

ANÁLISIS INVERSO DE SEÑALES DE ULTRASONIDO PARA DETERMINAR CONSTANTES ELÁSTICAS

María G. Messineo, Guillermo E. Eliçabe, Gloria L. Frontini

*Instituto de Investigación en Ciencia y Tecnología de Materiales (CONICET).
Departamento de Matemática. Facultad de Ingeniería. gfrontin@fi.mdp.edu.ar
Universidad Nacional de Mar del Plata
J.B. Justo 4302, (7600) Mar del Plata, Argentina.*

Palabras Clave: Caracterización de materiales, Ultrasonido, Análisis Inverso.

Resumen: Las señales ultrasónicas son ondas mecánicas de alta frecuencia adecuadas para monitorear in situ materiales que tienen geometrías diversas, permitiendo su caracterización cuando otros ensayos no son realizables. Las cantidades medidas, la velocidad de la onda que se propaga a través del material y la atenuación que sufre la misma, dependen de las propiedades mecánicas del material. Estas cantidades pueden variar a medida que la onda se propaga en el interior de una pieza de material con propiedades no homogéneas. Se propone realizar una medición con ondas tipo P transmitidas a través de la muestra y registradas para su análisis, similarmente a lo propuesto en la bibliografía (Fellah (2007), (Rus y García Martínez (2007)). El problema es planteado como un problema inverso, en el que la incógnita es un conjunto de parámetros que describen las constantes mecánicas de un material compuesto por una secuencia de capas. La predicción del efecto que el material produce sobre la señal se obtiene mediante la solución numérica del modelo matemático que depende de dichas constantes. La señal medida se obtiene en este trabajo también en forma simulada. Los parámetros que mejor describen al material se encuentran minimizando la discrepancia entre las señales teóricas y las medidas.

1 INTRODUCCIÓN

La deformabilidad y la inercia son propiedades fundamentales para la transmisión de ondas mecánicas. Si el medio no fuese deformable, ninguna parte de éste experimentaría inmediatamente una perturbación en la forma de una fuerza interna. Similarmente, si el medio no tuviese inercia, no habría retardo en el desplazamiento de las partículas y la perturbación afectaría instantáneamente a todas ellas. La perturbación de un medio elástico por una onda de ultrasonido se caracteriza por la inducción de movimientos oscilatorios en un material, generando ondas mecánicas con un rango de frecuencias comprendidas entre los 20KHz-100MHz. Normalmente, esta generación se lleva a cabo por medio de un material piezoeléctrico, el cual puede ser deformado cuando es expuesto a un voltaje determinado. Este fenómeno permite generar la vibración del material, el cual, al ser acoplado a un medio elástico, induce la transmisión de movimientos oscilatorios. La generación de estos movimientos oscilatorios en un medio determinado se presenta en conjunto a dos fenómenos importantes en la transmisión de ondas mecánicas en un medio no ideal: la dispersión y la atenuación. El primero está asociado a la dependencia de la velocidad de propagación en función de su frecuencia y el segundo a la disipación de la energía de la onda en el medio. Cuando la velocidad de una onda no depende de la frecuencia de propagación, se dice que el medio es no dispersivo. En cambio, si lo contrario ocurre, se dice que el material si presenta esta característica, y las ondas con diferentes frecuencias se propagan con diferentes velocidades. En este trabajo se considerará el caso de materiales no dispersivos.

La transmisión de ondas ultrasónicas para analizar características de materiales (Krautkramer (1983)) es una técnica no destructiva muy utilizada. Una onda puede pensarse como el movimiento simultaneo de un número infinito de partículas o pequeñas masas, cada una comportándose como la masa en un oscilador simple. Cada elemento interactúa con otro elemento mediante fuerzas elásticas y viscosas, de una manera determinada por las propiedades del medio y su contorno. Se debe distinguir cuidadosamente entre la velocidad de una partícula, que se designará con v , y la velocidad de la onda que se mueve a través del medio, que se denomina como c . La función de onda entonces involucrará tanto a x , una posición dentro del material, como el tiempo t . La función requerida, al menos para pequeñas amplitudes con fuerzas lineales de rigidez y amortiguación, puede ser cualquier relación en la que x y t se combinan en la forma $(x-ct)$.

La propagación de un caso muy simple de onda plana, puede expresarse por la ecuación:

$$u(x, t) = A \cos(\omega / c(x - ct)) \quad (1)$$

donde $\omega=2\pi f$ es la frecuencia angular, f es la frecuencia de oscilación y la velocidad de propagación $c=Lf$, queda definida a través de la longitud de onda L . Esta solución refleja la propagación de una onda continua de frecuencia única (propagación armónica) que se mueve a lo largo del material. Se denominan ondas P o longitudinales aquellas en que las partículas del medio vibran en la misma dirección de propagación de la onda.

