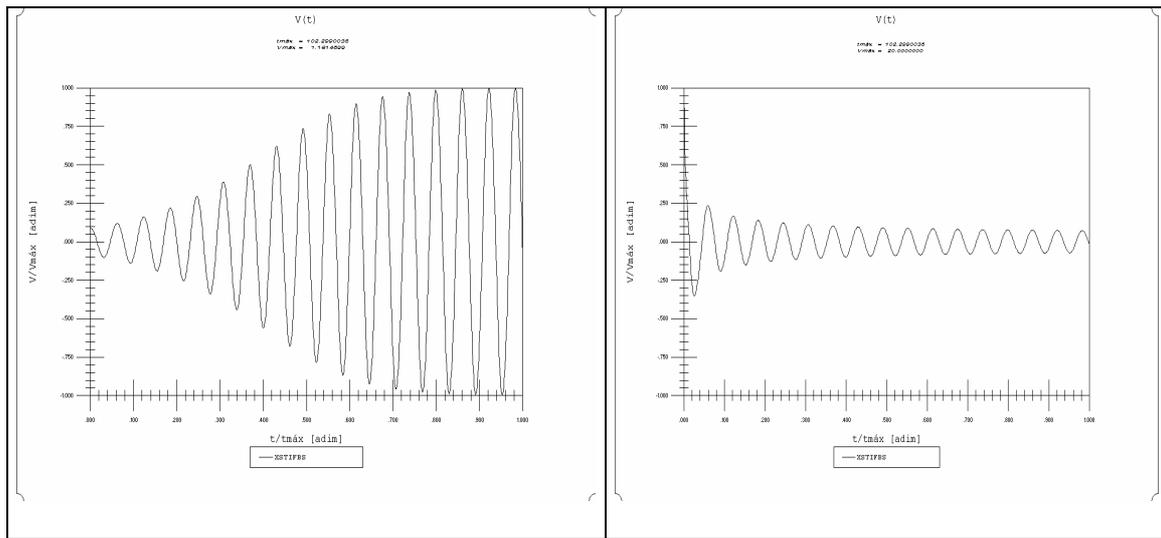


Figura 3: Planos (P-t) para a)  $\epsilon=10$  , b)  $\epsilon=1$  , c)  $\epsilon=0.1$  y d)  $\epsilon=0.01$ .

El modulo de la transformada de Fourier de la respuesta en frecuencia, (véase 4), permite recorrer las frecuencias involucradas en la respuesta no lineal. Se observa que para  $\epsilon=10$  y  $\epsilon=1$  hay más de una frecuencia con participación apreciable.

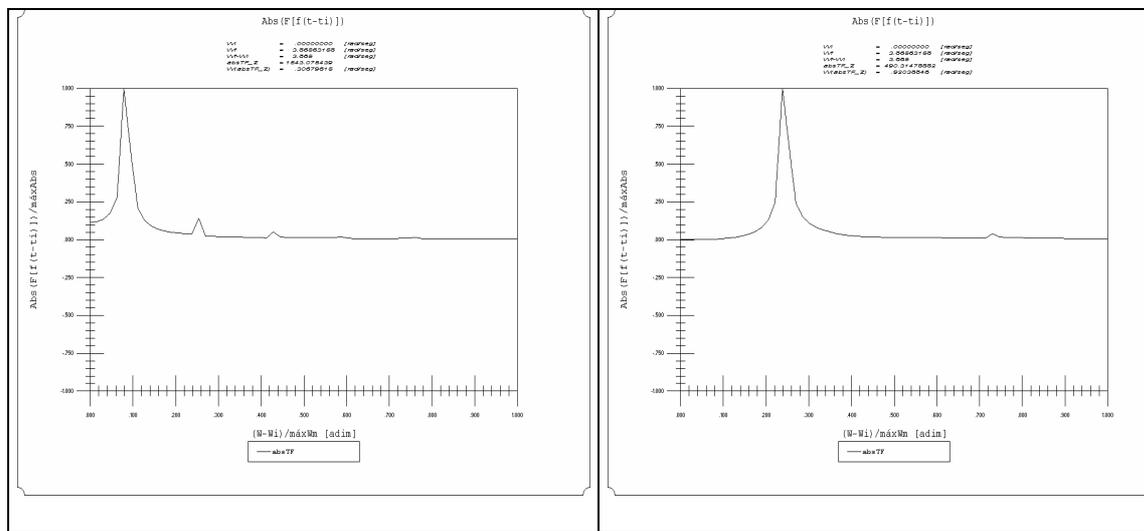


Figura 4: Planos (V-w) para a)  $\epsilon=10$  y b)  $\epsilon=1$ .

