

## TÉCNICAS DE ESTIMACIÓN APLICADAS AL FLUJO AGUA PETRÓLEO

María de los A. Morelli<sup>a,b</sup>, Gabriela B. Savioli<sup>a</sup> and Elena M. Fernández Berdaguer<sup>b,c</sup>

<sup>a</sup>Laboratorio de Ingeniería de Reservorios – IGPUBA y Dto. de Ingeniería Química, Facultad de Ingeniería Universidad de Buenos Aires, Av. Las Heras 2214, 3°P, 1127 Ciudad Autónoma de Buenos Aires, Argentina, [mmorelli@fi.uba.ar](mailto:mmorelli@fi.uba.ar)

<sup>b</sup>CONICET

<sup>c</sup>Instituto de Cálculo, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, UBA, Pab. II, Ciudad Universitaria, 1428 Ciudad Autónoma de Buenos Aires Argentina, [efernan@ic.fcen.uba.ar](mailto:efernan@ic.fcen.uba.ar)

**Palabras Clave:** estimación de funciones, problema inverso, flujo fraccional.

**Resumen.** En este trabajo se compara el comportamiento de dos metodologías diferentes en la estimación de funciones: una formulación tradicional, que requiere un modelo preestablecido de la función buscada y una nueva metodología, formulada en espacios funcionales, que prescinde de los modelos. Para llevar a cabo esta comparación se generaron mediciones sintéticas usando distintos modelos de curvas de permeabilidad relativa dos de la bibliografía. Se aplican ambas metodologías y se compara su comportamiento, cuando el modelo seleccionado en la opción tradicional no es el más adecuado. Se concluye que la nueva metodología logra reproducir la curva exacta que generó los datos sintéticos, mientras que el método tradicional no siempre logra buenos ajustes.

## 1 INTRODUCCIÓN

Para predecir el comportamiento de procesos de recuperación secundaria mediante la inundación con agua en reservorios petrolíferos es indispensable conocer las curvas de permeabilidades relativas. Estas curvas se determinan a partir de datos medidos en el laboratorio durante un ensayo de desplazamiento de petróleo por agua. Tradicionalmente, durante estos ensayos se miden caudales de agua inyectada, caudales de petróleo y agua extraídos y presiones a la entrada y a la salida del testigo de roca. En la actualidad es posible también medir saturaciones y presiones de ambas fases en distintos puntos del medio poroso en función del tiempo, con técnicas más sofisticadas como tomografía computada, rayos gamma o resonancia magnético nuclear (Chardaire-Riviere, 1992; Mejía et al, 1995). Las permeabilidades relativas son una medida de la conductancia del medio poroso para cada fase fluida. Empíricamente, se conoce que la permeabilidad relativa a un fluido es función de la saturación de ese fluido, de la dirección del desplazamiento, de las características de la mojabilidad de la roca y de la distribución del tamaño de poros.

Este trabajo trata sobre la estimación del flujo fraccional de petróleo, que depende de las permeabilidades relativas.

Para modelar el flujo bifásico en un medio poroso se utiliza un modelo simplificado conocido como el de Buckley-Leverett. Este modelo consiste en una ecuación hiperbólica de primer orden con condiciones iniciales, cuya incógnita es la saturación de petróleo  $S$ . En la ecuación de Buckley-Leverett aparece como coeficiente el flujo fraccional función de la saturación:  $f(S)$ . De este modo el modelo directo resulta no lineal.

La forma tradicional de estimar  $f$  requiere una representación funcional de  $f$  en términos de un número finito de parámetros escalares. Para obtener dichos parámetros se minimizan los residuos mediante una técnica de optimización en el espacio euclídeo cuya dimensión es el número de parámetros del modelo de  $f$  (Chardaire-Riviere et al, 1992; Savioli y Bidner, 1995). Por lo tanto, la curva óptima depende del modelo elegido. Una nueva alternativa es formular el problema inverso en espacios funcionales, prescindiendo de un modelo preestablecido (Savioli and Fernández Berdager, 2007, 2008).

El objetivo de este trabajo es comparar la calidad de la estimación de las dos metodologías descriptas: la tradicional y la formulada en espacios funcionales. Para llevar a cabo esta comparación se generan mediciones sintéticas usando distintos modelos de curvas de permeabilidad relativa tomados de la bibliografía, por ejemplo, el modelo potencial (Lake, 1989), el modelo exponencial de Chierici (1984) y la correlación propuesta por Honarpour et al. (1986). Se aplican ambas metodologías y se compara su comportamiento, especialmente en el caso en que el modelo seleccionado en la opción tradicional no sea el más adecuado.