Estas ondas sonoras de alta frecuencia contienen información útil para discriminar y cuantificar algunas propiedades físicas, mecánicas, estructurales o composicionales de sólidos y líquidos. Así, los cambios en uno o más de los cuatro parámetros medibles que se asocian con el pasaje de una onda sonora de alta frecuencia por un material—tiempo de tránsito, atenuación, dispersión, y contenido de frecuencias—pueden, en principio, correlacionarse con las propiedades físicas tales como la dureza, módulo elástico, densidad, homogeneidad, o estructura. La relación general entre la velocidad del sonido en un sólido, c , y su densidad, ρ , y sus constantes elásticas, s_{ij} , está dada por

la siguiente ecuación $c=(S_{ij}r)^{1/2}$. Esta ecuación toma distintas formas de acuerdo al tipo de onda (longitudinal o transversal), y la constante elástica utilizada. Los subíndices ij tienen relevancia cuando el comportamiento del material es distinto según sea la dirección de la onda de ultrasonido; en el caso contrario, se dice que el material es isotrópico. Las constantes elásticas de un material son:

- Módulo de Young, E : constante de proporcionalidad entre el esfuerzo y la deformación a lo largo de un mismo eje, en un material sometido a tensión o compresión.
- Constante de Poisson, ν : cociente entre el esfuerzo radial y el axial.
- Módulo de Bulk, K : medida de la incompresibilidad de un cuerpo sujeto a presión hidrostática.
- Constantes de Lamé, λ y G , constantes derivadas del módulo de Young y la constante de Poisson.

2 FORMULACIÓN MATEMÁTICA PARA LA PROPAGACIÓN DE SEÑALES DE ULTRASONIDO EN UN SÓLIDO

La ecuación que describe la dinámica de la transmisión de una onda longitudinal en un sólido elástico isotrópico, $u(x,t)$, a lo largo de la dirección x y para todo tiempo t , toma la forma de una ecuación en derivadas parciales:

$$(I + 2G) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (2)$$

donde ρ es la densidad del material. En un material homogéneo, los parámetros de esta ecuación son constantes. Se los agrupa normalmente, de la siguiente forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (3)$$

Es fácil probar que la relación (1) es solución de la ecuación de onda (3). La ecuación diferencial toma la misma forma si se modelara la presión del sonido o la velocidad de la partícula.

Cuando el medio atenúa la amplitud de la onda plana a medida que se propaga por el material, la expresión (1) debe modificarse y una forma adecuada para representarla es entonces:

$$u(x,t) = Ae^{-\mathbf{a}x} \cos(\mathbf{w}/c(x - ct)) \quad (4)$$

También se utiliza a veces una forma equivalente para representar la propagación de ondas mecánicas que puede ser más conveniente desde un punto de vista matemático y consiste en utilizar una exponencial compleja. En ese caso, se formula la siguiente expresión:

$$u(x,t) = Ae^{-\mathbf{a}x} e^{j(\mathbf{w}t - kx)} \quad (5)$$

Las dos cantidades fundamentales para las mediciones ultrasónicas son la velocidad del sonido c y el coeficiente de atenuación \mathbf{a} . Cada una de ellas es una manifestación macroscópica de una o más propiedades básicas de la materia. La reacción de un medio a compresiones periódicas, deformaciones o esfuerzos producidos por una onda de sonido, es característica del estado físico del medio. Ambas cantidades pueden combinarse dando una única constante de propagación compleja $k^* = \mathbf{w}/c - j\mathbf{a}$, y entonces la ecuación (5) se rescribe como:

$$u(x, t) = A e^{j(\omega t - k^* x)} \quad (6)$$

Otra representación utiliza la velocidad y el módulo complejo, $c^* = \omega / k^*$, $Y = \rho c^*$. La mayoría de las ondas necesitarán una representación más general que la forma de la ecuación (6). Si el medio no es infinito, deberá al menos considerarse una expresión como la ecuación (7)

$$u_x(x, t) = A e^{j(\omega t - kx)} + B e^{j(-\omega t - kx)}, \quad (7)$$

donde el primer término corresponde a una onda propagándose en el sentido positivo de las x y el segundo a una onda que se propaga en sentido contrario. A y B son las amplitudes correspondientes a las ondas incidente y reflejada.