Por la comparación de los casos  $\epsilon=10$  y  $\epsilon=1$  se detecta un corrimiento del pico principal hacia la derecha a medida que  $\epsilon$  disminuye de 10 a 1. El aumento de la auto-degradación de N se traduce en un aumento de la capacidad de almacenar energía de P. También se aprecia la desaparición de picos secundarios a medida que  $\epsilon$  decrece. Se dibujan los argumentos de la transformada de Fourier en función de la frecuencia, plano (A-w), para casos  $\epsilon=10$  y  $\epsilon=1$ , donde se verifica la correspondencia con picos del valor absoluto y una mayor sensibilidad, (véase 5).

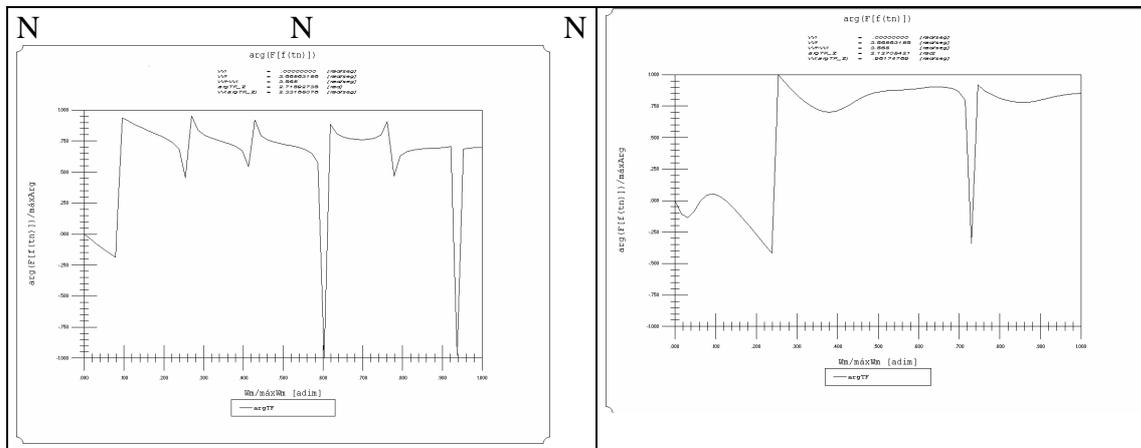


Figura 5: Planos (A-w) para a)  $\epsilon = 10$ , b)  $\epsilon = 1$ .

La exploración analítica y gráfica implementada en frecuencia para el análisis no lineal de las oscilaciones de relajación permite determinar con facilidad el período o intervalo de tiempo entre degradaciones sucesivas con una restauración o regeneración intermedia. Este tiempo entre deterioros resulta de interés en la predicción cuando el modelo representa en forma efectiva al sistema.

#### 4 CONCLUSIONES

Se propone un nuevo modelo para la interpretación y predicción aproximada de la dinámica de la atrición entre sistemas en competencia donde uno de ellos presenta propiedades de auto-degradación. El modelo continuo, se ubicó sólo a los fines comparativos, en el marco de la teoría de la dinámica no lineal de interacción entre poblaciones de seres vivos.

Se consideró, que la posibilidad de acumular energía y liberarla con cierta periodicidad, haciendo énfasis en la naturaleza oscilatoria, constituye una alternativa válida para explicar la competencia asimétrica que se produce cuando uno de los competidores se auto-degrada.

El modelo es realista en el sentido de hacer posible la existencia de un ciclo límite en el plano (N-P) y también porque para ciertos valores del parámetro de control  $\epsilon$  se evidencian oscilaciones de relajación.

Finalmente, se interpreta que el modelo presentado proporciona una herramienta auxiliar en el análisis y predicción aproximada temprana de evolución de poblaciones que degradan en competencia o de sistemas evolutivos que interaccionan en forma asimétrica.

#### REFERENCES

- Murray, J. D. *Mathematical Biology*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1993.  
 Nayfeh A. H., Mook, D.T. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley & Sons, Inc., Blacksburg, Virginia, 1979.