

## OTIMIZAÇÃO DE COLUNAS SEMI-ENTERRADAS UTILIZANDO ALGORITMOS GENÉTICOS E EVOLUÇÃO DIFERENCIAL: UM ESTUDO COMPARATIVO.

**Thiago Alves de Queiroz<sup>a</sup>, Sezimária F. Pereira Saramago<sup>b</sup>, Donald Mark Santee<sup>c</sup>**

<sup>a</sup> *Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160, Campus Santa Mônica - Bloco 1M, 38400-902, Uberlândia-MG, Brasil, [th.al.qz@gmail.com](mailto:th.al.qz@gmail.com)*

<sup>b</sup> *Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2160, Campus Santa Mônica - Bloco 1F, 38400-902, Uberlândia-MG, Brasil, [saramago@ufu.br](mailto:saramago@ufu.br)*

<sup>c</sup> *Departamento de Matemática, Universidade Federal de Goiás - CAC, Av. Lamartine Pinto de Avelar, 1120, Setor Universitário, Campus Catalão, 75750-020, Catalão-GO, Brasil, [donald@ufg.br](mailto:donald@ufg.br)*

**Palavras Chave:** Colunas Semi-Enterradas, Frequências Naturais, Otimização, Evolução Diferencial, Algoritmo Genético.

**Resumo.** Neste trabalho é apresentado um modelo matemático de 3 graus de liberdade que descreve o comportamento de uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear. Deve-se ressaltar que este é um problema complexo, formado por equações altamente não-lineares e não-diferenciáveis. O principal objetivo é obter o projeto ótimo de uma coluna semi-enterrada, considerando a maximização das frequências iniciais e a minimização do volume da coluna de acordo com parâmetros de modelagem. Assim, emprega-se o método da Evolução Diferencial e Algoritmo Genético, visto se basearem na busca da melhor solução através de regras de probabilidade, trabalhando de maneira “aleatória orientada” e utilizarem apenas as informações da função objetivo, não requerendo informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades. Além de obter o projeto ótimo da coluna, comparam-se estes métodos de otimização de acordo com o tempo computacional gasto e o número de avaliações funcionais realizadas, apresentando características relevantes de cada um na resolução do problema apresentado. Portanto, ao aplicar estes métodos no problema da coluna semi-enterrada, determina-se uma estrutura estável, segura e de baixo custo material, isto é, possuindo o menor comprimento total, a maior altura da fundação e o menor momento de inércia de área.

## 1 INTRODUÇÃO

Um dos problemas interessantes e que tem chamado à atenção dos pesquisadores é o que envolve colunas semi-enterradas. Este é um problema que possui grande aplicação prática, tais como em: estruturas “off-shore”, fundação/estrutura dos modernos moinhos de vento, chaminés, torres, pontes, entre outros. Outro fator que deve ser considerado é a carência de estudos a respeito deste elemento estrutural, visto que na literatura poucas são as referências encontradas.

Com a escassez de recursos e o encarecimento de tais sistemas, há a necessidade de projetar/desenvolver de maneira otimizada. Para tanto, existem técnicas de otimização que, selecionada de acordo com o problema, ajudam na resolução destes buscando obter o ótimo do projeto a ser desenvolvido e/ou em desenvolvimento.

Então, com base no modelo matemático de [Queiroz and Santee \(2006\)](#) proposto para uma coluna semi-enterrada em um solo não-linear que considera apenas o primeiro modo de vibração do elemento, faz-se neste artigo, um aperfeiçoamento de tal modelo para trabalhar com os três primeiros modos de vibração, ou seja, um modelo com 3 graus de liberdade.

Deste modo, tem-se um problema mais complexo onde se procura determinar as frequências naturais de maneira analítica, uma para cada modo de vibração, com o objetivo de distanciá-las e obter o projeto ótimo da coluna. Além disso, impõe-se a condição de que a coluna tenha o menor volume possível e respeite uma restrição de projeto relacionada à carga crítica de Euler suportada.

Ao mesmo tempo em que, o distanciamento destas frequências fornece uma estrutura segura e estável, a minimização do seu volume garante menor custo material. Ao passo que tais elementos devem respeitar critérios relacionados à prevenção de oscilações dinâmicas excessivas que surgem tanto na fundação quanto na estrutura que está interagindo com esta.

O problema de otimização, de acordo com o estudo de casos, tratará de funções com um único objetivo, irrestritas ou na presença de restrições. No processo de otimização são utilizados dois métodos naturais baseados em população, a saber: o Algoritmo Genético ([Holland, 1975](#)) e a Evolução Diferencial ([Storn and Price, 1995](#)).

Estes métodos têm-se sido vastamente aplicados para resolver problemas complexos em diferentes áreas e, baseiam-se na busca da melhor solução através de regras de probabilidade, trabalhando de maneira “aleatória orientada”. Além de utilizarem apenas as informações da função objetivo, não requerendo informações sobre suas derivadas ou possíveis descontinuidades.

Também, comparam-se estes métodos de otimização de acordo com o tempo computacional gasto e o número de avaliações funcionais realizadas. Logo, apontando características relevantes de cada método na resolução do problema apresentado.

Portanto, todas estas simulações objetivam obter um elemento estrutural que respeite as condições de projeto, sendo seguro, estável, barato, e ao mesmo tempo “ótimo” sob o ponto de vista da engenharia. Isto significa que muitas vezes não será possível garantir que a solução represente o ótimo global da função objetivo, mas representará o melhor projeto possível segundo a metodologia aplicada.

## 2 MODELAGEM MATEMÁTICA

Grande parte das estruturas encontra-se sujeitas a certo grau de vibração, então, torna-se imprescindível, deste modo, a determinação do seu comportamento oscilatório, bem como das frequências naturais relacionadas a tal comportamento.

Assim, o modelo matemático a seguir descreve o comportamento de uma coluna semi-

enterrada em um solo não-linear do tipo “com enfraquecimento”, partindo do anteriormente desenvolvido em [Queiroz and Santee \(2006\)](#), dado que os resultados alcançados mostraram que esta é uma configuração estrutural potencialmente perigosa em termos de estabilidade da coluna.

Seja a coluna da [Figura 1](#) como esbelta e tendo comprimento total  $L$ , rigidez flexional  $EI$ , enterrada a certa altura  $H$ , carregada por uma força axial  $P$  que mantém a mesma intensidade e direção à medida que a coluna se deforma. E, com a força  $F$  aplicada transversalmente, além de desconsiderar todo e qualquer atrito lateral que a coluna venha a sofrer. Também, considera-se que  $P$  é menor que a carga crítica de Euler, isto é, supõe-se que a coluna inicialmente não flambou.