## 2 EL PROBLEMA DIRECTO

Las curvas de permeabilidades relativas  $k_{ro}$  y  $k_{rw}$  aparecen como coeficientes del sistema de ecuaciones que rige el flujo bifásico agua-petróleo a través de un medio poroso. El modelo general consiste en un sistema acoplado de dos ecuaciones no-lineales: una ecuación elíptica y una parabólica con condiciones iniciales y de contorno.

Cuando se modela el desplazamiento de petróleo por agua, se pueden desestimar los términos capilares y entonces, la ecuación parabólica degenera en una ecuación hiperbólica, obteniéndose el siguiente sistema de ecuaciones en las incógnitas  $S$  (saturación de petróleo) y  $p$  (presión de petróleo),

$$\phi \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial f(S(x,t))}{\partial x} = 0 \quad (1)$$

$$x \in (0, L), t \in (0, T]$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_T(S(x,t)) \frac{\partial P(x,t)}{\partial x} \right) = 0, \quad (2)$$

donde  $f(S) = \frac{Q_{wi}}{\phi A L} \left( \left( 1 + \frac{k_{rw}(S) \mu_o}{k_{ro}(S) \mu_w} \right)^{-1} \right)$  y  $\lambda_T(S) = K A \left( \frac{k_{rw}(S)}{\mu_w} + \frac{k_{ro}(S)}{\mu_o} \right)$ ,  $Q_{wi}$  es el caudal de

inyección;  $A$  el área transversal al flujo y  $L$  la longitud del testigo de roca;  $\phi$  y  $K$  son la porosidad y la permeabilidad absoluta del medio poroso;  $\mu_o$  y  $\mu_w$  las viscosidades del petróleo y del agua respectivamente. El sistema (1)-(2) se completa con condiciones iniciales para la ecuación hiperbólica y condiciones de contorno para la ecuación elíptica.

El objetivo final es estimar las curvas de permeabilidades relativas  $k_{ro}$  y  $k_{rw}$ . Como  $f(S)$  y  $\lambda_T(S)$  dependen de  $k_{ro}$  y  $k_{rw}$ , se estiman  $f(S)$  y  $\lambda_T(S)$  y luego se obtienen las permeabilidades relativas. En el método, primero se determina el flujo fraccional a partir de la ecuación en saturación y luego la movilidad total a partir de la ecuación en presión. La ecuación en presión no presenta mayores dificultades, ya que su solución es lineal en términos de la inversa de la movilidad total. Por lo tanto en este trabajo nos centraremos en la estimación del flujo fraccional a partir de la ecuación en saturación, que es conocida como la ecuación de Buckley-Leverett. Así, el modelo directo se reduce a

$$\phi \frac{\partial S(x,t)}{\partial t} + H(S) \frac{\partial S(x,t)}{\partial x} = 0, \quad S(x,0) = g(x) \quad (3)$$

donde  $H(S) = f'(S)$ . Haciendo las suposiciones  $H \in C^\infty[0,1]$ ,  $g \in C^1[0,L]$ , el modelo directo resulta bien planteado, como lo establece la proposición 2.1.1 en el libro de Serre (1999). Nótese que el coeficiente  $H(S)$  es función de la solución de la ecuación diferencial, por lo que estamos en presencia de un problema no lineal.

### 3 EL PROBLEMA INVERSO

Nuestro objetivo es estimar la derivada del flujo fraccional de petróleo,  $H(S)$ , a partir de mediciones de saturación obtenidas durante un ensayo de desplazamiento de petróleo por agua realizado en el laboratorio sobre un testigo de roca. Las mediciones,  $S^{obs}(t)$ , se realizan en un punto de registro del testigo,  $x^{rec}$ , durante un período de tiempo  $[0, T]$ .

El problema de estimar una función es claramente diferente al de determinar valores constantes. Existen varios enfoques para abordar la estimación de funciones.

El enfoque tradicional consiste en proponer un modelo para esta función (basado en consideraciones teóricas o empíricas) que depende de una cantidad finita de parámetros escalares. Para obtener dichos parámetros se aplica una técnica de mínimos cuadrados a las diferencias entre los datos medidos y los calculados usando el modelo directo. Debido a que el número de parámetros es finito, la minimización se lleva a cabo en el espacio euclídeo, cuya dimensión es el número de parámetros del modelo. En este caso, la curva óptima depende del modelo elegido.