2.1. Relación entre impedancia acústica y la transmisión de ondas planas

El concepto de impedancia acústica se define como una analogía al de impedancia eléctrica o su equivalente impedancia mecánica y es útil en el análisis de sistemas concentrados. La impedancia acústica Z , denominada impedancia acústica específica, es la relación entre el esfuerzo aplicado a un material sólido, T , o la presión en un líquido y la velocidad de la partícula, v :

$$Z = \frac{T}{v}. \quad (8)$$

Z puede ser un número complejo. Para una onda plana que se propaga por un material infinito, Z será un número real y se la define como la impedancia característica de un medio:

$$Z_0 = \rho c \quad (9)$$

Por ejemplo, para el aire a temperatura ambiente y a presión correspondiente al nivel del mar es $Z_0 = 420 \text{ kg /seg/ m}^2$, para el agua es $1.48 \cdot 10^6$, para el acrílico es $3.235 \cdot 10^6$ y para el aluminio $17.334 \cdot 10^6 \text{ kg /seg/ m}^2$.

Para una onda plana que se propaga por una muestra finita de material, Z será complejo y resulta de las condiciones de borde impuestas a la muestra. La ecuación (7) corresponde al caso en que dos ondas se propagan en un material en sentidos contrarios. La reflexión de una onda ultrasónica ocurre cuando existe una interface entre dos medios de diferente impedancia acústica. La interface transductor-muestra es una superficie plana que frecuentemente involucra dos o más impedancias diferentes. Estas diferencias producen un corrimiento en la fase de la onda reflejada bajo condiciones específicas.

2.2 Circuito mecánico equivalente

La impedancia acústica específica como se definió en la ecuación (8) es un número complejo, y por lo tanto puede expresarse como:

$$Z = R(\omega) + jX(\omega). \quad (10)$$

Es posible relacionar la impedancia acústica específica con la impedancia mecánica de un sistema simple representado por un amortiguador R_m conectado en paralelo a un resorte con constante

elástica K , y éstos en serie con una masa M como se muestra en la Figura 1 (Huerter y Bolt , 1965)).

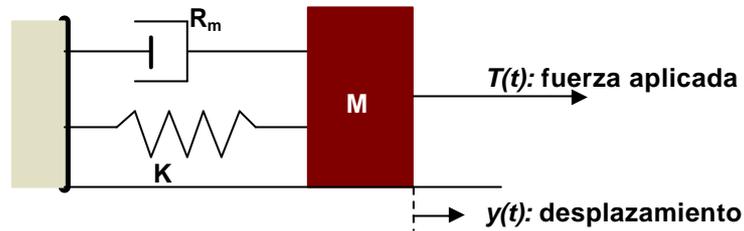


Figura 1: Modelo mecánico equivalente.

Cuando se aplica al sistema una fuerza oscilatoria de frecuencia ω , el desplazamiento y la velocidad $v(t)$ resultante de la masa serán también armónicos de la misma frecuencia con una amplitud y fase que depende de su impedancia, la que en este caso está dada por la conocida expresión:

$$Z_m = R_m + j(\omega M - K / \omega). \quad (11)$$

Este sistema es una analogía útil para realizar interpretaciones desde el punto de vista macroscópico. Esta representación es la de un sistema lineal e invariante, y por consiguiente se sabe que la relación entre la entrada y la salida está dada por la integral de convolución:

$$v(t) = \int_0^t h(t-\tau) \cdot T(\tau) d\tau \quad (12)$$

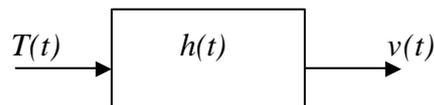


Figura 2: Sistema lineal e invariante

Las propiedades del sistema se pueden determinar identificando la respuesta al impulso, $h(t)$, a partir del conocimiento de la entrada aplicada y la respuesta medida. Para el sistema básico de la Figura 1, la respuesta al impulso tiene una forma explícita dada por:

$$h(t) = \frac{1}{M} e^{-at} \cos \omega_f t - \frac{a}{M \omega_f} e^{-at} \sin \omega_f t, \quad t \geq 0 \quad (13)$$

siendo,

$$a = \frac{R_m}{2M} \quad \text{y} \quad b = \frac{K}{M} \quad (14.a)$$

La frecuencia natural de este sistema es

$$\omega_f = \sqrt{b - a^2}. \quad (14.b)$$

Si el material no es homogéneo y tiene características tales que pueda aproximarse por una distribución de distintas capas homogéneas, entonces el sistema equivalente es más complejo; podría representarse por una conexión serie de sistemas simples. Por ejemplo, para una muestra consistente de 2 capas como las de la Figura 3, el esquema sería el de la Figura 4.