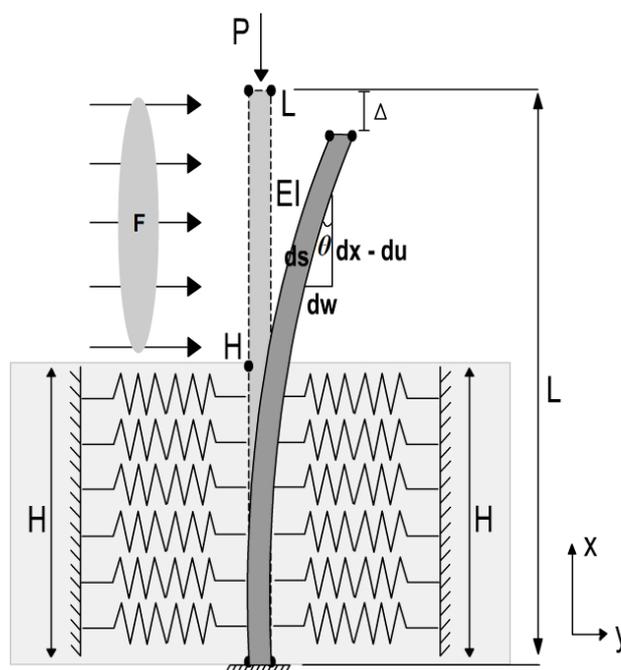


Figura 1: Modelo da coluna semi-enterrada.

A análise da coluna semi-enterrada será feita mediante a aplicação da teoria de Euler-Bernoulli a qual considera que a força de cisalhamento e a inércia de rotação são desprezadas, ([Han et. al, 1999](#)). Então, para a obtenção da equação de movimento, diferente da abordagem feita por [Queiroz and Santee \(2006\)](#) que utilizava o Princípio de Hamilton, utilizar-se-á as Equações de Lagrange ([Hurty and Rubinstein, 1964](#)). Logo, sendo o sistema considerado holonômico, parte-se de:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L_g}{\partial \dot{q}_k} \right) - \frac{\partial L_g}{\partial q_k} = 0 \quad (1)$$

onde o ponto sobre o símbolo (letra) representa a derivada em relação ao tempo  $t$ ,  $q_k$  ( $k=1, 2, \dots, n_c$ ) representa as coordenadas generalizadas,  $L_g$  é o Lagrangeano.

O Lagrangeano é definido por  $L_g = T - V$ , em que  $T$  é a Energia Cinética e  $V$  é a Energia Potencial oriunda de qualquer fonte potencial. De acordo com o problema da coluna semi-enterrada, tem-se a energia potencial descrita como  $V = U_{pt} + U_{fd}$ , que é a soma entre a Energia Potencial Total,  $U_{pt}$ , e a energia interna de deformação da fundação elástica,  $U_{fd}$  ([Bazant and Cedolin, 1991](#)).

As equações da energia cinética, energia potencial total e energia interna de deformação da

fundação elástica foram obtidas de [Queiroz and Santee \(2006\)](#), pois, neste trabalho, os mesmos passos foram seguidos, resultando, respectivamente, nas mesmas equações, a saber:

$$T = \int_0^L \frac{1}{2} m \left( \frac{\partial w}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

$$U_{pt} = \frac{1}{2} EI \int_0^L w'^2 (1 + w'^2) dx - P \int_0^L \left( \frac{1}{2} w'^2 + \frac{1}{8} w'^4 \right) dx \quad (3)$$

$$U_{fd} = \int_0^H \left( -\frac{(E_{ti} - E_{tf})^2 |w|^3}{3P_u} + \frac{E_{ti} w^2}{2} \right) dx \quad (4)$$

onde  $m$  é a densidade linear de massa;  $w(x,t)$  é a função que representa a deflexão lateral do elemento. Os parâmetros relacionados com o solo são:  $E_{ti}$ , o módulo de elasticidade tangente inicial;  $E_{tf}$ , o módulo de elasticidade tangente final;  $P_u$ , a resistência última do solo.

## 2.1 Freqüências Naturais

Segundo [Hurty e Rubinstein \(1964\)](#) quando um sistema, após um distúrbio inicial, é deixado para vibrar por si próprio, a freqüência com a qual ele oscila sem a presença de forças externas é conhecida como sua freqüência natural e, a cada freqüência natural está associado um modo de vibração ou modo natural.

Desta forma, será aplicado ao problema o método de Ritz (ou Rayleigh-Ritz), que consiste em substituir a função de deflexão da coluna,  $w(x,t)$ , por uma função aproximada desenvolvida em séries ([Rezende, 2005](#)). Diante do exposto, considera-se a seguinte expansão sugerida por [Eisenberg \(1980\)](#):

$$f(x) = a_1 \sin(k_j x) + a_2 \cos(k_j x) + a_3 x + a_4 \quad (5)$$

onde  $k_j$  é o parâmetro que irá definir a  $j$ -ésima forma do modo de vibração da coluna na função de deflexão lateral. As constantes  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$  são definidas a partir das condições de contorno as quais estão relacionadas ao tipo de apoio que coluna se encontra.

No presente trabalho será considerado a coluna engastada-guiada que define as seguintes condições de contorno:

- (i)  $f(x)|_{x=0} = 0$ , refere-se à coluna não sofrer deslocamentos transversais no ponto  $x=0$ ;
- (ii)  $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=0} = f'(0) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto  $x=0$ ;
- (iii)  $\frac{d}{dx}(f(x))|_{x=L} = f'(L) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer rotação no ponto  $x=L$ ;
- (iv)  $\frac{d^3}{dx^3}(f_4(x))|_{x=L} = f'''(L) = 0$ , refere-se à coluna não sofrer cisalhamento no ponto  $x=L$ .

Assim, aplicando cada uma das condições de contorno na equação (5), obtém-se um sistema de equações algébricas que representa um problema de autovalor e admite a solução trivial  $a_1=a_2=a_3=a_4=0$ . Com o intuito de obter uma solução não trivial, ou seja, que caracterize a deflexão lateral da coluna de acordo com os parâmetros que a descrevem, torna-se necessário que:

$$\det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ k_j & 0 & 1 & 0 \\ k_j \cos(k_j L) & -k_j \sin(k_j L) & 1 & 0 \\ -k_j^3 \cos(k_j L) & k_j^3 \sin(k_j L) & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (6)$$

Considerando que  $k_j \neq 0$ , a equação (6) é satisfeita para:

$$k_j = \frac{j\pi}{L}, \text{ com } j=1, 2, 3, \dots, \infty \quad (7)$$

Com o interesse em determinar o valor das constantes multiplicativas ( $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  e  $a_4$ ), substitui-se o valor de  $k_j$ , equação (7), no sistema de equações algébricas, resultando em:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ \frac{j\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{j\pi}{L} & 0 & 1 & 0 \\ -\left(\frac{j\pi}{L}\right)^3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (8)$$

Então, com a resolução da equação (8) obtém-se:

$$f(x) = a_4 - a_4 \cos(k_j x) \quad (9)$$

Para obter o valor de  $a_4$  normaliza-se a equação (9) de modo a tornar seu máximo valor unitário. A partir disto, escreve-se a função de deflexão lateral da coluna  $w(x,t)$  que conterà somente os três primeiros modos de vibração. Obviamente, isto não impede que tal função seja reescrita incluindo outros modos de vibração. Assim, chega-se a:

$$w(x,t) = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{L}} \left[ r_1(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{\pi}{L} x\right) \right) + r_2(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{2\pi}{L} x\right) \right) + r_3(t) \left( 1 - \cos\left(\frac{3\pi}{L} x\right) \right) \right] \quad (10)$$

onde  $r_1(t)=r_1$ ,  $r_2(t)=r_2$  e  $r_3(t)=r_3$  são funções dependentes do tempo.