Una metodología alternativa formula el problema inverso en espacios funcionales, prescindiendo de un modelo preestablecido.

En este trabajo comparamos la técnica tradicional con la nueva metodología. A continuación se describen ambos enfoques.

### 3.1 Procedimiento tradicional

El procedimiento para calcular los parámetros consiste en dar una representación funcional de la curva  $H(S)$ , expresada en términos de un conjunto finito de parámetros escalares. Usando esta  $H$  se calcula la solución del problema directo (3): la saturación  $S$ . A continuación se evalúa la diferencia entre los valores así obtenidos con los de las mediciones. Finalmente se obtienen los parámetros buscados minimizando dicha diferencia por medio de técnicas de cuadrados mínimos. En este trabajo se aplica el método de Levenberg-Marquardt.

A continuación mostramos algunos de los modelos más conocidos de curvas de permeabilidades relativas. El modelo correspondiente a la función  $H$  se obtiene derivando

$$f(S) = \frac{Q_{wi}}{\phi AL} \left( \left( 1 + \frac{k_{rw}(S) \mu_o}{k_{ro}(S) \mu_w} \right)^{-1} \right).$$

#### *Modelos potenciales de permeabilidades relativas*

Para flujo agua-petróleo, en un proceso de imbibición, las siguientes funciones potenciales son ampliamente aceptadas (Lake, 1989)

$$k_{rw} = k_{rw}^* \left[ \frac{S_w - S_{wc}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right]^{n_w} \quad (4)$$

$$k_{ro} = k_{ro}^* \left[ \frac{1 - S_w - S_{or}}{1 - S_{wc} - S_{or}} \right]^{n_o} \quad (5)$$

donde  $S_{wc}$  es la saturación de agua connata y  $S_{or}$  es la saturación de petróleo residual, datos que se suponen conocidos.

Los escalares  $k_{rw}^*$  y  $k_{ro}^*$  son los puntos extremos de las curvas, están determinados por la mojabilidad de la roca y se obtienen experimentalmente. Las ecuaciones (4) y (5) tienen cada una dos parámetros: los exponentes  $n_w$  y  $n_o$ , estos fijan la curvatura influenciada por la distribución del tamaño de poros.

#### *Modelos exponenciales de permeabilidades relativas*

Chierici (1984) propone los siguientes modelos exponenciales de curvas de permeabilidades relativas, ya que con ellos se logra un mejor ajuste a los datos experimentales, especialmente en los extremos inicial y final de las curvas (Barroeta and Thompson, 2006),

$$k_{rw} = k_{rw}^* e^{-B R^{-M}} \quad (6)$$

$$k_{ro} = k_{ro}^* e^{-A R^L} \quad (7)$$

$$\text{donde } R = \frac{1 - S - S_{wc}}{S - S_{or}}.$$

### La correlación de Honarpour

Honarpour et al (1986) presentan un conjunto de ecuaciones para la predicción de permeabilidades relativas según el tipo de roca: areniscas y calizas. Sus correlaciones se basan en numerosos datos experimentales provenientes de reservorios de Alaska, Argentina, Canadá, Irán, Libia, Emiratos Árabes y Estados Unidos. Para un sistema agua-petróleo y areniscas mojadas por agua, las ecuaciones son:

$$k_{rw} = 0.035388 \left( \frac{1-S-S_{wc}}{1-S_{or}-S_{wc}} \right) - 0.010874 \left( \frac{1-S-S_{or}}{1-S_{or}-S_{wc}} \right)^{2.9} + 0.56556(1-S)^{3.6}(1-S-S_{wc}) \quad (8)$$

$$k_{ro} = 0.76067 \left( \frac{\frac{S}{1-S_{wc}} - S_{or}}{1-S_{or}} \right)^{1.8} \left( \frac{S-S_{or}}{1-S_{or}-S_{wc}} \right)^2 + 2.6318 \phi (1-S_{or})(S-S_{or}) \quad (9)$$

Como datos de entrada a las correlaciones (8) y (9) se deben conocer la saturación de agua connata  $S_{wc}$ , la saturación de petróleo residual  $S_{or}$  y la porosidad  $\phi$ .