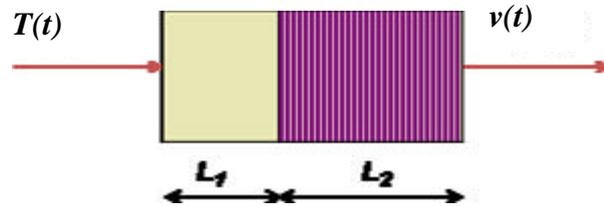


Figura 3: Esquema de un material formado por dos capas homogéneas

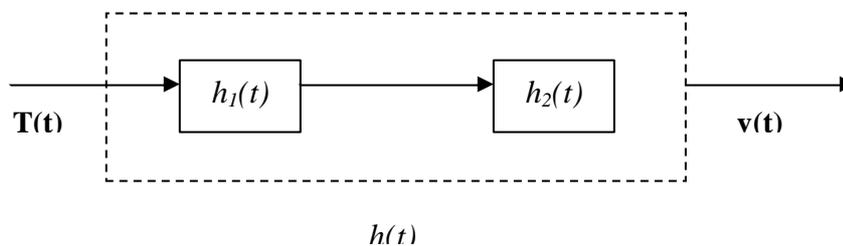


Figura 4: Modelo para la relación dinámica esfuerzo-velocidad para un material de dos capas

3 METODOLOGÍA Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA INVERSO.

La metodología propuesta consiste en transmitir una onda y registrar la forma de onda completa luego de propagarse a través de la muestra. Se utiliza un transmisor separado del receptor. El esquema de medición se muestra en la Figura 5. La atenuación y la velocidad dependen de la frecuencia y de las constantes elásticas de las capas por las que la onda viaja. Estos parámetros se combinan a través de las distintas capas del material y generan la forma de onda que debe procesarse en un esquema inverso. De acuerdo a las características del material deberá elegirse un pulso adecuado que contenga un amplio rango de frecuencias y una potencia alta de penetración. Se propone realizar una medición con ondas tipo P transmitidas a través de la muestra y registradas para su análisis, similarmente a lo propuesto en la bibliografía (Fellah (2007), Rus y García Martínez (2007), Kallel y Bertrand (1996)).



Figura 5: Esquema de medición

En este trabajo se simulan mediciones con 2 tipos de pulsos de entrada diferentes, los que se muestran en la Figura 6. Se consideran solamente los casos más sencillos de un material homogéneo, y uno compuesto por dos capas. Se utiliza la representación aproximada de circuitos mecánicos equivalentes descrita en la sección anterior.