O interesse geral do trabalho está nas frequências naturais para cada modo de vibração da coluna, considerando apenas os três primeiros modos, conforme a função de deflexão representada pela equação (10). Com isso, faz-se a substituição da equação (10) no Lagrangeano e resolvem-se as integrais presentes.

Segundo Eisenberg (1980) em sistemas como o da coluna cuja deflexão lateral do elemento é escrita por uma função da forma dos modos naturais e de funções em relação ao tempo, como as  $r_j(t)$ , tem-se que as funções do tempo representam as coordenadas generalizadas do sistema para as Equações de Lagrange. Após a aplicação das Equações de Lagrange, equação (1), obtêm-se três equações de movimento para a coluna semi-enterrada.

Para obter as frequências naturais é preciso que as equações de movimento obtidas sejam linearizadas. Assim, para realizar tal linearização, dado que  $r_1$ ,  $r_2$  e  $r_3$  são as variáveis do problema, desprezam-se os termos em que a potência de qualquer destas variáveis seja maior que um e/ou exista a multiplicação das variáveis entre si. Além disso, serão admitidas as soluções  $r_j(t) = \bar{r}_j e^{i\omega t}$ , sendo  $\bar{r}_j$  constantes que irão definir os modos de vibração e  $\omega$  a frequência natural da coluna.

Logo, obtém-se um sistema de equações algébricas escritas na forma matricial da seguinte

maneira:

$$[K - \omega^2 M] \begin{bmatrix} \bar{r}_1 \\ \bar{r}_2 \\ \bar{r}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (11)$$

sendo  $[M]$  a matriz de massa e  $[K]$  a matriz de rigidez, dadas por:

$$[M] = \begin{bmatrix} m & \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & m & \frac{2m}{3} \\ \frac{2m}{3} & \frac{2m}{3} & m \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$[K] = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

onde,

$$k_{11} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{4E_{ii} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{3E_{ii}HL^3 + \pi^2(\pi^2 EI - L^2 P)}{3L^4} \quad (14)$$

$$k_{12} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} - \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ii}H}{3L} \quad (15)$$

$$k_{13} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ii} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{6\pi} - \frac{2E_{ii} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ii}H}{3L} \quad (16)$$

$$k_{22} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{4\pi H}{L}\right)}{12\pi} - \frac{2E_{ii} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ii}HL^3 + 4\pi^2(4\pi^2 EI + L^2 P)}{3L^4} \quad (17)$$

$$k_{23} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{5\pi H}{L}\right)}{15\pi} - \frac{2E_{ii} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} - \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{2\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{\pi H}{L}\right)}{3\pi} + \frac{2E_{ii}H}{3L} \quad (18)$$

$$k_{33} = \frac{E_{ii} \sin\left(\frac{6\pi H}{L}\right)}{18\pi} - \frac{4E_{ii} \sin\left(\frac{3\pi H}{L}\right)}{9\pi} + \frac{E_{ii}HL^3 + 3\pi^2(9\pi^2 EI - L^2 P)}{L^4} \quad (19)$$

Observa-se que as matrizes  $[K]$  e  $[M]$  são simétricas, o que será bem útil para os cálculos adiantes. Para obter as frequências naturais e os respectivos modos de vibração da coluna, deve-se considerar:

$$\det(K - \omega^2 M) = 0 \tag{20}$$

Trata-se de um problema de autovalor em que  $\omega^2$  representa os autovalores, isto é, as frequências naturais da coluna e o vetor  $[\bar{r}_j]$  representa os autovetores para cada autovalor, ou seja, os parâmetros para as autofunções que definirão os modos de vibração.

A resolução da equação (20) resulta na equação de frequência (ou equação característica) do problema e, para efeito de simplificação dos cálculos, reescreve-se  $\omega^2 = \lambda$ . Logo, chega-se em:

$$\begin{aligned} &7m^3 \lambda^3 - 3m^2 \lambda^2 (5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23})) + \\ &+ 9m \lambda \left( k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right. \\ &\left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) + \\ &- 27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23}) = 0 \end{aligned} \tag{21}$$

Resolvendo a equação (21), que é um polinômio de terceiro grau em  $\lambda$ , obtêm-se suas raízes, a saber:

$$\lambda_1 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \cos\left(\frac{1}{3} \cos^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \tag{22}$$

$$\lambda_2 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(-\frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \tag{23}$$

$$\lambda_3 = -\frac{2\sqrt{(\mu_1^2 - 3\mu_2)} \sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \sin^{-1}\left(\frac{2\mu_1^3 - 9\mu_1\mu_2 + 27\mu_3}{\sqrt{(2(\mu_1^2 - 3\mu_2))^3}}\right)\right)}{3} - \frac{\mu_1}{3} \tag{24}$$

em que:

$$\mu_1 = -\frac{3(5k_{11} + 5k_{22} + 5k_{33} - 4k_{12} - 4(k_{13} + k_{23}))}{7m} \tag{25}$$

$$\mu_2 = \frac{9m \left( k_{11}(3k_{22} + 3k_{33} - 4k_{23}) + k_{22}(3k_{33} - 4k_{13}) - 4k_{33}k_{12} + \right.}{7m^2} \left. - 3k_{12}^2 + 4k_{12}(k_{13} + k_{23}) - 3k_{13}^2 + 4k_{13}k_{23} - 3k_{23}^2 \right) \tag{26}$$

$$\mu_3 = -\frac{27(k_{11}(k_{22}k_{33} - k_{23}^2) - k_{22}k_{13}^2 - k_{33}k_{12}^2 + 2k_{12}k_{13}k_{23})}{7m^3} \tag{27}$$

Finalmente para obter as três primeiras frequências naturais da coluna, faz-se:

$$\omega_j = \sqrt{\lambda_j} \quad ; (j=1, 2 \text{ e } 3) \tag{28}$$

onde o menor valor de  $\omega_j$  corresponde a primeira frequência natural e, assim, sucessivamente.

Deve-se ressaltar que, a importância em obter as frequências naturais analiticamente, advém, principalmente, da utilização dos métodos de otimização que, de acordo com os dados de entrada, resulta em um alto esforço computacional.

Então, com os valores analíticos, a tarefa de otimização deverá ser consideravelmente mais rápida do que se fosse utilizado uma metodologia numérica para obter as frequências naturais da coluna semi-enterrada, pois a cada avaliação da função objetivo seria necessário calcular cada uma das frequências naturais.