### 3.2 Estimación en espacios de funciones

La solución del problema directo, ecuación (3), depende de la función  $H$ ; usamos la notación  $S(H)$ . Consideremos entonces la función que vincula el espacio de parámetros con el espacio de observaciones:

$$\begin{aligned} S &: C^\infty[0,1] \rightarrow C^1[0,T] \\ S &: H \rightarrow S(H)(x^{rec}, t) \end{aligned} \quad (10)$$

El problema inverso consiste en encontrar  $H$  tal que

$$S(H)(x^{rec}, t) \approx S^{obs}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (11)$$

El método alternativo se basa en linealizar la función  $S(H)$ ,

$$S(H + \delta H) \approx S(H) + S'_H(H) \delta H, \quad (12)$$

donde  $S'_H(H)$  es la derivada con respecto a la función  $H$ , con lo cual es una derivada funcional, la derivada de Fréchet de la función  $S(H)$ . En Savioli and Fernández Berdaguer (2008) demostramos que  $S$  es derivable y que la derivada se calcula como:

$$(S'_H(H) \delta H)(x^{rec}, t) = [\omega (\delta H \circ S)](x^{rec}, t), \quad (13)$$

donde  $\omega$  es la solución de la ecuación de sensibilidad,

$$\omega_t + H(S)\omega_x + H'(S)S_x \omega = -S_x, \quad \omega(x, 0) = 0. \quad (14)$$

Basados en la linealización, de la ecuación (10) desarrollamos un algoritmo iterativo para estimar  $H$ :

1. Dar una estimación inicial  $H^0$  de  $H$ ,  $k = 0$
2. Calcular  $\delta H$  resolviendo

$$\left(S(H^k) + S'_H(H^k)\delta H\right)(x^{rec}, t) = S^{obs}(t) \quad (15)$$

3. Actualizar  $H$

$$H^{k+1} = H^k + \delta H \quad (16)$$

4. Calcular *residuo*,

Si *residuo* < TOL  $\rightarrow H^{k+1}$  es la solución aproximada . STOP

Si no,  $k = k + 1$ , volver a 2.

La implementación numérica de los pasos 2. y 3. dio origen a un algoritmo de tipo predictor corrector, que está descrito en detalle en Savioli and Fernández Berdaguer (2008). Se basa en expandir  $H$  en una base de splines de primer orden, que se actualiza en cada iteración. La demostración de la convergencia del algoritmo también puede encontrarse en dicha publicación.

## 4 EXPERIMENTOS NUMÉRICOS

Para ilustrar el comportamiento de ambas metodologías y comparar su desempeño se mostrarán dos ejemplos. En ambos se utilizan datos sintéticos y se estima la derivada del flujo fraccional  $H$  aplicando el procedimiento tradicional y la nueva metodología que estima en espacios de funciones.

### 4.1 Ejemplo 1

En el primer ejemplo las observaciones de saturación  $S^{obs}(t)$  se generan aplicando el modelo exponencial para la función  $H$ . Los valores de los parámetros fueron tomados del trabajo de Barroeta and Thompson, 2006, (Ejemplo JA3R):  $k_{rw}^* = 0.341$ ,  $k_{ro}^* = 0.925$ ,  $\mu_w = 0.88$  cp,  $\mu_o = 113.23$  cp,  $A = 0.73$ ;  $B = 2.48$ ;  $L = 0.83$ ;  $M = 0.74$ . La saturación de agua connata y la saturación de petróleo residual se consideraron nulas. No se añaden errores de medición a los datos generados.

Se aplica el procedimiento tradicional usando el modelo potencial para estimar la función  $H$ . Los puntos extremos de las curvas de permeabilidades relativas,  $k_{rw}^*$  y  $k_{ro}^*$ , se consideran conocidos, ya que fueron medidos experimentalmente. Por lo tanto, los parámetros a determinar son únicamente los exponentes de las curvas,  $n_w$  y  $n_o$ . En la Figura 1 se muestra con rojo la curva exacta del modelo exponencial y con verde el ajuste obtenido con el modelo potencial. Los valores óptimos de los parámetros son  $n_o = 2.2909$  y  $n_w = 4.0770$ . En realidad se eligió esta solución entre otros mínimos locales que se obtuvieron partiendo de distintos puntos iniciales, pues es la que proporciona el menor valor del residuo. El ajuste es muy bueno, aunque las curvas difieren en los extremos del intervalo.

También se aplica la estimación en espacios de funciones. Con este procedimiento se calcula el valor de la función  $H$  para cada uno de los puntos observados, es decir,  $H(S^{obs})$ . Se grafican con círculos negros en la Figura 1. Se puede observar que prácticamente coinciden con la curva exacta.