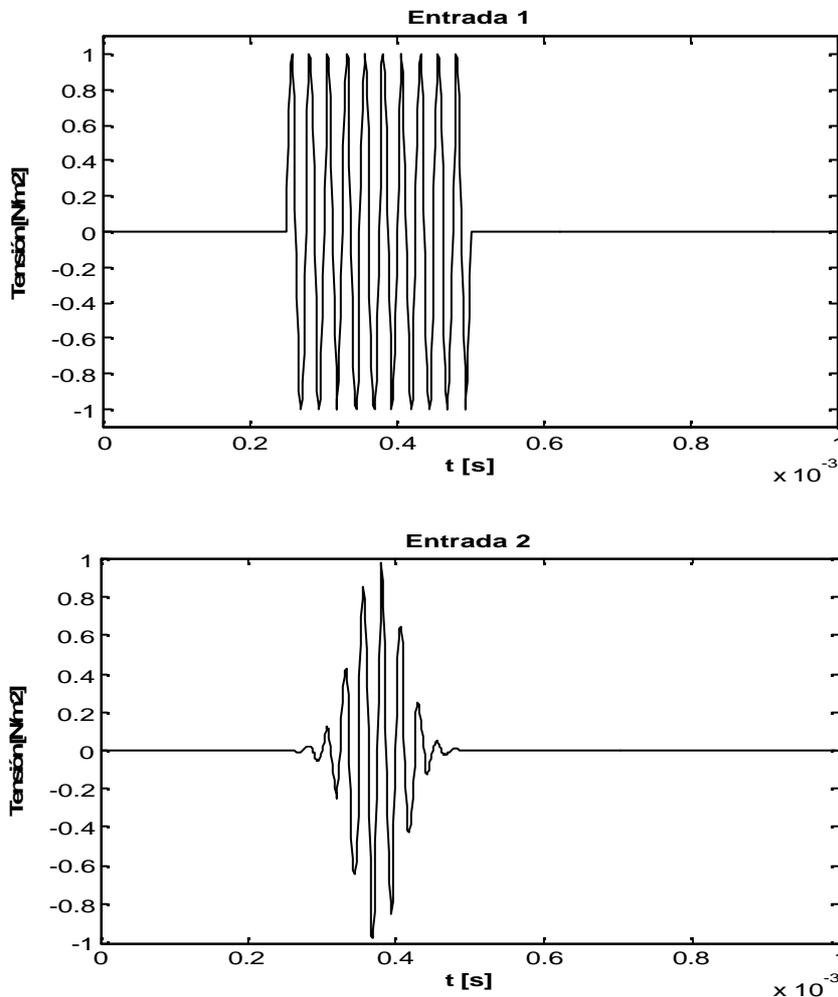


Figura 6: Pulsos de entrada para la simulación de mediciones de propagación

El problema se formula como un problema inverso, en el que las incógnitas son un conjunto reducido de parámetros que describen el sistema. El modelo matemático descrito por las ecuaciones (12) y (13) es simulado para predecir la transformación de la forma de onda y compararla con las mediciones. Por ejemplo, la forma del pulso propagado correspondiente a cada una de las entradas aplicadas se muestra en la Figura 7.

La estimación de $h(t)$ puede hacerse en forma paramétrica o no paramétrica. En el primer caso, se supone que la forma verdadera de la respuesta al impulso sigue la forma explícita de la ecuación (13), es decir, se conoce la forma funcional de $h(t)$. Si esa hipótesis no fuese consistente con el caso en cuestión entonces debe estimarse $h(t)$ con forma libre; en ese caso debe tenerse en cuenta el hecho de que si los valores de $v(t)$ son medidos tendrán errores y el proceso de inversión puede producir una amplificación muy seria de los mismos por ser éste un problema mal condicionado (Hansen (1998)).

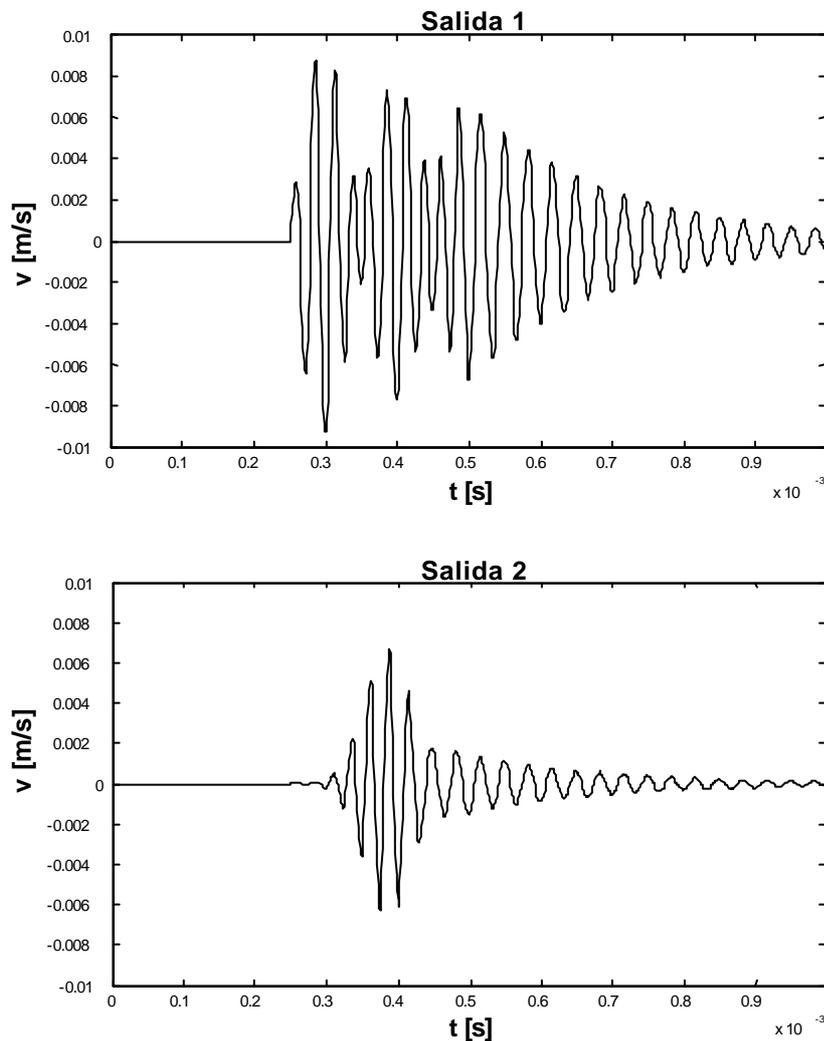


Figura 7: Ondas propagadas registradas en el receptor para una muestra de aluminio.