### 3 MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

A idéia fundamental da otimização é melhorar um processo sem ter que testar todas as possibilidades possíveis. Seja uma função de  $n$  variáveis que representa o problema, o objetivo é determinar quais os parâmetros ou variáveis de projeto, que tornam tal problema ótimo, respeitando as restrições impostas ao problema. Portanto, apresenta vantagens como diminuir o tempo destinado ao projeto e permitir o tratamento de uma grande quantidade de variáveis e restrições.

Assim, os métodos de otimização procuram dentro de um espaço de busca, que é limitado pelas restrições, qual valor torna a função objetivo ótima. Nem sempre é garantido encontrar o melhor valor da função, visto que isto depende, entre outras coisas, da função tratada. Também, o método escolhido para realizar a tarefa de otimização traz forte influência sob esta característica.

Quando há a possibilidade de existirem vários mínimos locais, torna-se muito interessante a utilização de métodos naturais, desta forma, neste trabalho, optou-se pela aplicação do Algoritmo Genético e da Evolução Diferencial. Estes métodos baseiam-se em regras de probabilidade para obter a melhor solução de maneira “aleatória orientada”, utilizando apenas informações da função a ser otimizada. (Haupt and Haupt, 1998; Deb, 2001).

O Algoritmo Genético e a Evolução Diferencial trabalham com populações de indivíduos, sendo que cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço das soluções viáveis. Assim, após a definição das variáveis de projeto e da função objetivo, realizam-se uma seqüência repetitiva de passos que consistem em avaliar, selecionar, recombinar e modificar os indivíduos, gerando, assim, novas populações.

Finalmente, é necessário definir critério(s) de parada ou de convergência para estes métodos, visto decorrerem de um processo iterativo. Assim, adotaram-se como critérios: número máximo de iterações e/ou número de iterações sem melhorar o processo de otimização.

#### 3.1 Algoritmo Genético (AG)

Em linhas gerais, resume-se em uma população de indivíduos onde, dados os mecanismos de sobrevivência e reprodução, os mais aptos, terão maior chance de serem selecionados e, então, pelas operações de cruzamento e mutação, formarão novas populações.

Para realizar a tarefa de otimização via Algoritmo Genético é necessário seguir seis operações básicas que compreendem: codificação das variáveis do problema; criação dos indivíduos iniciais, ou seja, formar a população inicial; avaliar os indivíduos da população; selecionar tais indivíduos, de acordo com critérios estabelecidos; realizar o cruzamento entre os indivíduos e; aplicar mutação nestes indivíduos. Este processo de seleção, cruzamento e mutação são repetidos até atingir o critério de convergência. Ao final, o melhor indivíduo é apresentado como a solução do problema.

A codificação das informações, variáveis de projeto, é feita em uma estrutura, denominada

cromossomo, de modo que o método consiga trabalhar com os dados que lhe são fornecidos. Este processo pode ser realizado por meio de uma representação binária, de ponto flutuante ou inteira. Trabalha-se com a representação binária em que cada valor associado representa a presença (valor 1) ou não (valor 0) de certa característica no indivíduo (Michalewicz, 1996).

Geralmente os indivíduos iniciais da população são criados de maneira totalmente randômica e/ou com uma distribuição uniforme pelo espaço de busca. Também, heurísticas podem ser utilizadas para criar tal população inicial.

Entende-se que o tamanho da população é importante para o método, pois populações pequenas reduzem o espaço de busca e antecipam a solução para um ótimo local, já populações muito grandes acarretam em lentidão operacional. Assim, a escolha do tamanho da população deve ser feito com cautela (Goldberg, 1989).

Definida a população inicial, é preciso avaliar o desempenho de cada indivíduo desta população. Este processo é feito simplesmente pelo cálculo da função objetivo, também chamada, função custo ou função de avaliação, que pode ser altamente complexa quando há restrições e/ou um conjunto de objetivos no problema.

Tal função deve ser calculada rapidamente e de maneira eficiente, pois determinará o esforço computacional do método durante a tarefa de otimização, além de medir a proximidade que um indivíduo se encontra da solução desejada. Desta forma, esta deve ser capaz de diferenciar indivíduos bons dos ruins de maneira significativa.

Com o desempenho de cada indivíduo, o operador de seleção irá determinar quais indivíduos estão aptos para realizar o cruzamento. Neste trabalho, utiliza-se a seleção por torneio (Haupt and Haupt, 1998), na qual grupos de dois indivíduos são formados pela escolha aleatória de indivíduos da população. O melhor indivíduo de cada grupo é selecionado baseando-se em uma probabilidade previamente definida. Então, a partir de um número randômico entre  $[0, 1]$ , se este número for menor que a probabilidade, significa que o melhor indivíduo será o escolhido, caso contrário, o outro sobreviverá.

Na próxima etapa, realiza-se o cruzamento cujos indivíduos trocam material genético formando seus descendentes, ou seja, novos indivíduos. Geralmente, este processo ocasiona a propagação das características dos indivíduos mais aptos da população, além de fazer o método procurar em regiões não conhecidas do espaço de busca. Também, o processo de cruzamento é uma condição necessária para que a convergência do método seja alcançada ao longo das gerações.

A estratégia utilizada nesta pesquisa é a do cruzamento uniforme (*uniform crossover*) que se baseia em uma máscara de cruzamento gerada aleatoriamente e de tamanho igual aos do cromossomo pai. Deste modo, para criar os filhos, faz-se uma análise bit-a-bit da máscara, em que o valor 1 corresponde ao bit ser copiado do primeiro pai e o valor 0 corresponde ao bit ser copiado do segundo pai.

Por último, a operação de mutação é necessária para a introdução e manutenção da diversidade genética da população, alterando arbitrariamente um ou mais componentes de um indivíduo escolhido e fornecendo meios para introdução de novos elementos na população. A mutação assegura que a probabilidade de se chegar a qualquer ponto do espaço de busca nunca seja zero, além de contornar o problema de ótimos locais, pois com este mecanismo, altera-se levemente a direção da busca (Hessen and Manner, 1990).

Neste estudo, a estratégia escolhida para o operador de mutação, dada à representação binária, corresponde a uma mutação pontual, onde selecionado(s) o(s) bit(s) a sofrerem mutação, tem-se que cada bit terá seu valor invertido, isto é, se for zero vira um, vice-versa. A Figura 2 mostra um fluxograma de funcionamento do Algoritmo Genético.