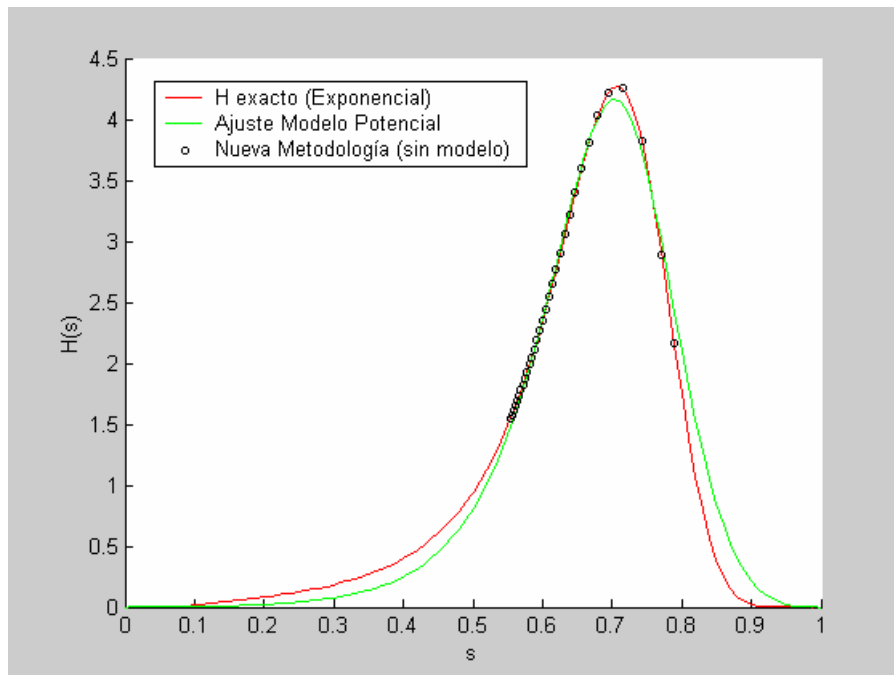


Figura 1: Ejemplo 1- Ajuste con el procedimiento tradicional (modelo potencial) y con la nueva metodología de estimación en espacios funcionales

## 4.2 Ejemplo 2

En el segundo ejemplo las observaciones de saturación  $S^{obs}(t)$  se generan aplicando la correlación de Honarpour para la función  $H$ . La saturación de agua connata y la saturación de petróleo residual se consideraron nulas. No se añaden errores de medición a los datos generados.

Se aplica el procedimiento tradicional usando el modelo potencial y también el modelo exponencial para estimar la función  $H$ . Los puntos extremos de las curvas de permeabilidades relativas se consideran conocidos. Por lo tanto, los parámetros a determinar son los exponentes  $n_w$  y  $n_o$  en el modelo potencial y los valores  $A$ ,  $B$ ,  $L$  y  $M$  en el modelo exponencial. En la Figura 2 se muestra con rojo la curva exacta de la correlación de Honarpour, con azul el ajuste obtenido usando el modelo exponencial y con verde el ajuste obtenido con el modelo potencial. Los valores óptimos de los parámetros son  $A = 1.6908$ ;  $B = 2.5689$ ;  $L = 0.5534$ ;  $M = 0.5667$  para el modelo exponencial y  $n_o = 1.7996$  y  $n_w = 3.2296$  para el potencial. Nuevamente estas soluciones se eligen entre otros mínimos locales que se obtuvieron partiendo de distintos puntos iniciales. En este caso, usando los modelos exponencial y potencial no se logra un buen ajuste a la curva exacta de Honarpour.

En cambio, aplicando la estimación en espacios de funciones se logra un excelente ajuste a la curva original, como se muestra con los círculos negros en la Figura 2.