El valor de los parámetros que mejor describen el material es obtenido minimizando la siguiente función objetivo:

$$\text{Min } J(p) = \|v_p(t) - v_e(t)\|^2 \quad (15)$$

donde $v_p(t)$ representa la medición simulada de acuerdo al modelo matemático que tiene parámetros contenidos en el vector p , y $v_e(t)$ las mediciones dadas. La solución de este problema inverso de estimación de parámetros no lineal se resuelve aplicando el algoritmo de Levenberg-Marquardt. Este algoritmo es una técnica iterativa que localiza el mínimo de una función multivariada expresada como suma de funciones no lineales. Se ha convertido en la técnica estándar para la solución de mínimos cuadrados no-lineales y puede pensarse como una combinación de los métodos Steepest-Descent y Gauss-Newton. (Kelley (1999)), (Levenberg (1944)), (Marquardt (1963))

4 RESULTADOS

Se considera primeramente la caracterización de dos probetas, una de acrílico y otra de aluminio con admitancias ($Z^{-1} = G + jB$) como las que se muestran en los gráficos de la Figura 8.

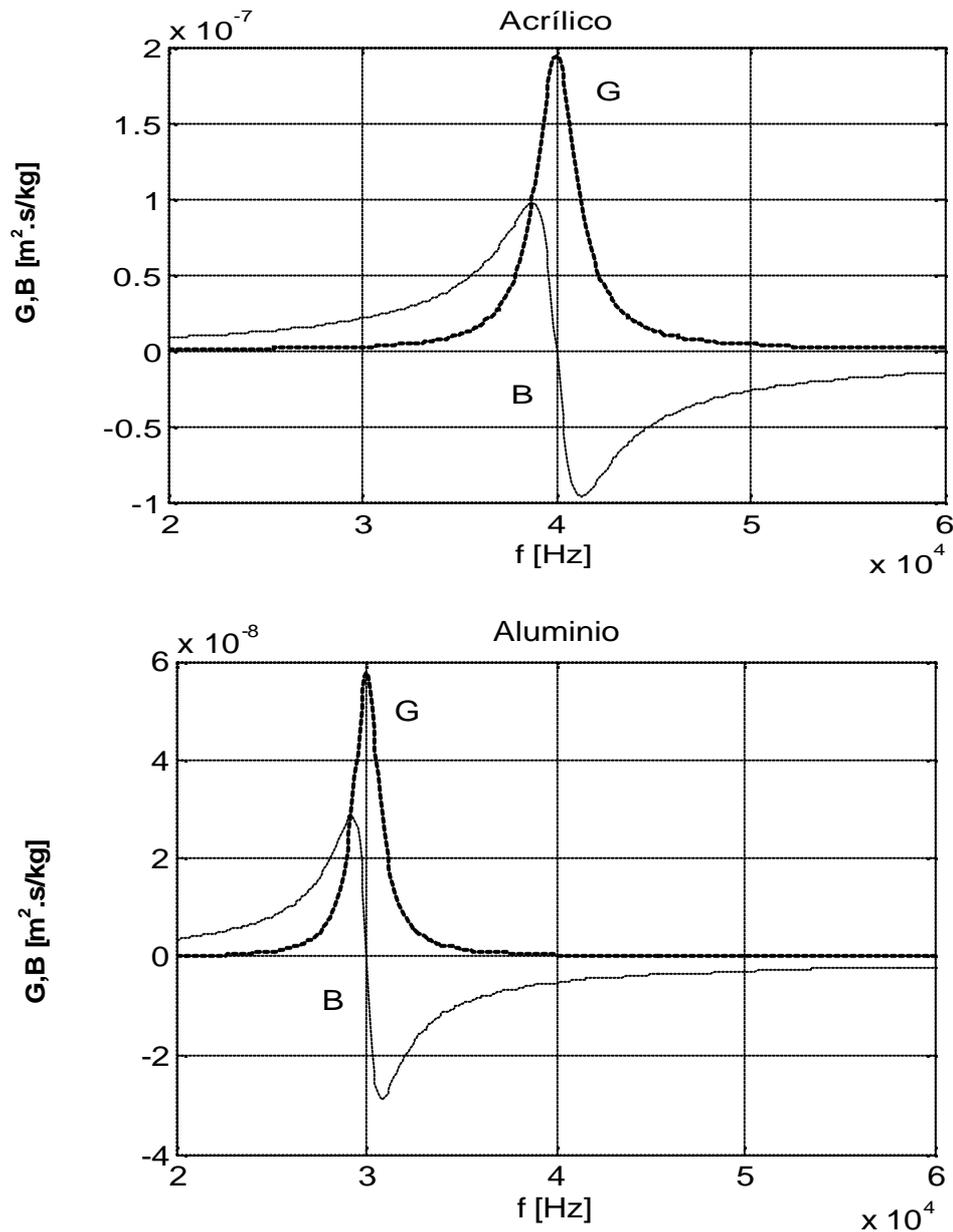


Figura 8: Admitancias correspondientes a muestras de acrílico y de aluminio.