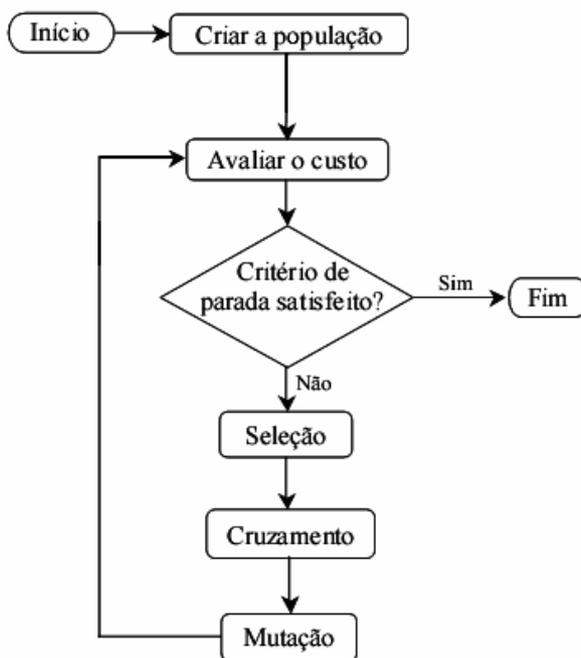


Figura 2: Funcionamento iterativo do Algoritmo Genético.

### 3.2 Evolução Diferencial (ED)

Método criado por [Storn and Price \(1995\)](#) e tem como base utilizar uma diferença ponderada de vetores para perturbar uma população de indivíduos, resultando em um método que requer poucas variáveis de controle e fácil de operar.

Este método inicia com uma população de  $Np$  indivíduos, gerada de maneira randômica ou por uma distribuição de probabilidade uniforme. Estes indivíduos são chamados vetores, possuindo  $n$  componentes, onde  $n$  corresponde ao número de variáveis de projeto.

O primeiro passo, após a criação da população inicial, é realizar a operação de mutação. Esta consiste em criar novos indivíduos pela adição da diferença vetorial ponderada entre dois indivíduos aleatórios da população a um terceiro indivíduo (vetor a ser perturbado), gerando os chamados vetores modificados ou doadores, conforme exemplificado na [Figura 3](#).

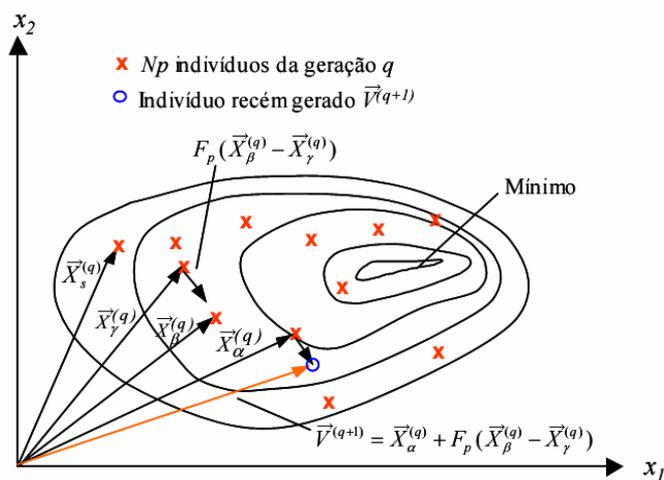


Figura 3: Geração do vetor doador  $\vec{V}^{(q+1)}$ .

Na **Figura 3**, o vetor doador da iteração seguinte,  $(q+1)$ , é representado por  $\vec{V}^{(q+1)}$  e os vetores  $\vec{X}_\alpha^{(q)}$ ,  $\vec{X}_\beta^{(q)}$ ,  $\vec{X}_\gamma^{(q)}$ ,  $\vec{X}_\delta^{(q)}$  e  $\vec{X}_\rho^{(q)}$  representam indivíduos, diferentes entre si, da população na iteração atual  $q$ . O fator de perturbação,  $F_p$ , deve estar no intervalo  $[0, 2]$  e controla a amplitude do vetor diferença.

Em seguida, faz-se a operação de cruzamento, onde os componentes deste novo indivíduo (vetor doador) são misturados com as componentes de outro indivíduo escolhido aleatoriamente e diferente dos anteriores (vetor alvo) segundo uma probabilidade de cruzamento, resultando no vetor tentativa ou experimental.

Finalmente, a operação de seleção compara o custo do vetor tentativa com o do vetor alvo mediante a função objetivo e, se o custo do vetor tentativa for menor, este será o vetor alvo da iteração (geração) seguinte. Então, alcançado algum critério de parada, a tarefa de otimização é finalizada, senão repetem-se os passos anteriores ([Oliveira, 2006](#)).

Vale ressaltar que a Evolução Diferencial apresenta diferentes estratégias obtidas a partir da forma com que os operadores de mutação e cruzamento trabalham. Em outras palavras, as estratégias do método se diferenciam pelo tipo de indivíduo a ser modificado na formação do vetor doador, quantos vetores diferenciais (diferenças ponderadas) serão considerados e o tipo de cruzamento a ser utilizado ([Storn and Price, 1995](#)).

Deste modo, utiliza-se a notação estratégia “ED/a/b/c”, onde:

- $a$  – representa o vetor a ser perturbado, ou seja, caso este vetor seja escolhido aleatoriamente entre os indivíduos da população, tem-se “ $a = rand$ ”. Caso, este vetor seja adotado como o vetor de menor/maior custo da população, tem-se “ $a = best$ ”;
- $b$  – especifica o número de vetores diferença utilizados na operação de mutação para obter o vetor doador, ou seja, para utilizar apenas um vetor diferença, tem-se “ $b = 1$ ”;
- $c$  – determina o tipo de cruzamento utilizado, ou seja, caso seja utilizado o cruzamento binomial, usa-se “ $c = bin$ ”. Caso seja o cruzamento exponencial, usa-se “ $c = exp$ ”.

A Tabela 1 apresenta as estratégias da Evolução Exponencial conforme [Oliveira \(2006\)](#).

Número	Operação de Mutação	Estratégia
1	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/rand/1/bin
2	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/best/1/bin
3	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand/2/bin
4	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/best/2/bin
5	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p (\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/bin
6	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/rand/1/exp
7	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\beta^{(q)} - \vec{X}_\gamma^{(q)})$	ED/best/1/exp
8	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_\alpha^{(q)} + F_p (\vec{X}_\rho^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand/2/exp
9	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{best}^{(q)} + F_p (\vec{X}_\alpha^{(q)} - \vec{X}_\beta^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/best/2/exp
10	$\vec{V}^{(q+1)} = \vec{X}_{old}^{(q)} + F_p (\vec{X}_{best}^{(q)} - \vec{X}_{old}^{(q)}) + F_p (\vec{X}_\gamma^{(q)} - \vec{X}_\delta^{(q)})$	ED/rand-to-best/2/exp

Tabela 1: Estratégias da Evolução Diferencial.

De modo geral, uma estratégia poderá funcionar bem para um determinado problema, porém poderá não ser adequada quando aplicada a outro problema. Então, torna-se

interessante que diversas das estratégias ou todas sejam utilizadas em um mesmo problema.