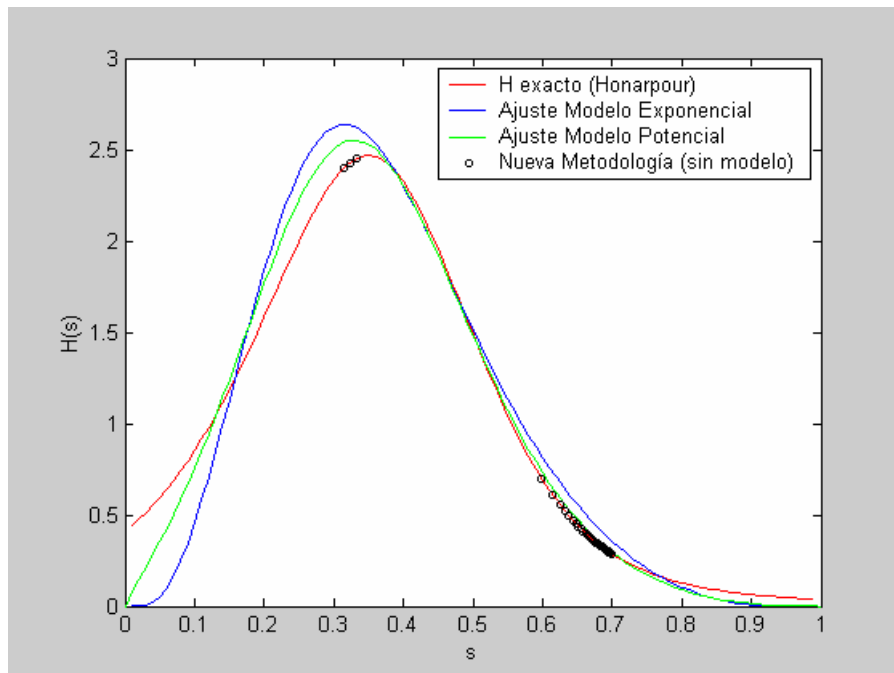


Figura 2: Ejemplo 2- Ajuste con el procedimiento tradicional (modelo exponencial y potencial) y con la nueva metodología de estimación en espacios funcionales

## 5 CONCLUSIONES

En este trabajo se analiza un problema de estimación no lineal: el parámetro buscado aparece como coeficiente de una ecuación diferencial hiperbólica y es función de la solución de la ecuación. La estimación se lleva a cabo aplicando una nueva metodología, formulada en espacios funcionales, que prescinde de un modelo a priori de la función. Su comportamiento se compara con la metodología tradicional. Los datos analizados son mediciones sintéticas generadas usando distintos modelos de curvas de permeabilidad relativa tomados de la bibliografía. La nueva metodología logra reproducir la curva exacta que generó los datos sintéticos, mientras que el método tradicional no siempre logra buenos ajustes. Además este último presenta problemas de no unicidad, ya que, dependiendo de los valores iniciales, converge a distintos mínimos locales de la función objetivo.

## 6 AGRADECIMIENTOS

Agradecemos al Lic. Oscar Zambrano por haber colaborado en las etapas iniciales de este trabajo.

## 7 REFERENCIAS

- Barroeta, R. G. and Thompson, L. G., Estimation of Relative Permeability From Displacement Pressure Data, *Society of Petroleum Engineers Paper N° 99734*, 2006.
- Bidner, M. S., *Propiedades de la roca y los fluidos en reservorios de petróleo*, EUDEBA, Argentina, 2001.



- Chardaire-Riviere, C., G. Chavent, J. Jaffre, J. Liu and B.J. Bourbiaux, Simultaneous Estimation of Relative Permeabilities and Capillary Pressure, *Society of Petroleum Engineers Formation Evaluation*, 7 (4): 283-289, 1992.
- Chierici, G.L., Novel Relations for Drainage and Imbibition Relative Permeabilities. *Society of Petroleum Engineers Journal*, 275-276, 1984.
- Honarpour, M., Koederitz, L. and Harvey, A., Relative Permeability of Petroleum Reservoirs, CRC Press, 1986.
- Lake, L.W., *Enhanced Oil Recovery*, Prentice-Hall, 1989.
- Mejía, G.M., K.K. Mohanty and A.T. Watson, Use of In Situ Saturation Data in Estimation of Two-Phase Functions in Porous Media, *Journal of Petroleum Science and Engineering*, 12: 233-245, 1995.
- Savioli, G. y Bidner, M. S. "Interpretación Automática de Ensayos de Flujo Bifásico en Medios Porosos", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería* 11(2):131-150, 1995.
- Savioli, G.B. and Fernández Berdaguer E.M., On the estimation of oil water displacement functions. *Latin American Applied Research*, 37:187-194, 2007.
- Savioli, G.B. and Fernández Berdaguer E.M., A prediction-correction algorithm to estimate the fractional flow function in oil-water models, *Journal of Physics, Conference Series* (electronic Journal), 2008.
- Serre, D., *Systems of Conservation Laws*, Cambridge University Press, 1999.