Los parámetros a identificar son a y b definidos en las relaciones (14). Las mediciones se simulan adicionando al modelo ideal un ruido gaussiano de media nula y varianza 1 %. En las Tablas 1 y 2 se condensan algunos de los resultados obtenidos aplicando el algoritmo. Puede observarse que el proceso iterativo converge a buenas estimaciones aún partiendo de valores iniciales alejados de los valores reales. La última columna resume el rango de los errores de las estimaciones para una variedad mayor de condiciones iniciales.

El caso del material de dos capas es simulado para la señal denominada como entrada 1 y las mediciones se sintetizan convolucionando con las dos respuestas al impulso como se indica en el esquema de la Figura 4. Los datos se constituyen perturbando las mediciones ideales mostradas en la Figura 9. Con ellos se resuelve el problema de estimar los 4 parámetros obteniendo una convergencia adecuada a partir de todas las condiciones iniciales probadas. En la Tabla 3 se transcriben los resultados obtenidos solamente para una de las corridas realizadas.

| Señal de entrada | Parámetro | valor inicial | estimado | valor inicial | estimado | Rango del error (%) |
|------------------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| 1 | a | 9000 | 10038 | 5000 | 9981 | -0.2 : 0.4 |
| | b | $3.908 \cdot 10^{10}$ | $3.558 \cdot 10^8$ | $1.776 \cdot 10^{10}$ | $3.553 \cdot 10^{10}$ | 0.007: 0.0133 |
| 2 | a | 9000 | 9944 | 5000 | 9911 | -0.89 : 0.21 |
| | b | $3.908 \cdot 10^{10}$ | $3.554 \cdot 10^{10}$ | $1.776 \cdot 10^{10}$ | $3.553 \cdot 10^{10}$ | -0.015 : 0.033 |

Tabla 1 : Estimación de parámetros de la muestra de Aluminio ($\alpha= 10^4$ [1/s], $b= 3.553 \cdot 10^{10}$ [(rad/s)²])

| Señal de entrada | Parámetro | valor inicial | estimado | valor inicial | estimado | Rango del error (%) |
|------------------|-----------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|-----------------------|---------------------|
| 1 | a | 14400 | 16020 | 8000 | 16008 | 0.05 : 0.124 |
| | b | $6.948 \cdot 10^{10}$ | $6.316 \cdot 10^{10}$ | $1.776 \cdot 10^{10}$ | $6.316 \cdot 10^{10}$ | 0% |
| 2 | a | 14400 | 15965 | 8000 | 15946 | -0.34 : 0.05 |
| | b | $6.948 \cdot 10^{10}$ | $6.315 \cdot 10^{10}$ | $1.776 \cdot 10^{10}$ | $6.315 \cdot 10^{10}$ | -0.009 : 0.0035 |

Tabla 2 : Estimación de parámetros de la muestra de Acrílico ($\alpha= 1.6 \cdot 10^4$ [1/s], $b= 6.316 \cdot 10^{10}$ [(rad/s)²])

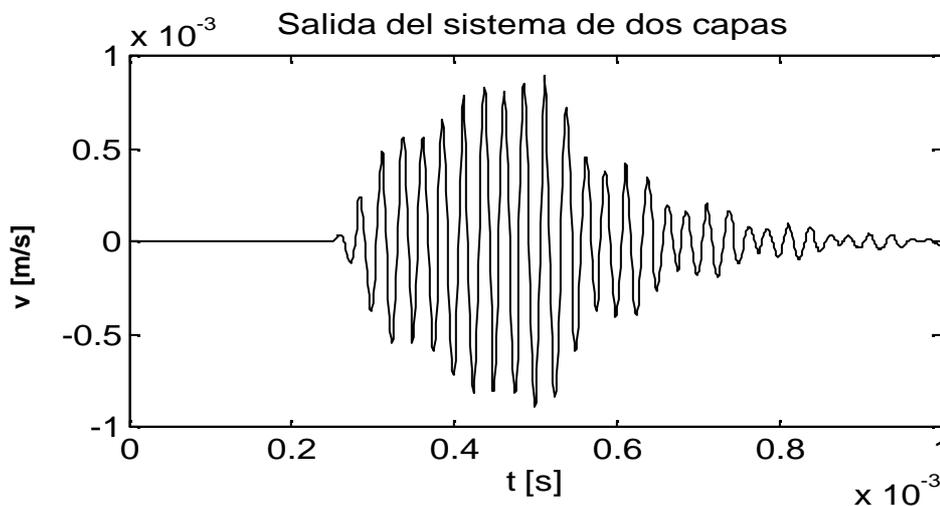


Figura 9: Simulación de la onda transmitida a través del material de 2 capas excitado con la entrada 1.