#### 4 O PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO

Neste artigo, os seguintes problemas de otimização serão estudados: maximizar a primeira frequência natural; distanciar as duas primeiras frequências naturais entre si, dado que, de modo geral, a primeira frequência é a mais importante nos projetos; minimizar o volume da coluna sujeita a restrições quanto à profundidade de enterramento e a carga crítica suportada.

Com isso, as simulações baseiam-se em aplicar os métodos de otimização estudados na função objetivo de interesse variando diversos dos parâmetros que definem a coluna. Em paralelo aos testes será verificada a eficiência dos métodos utilizados para resolver o problema.

Os métodos de otimização foram executados utilizando códigos computacionais implementados em Matlab<sup>7</sup>, a saber: o *Simple Optimization Toolbox* de autoria de Viana (2008), sendo utilizado um computador com as seguintes configurações: processador Intel<sup>®</sup> Core<sup>™</sup> 2 Duo 1.66 GHz com 2 GB de memória RAM.

Em relação a este Toolbox, tem-se que cada método de otimização executa um laço iterativo até alcançar qualquer um dos critérios de convergência definidos a seguir:

- Número máximo de iterações (número de gerações para cada método);
- Número de iterações sucessivas sem melhorar a tarefa de otimização, padrão de 15 iterações sucessivas.

Em relação aos algoritmos utilizados, baseando em testes preliminares e dados da literatura (Oliveira, 2006), adotam-se:

- **Algoritmos Genéticos:**
  - Número de indivíduos = 100;
  - Número de gerações = 200;
  - Seleção do tipo Torneio com 5 rodadas;
  - Cruzamento do tipo uniforme;
  - Probabilidade de Mutação  $P_m = 1\%$ ;
- **Evolução Diferencial:**
  - Número de indivíduos = 100;
  - Número de gerações = 200;
  - Fator de perturbação  $F_p = 0,8$ ;
  - Probabilidade de Cruzamento  $P_c = 0,6$ ;

Com o interesse em comparar a eficiência dos métodos utilizados, consideram-se os seguintes critérios:

- **Esforço computacional:** Número de avaliações da função objetivo efetuadas ao total;
- **Tempo de execução:** Tempo gasto na execução de cada método. Este tempo é em função do tempo de execução do método da Evolução Diferencial (estratégia 1) para evitar certa dependência da máquina utilizada nos testes.

#### 5 SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

Para realizar as simulações, considera-se a coluna de aço com secção hexagonal regular (de lado  $a_h$ ), tendo módulo de elasticidade  $E = 206 \text{ GPa}$ , densidade linear de massa  $m$  em  $[\text{kg/m}]$  obtida pelo produto entre a densidade do elemento,  $\rho = 7.800 \text{ kg/m}^3$ , e pela área da secção transversal considerada, com uma carga aplicada  $P = 140.000 \text{ N}$ , enterrada em um solo de argila mole onde a rigidez  $E_{ti} = 3,6 \text{ MPa}$ .

Todas as simulações verificam a influência da Altura da Fundação ( $H$ ), do Comprimento

Total ( $L$ ) e da Secção Transversal da Coluna ( $a_h$ ).

### 5.1 Caso 1: Maximizar $\omega_1$

Esta primeira simulação considera como objetivo a maximização da primeira frequência natural da coluna, obtida pela equação (28), sendo o problema definido como:

$$\text{Maximizar } f(X) = \omega_1(X), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & 10 \leq H \leq 16 \text{ [metros]} \\ & 30 \leq L \leq 45 \text{ [metros]} \\ & 0,2 \leq a_h \leq 0,5 \text{ [metros]} \end{aligned}$$

A Tabela 2 apresenta os valores ótimos das variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação. Observa-se que os métodos encontraram certa dificuldade para solucionar o problema, dado os diferentes esforços computacionais gastos, apesar de todos alcançarem, praticamente, o mesmo valor para as variáveis de projeto.

		H (m)	L (m)	$a_h$ (m)	Esforço Computacional	Tempo
<b>ED</b>	<b>1</b>	15,997	30,005	0,494	4500 avaliações	1 (padrão)
	<b>2</b>	15,999	30,011	0,499	5800 avaliações	1,221
	<b>3</b>	15,978	30,012	0,481	5900 avaliações	1,2
	<b>4</b>	15,995	30,002	0,498	8700 avaliações	1,871
	<b>5</b>	15,998	30	0,499	10900 avaliações	2,314
	<b>6</b>	16	30	0,5	20100 avaliações	4,329
	<b>7</b>	16	30	0,5	16500 avaliações	3,507
	<b>8</b>	16	30	0,5	20100 avaliações	4,164
	<b>9</b>	16	30	0,5	20100 avaliações	4,243
	<b>10</b>	16	30	0,5	20100 avaliações	4,221
<b>AG</b>		15,997	30,293	0,498	5700 avaliações	0,986

Tabela 2: Resultados obtidos para o problema definido na equação (29).

Na Tabela 3 encontra-se o valor da função objetivo para as variáveis de projeto definidas na Tabela 2, sendo o valor resultante da densidade linear de massa igual a  $m=5020,8 \text{ kg/m}$ , que representa uma coluna bastante pesada e, em termos materiais, bastante cara.

		$f(X) = \omega_1$ (Hz)
<b>ED</b>	<b>1</b>	1,732
	<b>2</b>	1,734
	<b>3</b>	1,723
	<b>4</b>	1,734
	<b>5</b>	1,735
	<b>6</b>	1,736
	<b>7</b>	1,736
	<b>8</b>	1,736
	<b>9</b>	1,736
	<b>10</b>	1,736
<b>AG</b>		1,697

Tabela 3: Valor da função objetivo para o problema definido na equação (29).

Tais resultados mostram que a coluna deve ter a maior área de secção transversal, conseqüentemente, gerando o maior momento de inércia de área e densidade linear de massa, o menor comprimento total e estar enterrada o mais profundo possível.

Portanto, ao obter um elemento estrutural com estas características, as oscilações tendem a ser as menores possíveis, fornecendo estabilidade e, então, segurança a estrutura.

Na prática este resultado é comprovado e pode ser verificado em construções feitas sem o devido projeto de engenharia que, apesar de oferecerem segurança, trazem conseqüências em relação ao enorme peso da estrutura, dado que o valor da densidade linear de massa resultante é elevado, gerando, inclusive, desperdício material.

## 5.2 Caso 2: Maximizar ( $\omega_2 - \omega_1$ )

O objetivo desta simulação está em maximizar a distância entre a primeira e a segunda frequência natural, ambas obtidas segundo a equação (28). Mediante a isso, escreve-se o problema de otimização como:

$$\text{Maximizar } f(X) = (\omega_2(X) - \omega_1(X)), \text{ com } X=[H, L, a_h]^T \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & 10 \leq H \leq 16 \text{ [metros]} \\ & 30 \leq L \leq 45 \text{ [metros]} \\ & 0,2 \leq a_h \leq 0,5 \text{ [metros]} \end{aligned}$$

Na Tabela 4, têm-se os resultados do processo de otimização, mostrando os valores para as variáveis de projeto do problema.

		H (m)	L (m)	$a_h$ (m)	Esforço Computacional	Tempo
ED	1	14,565	30	0,5	13700 avaliações	1 (padrão)
	2	14,574	30	0,5	12700 avaliações	0,935
	3	14,544	30,002	0,5	12700 avaliações	0,915
	4	14,579	30,002	0,499	7100 avaliações	0,465
	5	14,581	30	0,5	16100 avaliações	1,118
	6	14,576	30	0,5	20100 avaliações	1,445
	7	14,576	30	0,5	15900 avaliações	1,098
	8	14,576	30	0,5	20100 avaliações	1,414
	9	14,576	30	0,5	20100 avaliações	1,406
	10	14,576	30	0,5	20100 avaliações	1,414
AG		15,685	30,305	0,499	7200 avaliações	0,419

Tabela 4: Resultados obtidos para o problema definido na equação (30).

Os métodos retornaram, basicamente, a mesma solução para o problema, com ligeira diferença para o Algoritmo Genético, além de gastarem diferentes avaliações da função objetivo, logo, diferentes tempos de processamento para alcançá-las, conforme apresentado na Tabela 4.

Com o valor das variáveis de projeto, obtêm-se o valor das frequências naturais e da função objetivo. O resultado encontrado é o mesmo para cada um dos métodos (estratégias) utilizados, conforme mostra a Tabela 5, donde se obteve  $m=5055,6 \text{ kg/m}$ .

	$\omega_1$ (Hz)	$\omega_2$ (Hz)	f(X)	
<b>ED</b>	<b>1</b>	1,582	7,030	5,448
	<b>2</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>3</b>	1,580	7,027	5,447
	<b>4</b>	1,583	7,030	5,447
	<b>5</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>6</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>7</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>8</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>9</b>	1,583	7,031	5,448
	<b>10</b>	1,583	7,031	5,448
<b>AG</b>	1,662	7,003	5,341	

Tabela 5: Valores das frequências naturais e da função objetivo para o problema definido na equação (30).

Para distanciar as duas primeiras frequências naturais é preciso que a coluna esteja enterrada próxima ao limite superior definido para a variável de projeto, tenha o menor comprimento total e a maior área de secção transversal. Então, assim como na simulação anterior, o resultado encontrado, no final do processo de otimização, é praticamente os limites laterais das variáveis de projeto.

Destaca-se que a densidade linear de massa resultante torna impraticável construir tal coluna, pois, mesmo que o elemento seja estável e seguro, o custo é elevadíssimo, além do exagerado peso do elemento.

### 5.3 Caso 3: Minimizar o Volume

Um dos problemas que surgem com os resultados das simulações feitas é o elevado custo material para construir um elemento estrutural destes, além do desperdício gerado.

Diante disto, o projeto ótimo da coluna semi-enterrada será obtido considerando o objetivo de minimizar o volume da coluna semi-enterrada, conseqüentemente, o seu peso, e sujeito as seguintes restrições:

- A coluna deve ficar enterrada entre 30% e 60% de seu comprimento total;
- A carga aplicada deve ser menor ou igual que a primeira carga crítica de Euler.

O *volume* é expresso pelo produto entre o comprimento total e a área da secção transversal, que depende, explicitamente, do tipo de secção transversal da coluna. Em relação às restrições do problema, escrevem-nas como:

$$\begin{cases} g(X) = [g_1(X) \ g_2(X) \ g_3(X)]^T \\ g_1(X) = 0,3L - H \leq 0 \\ g_2(X) = H - 0,6L \leq 0 \\ g_3(X) = P - P_1^c \leq 0, \text{ onde } P_1^c = \frac{\pi^2 EI}{L^2} \end{cases} \quad (31)$$

Os métodos de otimização discutidos foram desenvolvidos para resolver problemas irrestritos. Assim, deve-se reescrever o problema, adicionando a função objetivo original uma função de penalidade,  $Pf(X)$ . Esta serve para impedir que as restrições sejam violadas, transformando o problema com restrições em um problema irrestrito (Martinez and Santos, 1995).

Logo, ao realizar tal procedimento, obtém-se a função pseudo-objetivo a ser minimizada, ou seja:

$$\text{Minimizar } \varphi(X) = \text{Volume}(X) + k_p Pf(X) \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a: } & 10 \leq H \leq 16 \text{ [metros]} \\ & 30 \leq L \leq 45 \text{ [metros]} \\ & 0,2 \leq a_h \leq 0,5 \text{ [metros]} \end{aligned}$$

onde,

$$Pf(X) = (\max [0, g_1(X)])^2 + (\max [0, g_2(X)])^2 + (\max [0, g_3(X)])^2 \quad (33)$$

em que  $k_p$  é o fator de penalidade que deve ser escolhido de forma adequada para garantir que todas as restrições sejam satisfeitas. Deste modo, baseando-se em algumas pré-simulações e dados da literatura (Oliveira, 2006) escolhe-se o valor  $k_p=1000$ .

Os valores ótimos das variáveis de projeto e o resultado dos critérios de comparação são apresentados na Tabela 6. Percebe-se que alguns métodos (estratégias) encontraram soluções similares e outros com pouca diferença, porém tendendo aos limites laterais das variáveis de projeto.

		H (m)	L (m)	$a_h$ (m)	Esforço Computacional	Esforço Algorítmico
ED	1	14,914	30,026	0,2	3600 avaliações	1 (padrão)
	2	14,957	30	0,2	5100 avaliações	1,362
	3	11,702	30,006	0,2	7200 avaliações	1,923
	4	14,782	30,052	0,201	1900 avaliações	0,492
	5	15,320	30,005	0,2	5300 avaliações	1,408
	6	14,972	30	0,2	20100 avaliações	5,377
	7	10,938	30	0,2	13800 avaliações	3,685
	8	13,793	30	0,2	20100 avaliações	5,362
	9	11,426	30	0,2	20100 avaliações	5,492
	10	12,649	30	0,2	20100 avaliações	5,462
AG		15,833	30,759	0,207	1700 avaliações	0,362

Tabela 6: Resultados obtidos para o problema definido na equação (32).

A Tabela 7 apresenta os valores das duas primeiras freqüências naturais e do volume da estrutura. O valor da densidade linear de massa reduziu drasticamente em comparação com os resultados anteriores, ou seja, obteve-se  $m=865,48 \text{ kg/m}$ . Este resultado é alcançado pela redução do volume da coluna.

Nota-se que os valores das freqüências naturais desta simulação diminuíram, pois a minimização do volume é um objetivo conflitante com a maximização das freqüências, então ao alcançar um destes objetivos, o outro acaba sendo prejudicado.