| Señal de entrada | Parámetro | valor inicial | estimado | error (%) |
|------------------|-----------|-----------------|-----------------|-----------|
| 1 | a_1 | 12000 | 10037 | 0.37 |
| | b_1 | 2.842510^{10} | $3.551 10^{10}$ | -0.0467 |
| | a_2 | 19200 | 15998 | -0.0125 |
| | b_2 | 5.05310^{10} | $6.315 10^{10}$ | -0.015 |

Tabla 3 : Estimación de parámetros de la muestra del material de dos capas ($\alpha_1=10^4$ [1/s], $b_1=3.553 10^{10}$ [(rad/s)²], $\alpha_2=1.6 10^4$ [1/s], $b_2=6.316 10^{10}$ [(rad/s)²])

En los problemas de estimación paramétrica resueltos en este trabajo no se observan problemas de estabilidad por lo cual la formulación de mínimos cuadrados adoptada para la función costo de la ecuación (15) es adecuada y no es necesario agregar un término de regularización.

5 CONCLUSIONES

La estimación de los parámetros del modelo aproximado se resolvió satisfactoriamente a partir de simulaciones. Primero se realizaron simulaciones para cada material por separado, utilizando como entradas señales que pueden utilizarse en ensayos ultrasónicos. Luego se modeló una muestra formada por dos capas de material obteniéndose ahora cuatro parámetros, a_1 , b_1 , a_2 y b_2 . Los resultados muestran que los valores calculados de los parámetros convergen con buena aproximación a los reales aún cuando los valores iniciales sean bastante alejados.

Los parámetros del modelo aproximado utilizado en este trabajo, a y b , se relacionan con las características físicas del esquema mecánico planteado, como se define claramente en la ecuación (14.a). Sin embargo, el principal interés enunciado en la introducción consiste en vincular estos parámetros con la constante elástica del material. Esta relación es clara desde el punto de vista conceptual pero no se explicita trivialmente en una relación matemática. Los autovalores del modelo exacto del problema físico, dado por la ecuación (3) con las condiciones de contorno adecuadas, se vinculan con las frecuencias naturales de la muestra y dependen de la constante elástica del material y de su geometría. La frecuencia natural principal debe coincidir con la formulada en la ecuación (14.b). Se está actualmente implementando la simulación del modelo exacto. La comparación de los nuevos resultados con los ya obtenidos mediante el modelo de impedancia mecánica confirmará la factibilidad de estimar la constante elástica buscada.

REFERENCIAS

- Fellah, F.G. Mitri, M. Fellah, E. Ogam, C. Depollier, Ultrasonic characterization of porous absorbing materials: Inverse Problem, *Z.E.A. J. of Sound and Vibration* 302, 746-759(2007).
 Huerter, T. F. and R. H. Bolt Sonics. Techniques for the use of sound and Ultrasound in Engineering and Science. T. F., Wiley and Sons, Inc. New York, 1965.
 Hansen, P. C., Rank-Deficient and Discrete Ill-Posed Problems. Numerical Aspects of Linear Inversion, Siam, Philadelphia (1998).

- Kallel F and Bertrand M , Tissue elasticity reconstruction using linear perturbation method *IEEE Trans. Med. Imaging* 15 299–313(1996).
- Krautkramer, J., H., Ultrasonic Testing of Materials, Berlin, Heidelberg, N.Y. (1983).
- Rus,G. and J. García-Martínez, Ultrasonic tissue characterization for monitoring nanostructured TiO₂- induced bone growth, *Phys. Med. Biol.* 52 3531-3547 (2007)
- C.T. Kelley. Iterative Methods for Optimization. SIAM Press, Philadelphia, 1999.
- K. Levenberg. A Method for the Solution of Certain Non-linear Problems in Least Squares. *Quarterly of Applied Mathematics*, [WINDOWS-1252?] 2(2):164–168, Jul 1944.
- D.W. Marquardt. An Algorithm for the Least-Squares Estimation of Nonlinear Parameters. *SIAM Journal of Applied Mathematics*, [WINDOWS-1252?]11(2):431–441, Jun 1963.