		$\omega_1$ (Hz)	$\omega_2$ (Hz)	Volume (kg/m <sup>3</sup> )
<b>ED</b>	<b>1</b>	1,181	5,971	3,128
	<b>2</b>	1,190	6,012	3,118
	<b>3</b>	0,846	4,466	3,120
	<b>4</b>	1,164	5,882	3,169
	<b>5</b>	1,239	6,250	3,119
	<b>6</b>	1,192	6,022	3,118
	<b>7</b>	0,794	4,229	3,118
	<b>8</b>	1,045	5,337	3,118
	<b>9</b>	0,827	4,378	3,118
	<b>10</b>	0,927	4,814	3,118
<b>AG</b>		1,230	6,186	3,413

Tabela 7: Valores das frequências naturais e do volume para o problema definido na equação (32).

No final da tarefa de otimização chega-se aos seguintes valores para as restrições do problema, as quais não foram violadas, isto é:

$$\begin{aligned}
 g_1(X) &= -6,605 \\
 g_2(X) &= -2,622 \\
 g_3(X) &= -1,982 \times 10^6 \\
 P_1^c &= 2,122 \times 10^6
 \end{aligned}
 \tag{34}$$

Com estes resultados e de várias outras simulações realizadas, evidencia-se a coluna com o menor comprimento total possível, buscando o limite máximo de enterramento, porém com uma área de secção transversal pequena para obter a redução do volume. Então, diferente das simulações anteriores, onde os resultados mostravam uma coluna com a maior área de secção transversal possível.

Em linhas gerais, este resultado é satisfatório tanto em termos de segurança estrutural quanto em custo material.

## 6 CONCLUSÕES

O estudo de um problema da teoria de oscilações não-lineares, ou seja, a formulação de um modelo matemático de uma coluna semi-enterrada em um solo do tipo “com enfraquecimento” fornece um conjunto de equações diferenciais ordinárias não-lineares que descreve o comportamento deste elemento.

O problema, de certo modo, parece ser trivial, porém é demasiadamente complexo e requer cuidados tanto na formulação quanto nas simulações a serem realizadas, pois, além de envolver a formulação matemática, engloba a parte numérica com os conceitos e métodos de otimização.

Para estas e várias outras simulações realizadas, considerando as 10 estratégias do método da Evolução Diferencial e o Algoritmo Genético, os resultados obtidos apresentaram-se bem similares, com algumas diferenças para os resultados alcançados pelo o Algoritmo Genético.

Logo, considerando o processo de otimização, a Evolução Diferencial apresentou-se melhor que o Algoritmo Genético, pois trouxe, na maioria dos casos, resultados mais significativos, mesmo que o esforço computacional e tempo fossem maiores. Por outro lado, vale ressaltar a facilidade de codificação destes métodos e a de resolver problemas

complexos, além da possibilidade de utilizá-los com computação distribuída.

Analisando os resultados sob o ponto de vista de engenharia, ao verificar a influência do comprimento total da coluna, da secção transversal e da altura da fundação, obtém-se, inicialmente, um elemento robusto, tendo o menor comprimento total, a maior área de secção transversal, além da maior altura da fundação.

O solo, então, passa a ter grande importância, pois se encontraram bons resultados para as funções objetivo no caso em que a coluna estava enterrada até o limite superior definido para a variável de projeto. De modo geral, quanto mais enterrada estiver a coluna, menos susceptível a oscilações esta estará.

Isto traduz em maior estabilidade a coluna, pois suas frequências tendem a se maximizar garantindo a segurança necessária do projeto. Por outro lado, o peso da estrutura torna-a impraticável, o que leva, na continuidade da pesquisa, a estabelecer a minimização do volume do elemento estrutural.

As simulações mostraram que isto é possível, donde se conclui que a coluna resultante deve ter o menor comprimento possível com a maior altura da fundação, porém com a menor área de secção transversal, conseqüentemente, redução da densidade linear de massa e do peso estrutural.

Trabalhos futuros estão sendo propostos, visando estudar um problema multi-objetivo que engloba os objetivos considerados neste trabalho e novos objetivos que poderão ser impostos, assim como, novas restrições. Desta forma, a continuidade desta pesquisa permitirá verificar o comportamento das soluções ótimas do projeto da coluna semi-enterrada quando se tem objetivos conflitantes em um mesmo problema de otimização.

## REFERÊNCIAS

- Bazant, Z. P., and Cedolin, L., *Stability of Structures. Elastic-Inelastic Fracture and Damage Theories*, Oxford University Press, New York, USA, 1991.
- Deb, K., *Multi-objective optimization using Evolutionary Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, USA, 2001.
- Eisenberg, M. A., *Introduction to the Mechanics of Solids*, Addison-Wesley Publishing, California, USA, 1980.
- Goldberg, D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning*, Reading, MA: Addison-Wesley, USA, 1989.
- Han, S. M., Banaroya, H., and Wei, I., Dynamics of Transversely Vibrating Beams Using Four Engineering Theories, *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 225(5), pp 935-988, 1999.
- Haupt, R. L., and Haupt, S. E., *Practical Genetic Algorithms*, John Wiley & Sons, New York, USA, 1998.
- Hessen, J., and Manner, R., Towards an Optimal Mutation Probability for Genetic Algorithms, *Proceedings of the 1st Workshop on Parallel Problem Solving from Nature*, Springer-Verlag, London, England, pp. 23-32, 1990.
- Holland, J. H., *Adaptation in Natural and Artificial Systems*, MIT Press, Illinois Genetic Algorithm Laboratory, IlliGAL, University of Illinois at Urbana-Champaign, pp. 11-147, 1975.
- Hurty, W. C., and Rubinstein, M. F., *Dynamics of Structures*, Englewood Cliffs, Prentice-Hall, New Jersey, USA, 1964.
- Martinez, J. M., and Santos, S. A., Métodos computacionais de otimização, *XX Colóquio Brasileiro de Matemática*, IMPA, Rio de Janeiro (ISBN 85-244-0092-7, 256 p), 1995.
- Michalewicz, Z., *Genetic Algorithms + Data Structures = Evolution Programs*, Springer-

- Verlag, Berlin, Germany, 1996.
- Oliveira, G. T. S., *Estudo e Aplicações da Evolução Diferencial*, Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2006.
- Queiroz, T. A., and Santee, D. M., Modelagem Matemática e Comparação dos Métodos de Perturbação e Numéricos Aplicados a Vibração de Colunas Semi-Enterradas em um Solo Não-Linear, *Mecánica Computacional*, Vol. XXV, p. 1013-1032, 2006.
- Rezende, V., *O Método de Galerkin*, Dissertação apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Matemática, Universidade Estadual de Maringá, Paraná, Brasil, 2005.
- Storn, R., and Price, K., *Differential Evolution: A Simple and Efficient Adaptive Scheme for Global Optimization over Continuous Spaces*, Technical Report TR-95-012, International Computer Science Institute, Berkeley, USA, 1995.
- Viana, F. A. C., *Surrogate Modeling Techniques and Heuristic Optimization Methods Applied to Design and Identification Problems*, Tese apresentada ao Curso de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Minas Gerais, Brasil, 2008.