

## MODELO DE DAÑO DEPENDIENTE DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACION

**Mariela Luege, Bibiana Luccioni \*, Rodolfo Danesi \***

*Laboratorio de Estructuras, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología  
Universidad Nacional de Tucumán.*

*\*CONICET*

*Casilla de Correo 134, Correo Central, 4000 San Miguel de Tucumán, Argentina*

### RESUMEN

En el análisis de estructuras sometidas a acciones dinámicas de tipo impulsivo, como impacto o explosión, es necesario tener en cuenta la velocidad de deformación en los modelos constitutivos. Los estudios experimentales muestran que la resistencia, el endurecimiento o ablandamiento y la energía de fractura del material están significativamente influenciadas por la velocidad de deformación cuando ésta supera los  $0.1 \text{ s}^{-1}$ . Por otro lado, la incorporación de la dependencia del tiempo en los modelos constitutivos permite asegurar la unicidad y estabilidad de la solución en problemas dinámicos con ablandamiento.

Los modelos constitutivos dependientes de la velocidad de deformación que se encuentran en la literatura, están generalmente basados en la teoría de viscoplasticidad y no tienen en cuenta la degradación elástica. En el presente trabajo se propone un modelo en el que la dependencia de la velocidad es introducida en el daño utilizando una extensión del tipo de la viscoplasticidad de Perzyna.

En primer lugar se describe el modelo. Se desarrolla luego el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva y el módulo tangente consistente con dicho algoritmo. A continuación, se prueba la hiperbolicidad de las ecuaciones de movimiento lo que asegura que los problemas de valor inicial resulten siempre bien condicionados. El trabajo se completa con ejemplos de aplicación en elementos de hormigón bajo cargas impulsivas que muestran la validez del modelo propuesto.

### ABSTRACT

Rate dependence must be taken into account in the constitutive relations when used for the analysis of impact or blasting problems. Experimental studies show that the strength, the hardening/softening response of the material, and the fracture energy are significantly influenced by the strain rate when it exceeds  $0.1 \text{ s}^{-1}$ . On the other hand, rate dependency seems to be an elegant method to obtain uniqueness and stability of the solution for initial value problems with strain softening.

In the literature, rate dependent constitutive relations are often based on viscoplasticity and do not take into account elastic degradation. A rate dependent damage model, using an extension of the Perzyna's viscoplastic type, is presented in this paper

First, the model is described. Then the algorithm for the integration of the constitutive relations proposed and the resulting consistent tangent operator are presented. After that, partial differential equations of motion are proved to remain hyperbolic, assuring the initial-value problem to be well posed. Finally, different examples of concrete elements subjected to impact loads are presented to show the validity of the model.

### INTRODUCCION

Las cargas dinámicas asociadas con explosiones provocan velocidades de deformación en el material del orden de  $10^{-1}$  a  $10^3 \text{ s}^{-1}$ . En el hormigón dicho efecto genera sobrerresistencia, modificando la forma de la curva de endurecimiento o ablandamiento y la energía de fractura, cuando la velocidad de deformación supera  $0.1 \text{ s}^{-1}$  (Dubé

et al<sup>1</sup>, Bischoff<sup>2</sup>, Bruhwiler<sup>3</sup>). En particular, es la parte no lineal de la respuesta, cuando comienza la fisuración o la microfisuración, la que se modifica significativamente.

Para obtener una respuesta estructural correcta se debe simular la sobrerresistencia a nivel constitutivo. En la literatura, se pueden encontrar distintos modelos que tratan de captar dicho fenómeno. Los modelos constitutivos dependientes de la velocidad de deformación están generalmente basados en la teoría de plasticidad (Meyer et al.<sup>4</sup>), sin tener en cuenta la degradación elástica. Se han propuesto también algunos modelos en los que la dependencia de la velocidad es introducida en el daño. Entre ellos, merecen citarse los trabajos de Simo y Ju<sup>5, 6, 7</sup>, y Dubé y Pijaudier Cabot<sup>1</sup>. La mayoría de ellos se derivan a partir de modelos de daño independientes del tiempo con una extensión del tipo de la utilizada en la teoría viscoplástica de Perzyna<sup>8</sup>.

En el presente trabajo se desarrolla un modelo de daño escalar isótropo con una ley de evolución del daño del tipo de la deformación viscoplástica de Perzyna. Dicha ley de evolución del daño, incorpora la dependencia del tiempo en el modelo constitutivo y es una forma de asegurar la unicidad y estabilidad de la solución en problemas dinámicos con ablandamiento<sup>9, 10</sup>.

### MODELO PROPUESTO

Para problemas térmicamente estables, con variación temporal nula de la temperatura y pequeñas deformaciones, la energía libre puede escribirse como<sup>11</sup>:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}; d) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}; d) = \frac{1}{2m} [\varepsilon_{ij} C_{ijkl}^s(d) \varepsilon_{kl}] \quad (1)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformaciones que representa la variable libre del problema,  $d$  es la variable interna de daño,  $\Psi(\varepsilon_{ij}; d)$  es la energía libre,  $m$  es la densidad del material y  $C_{ijkl}^s(d)$  es el tensor constitutivo elástico secante que, según la teoría de Kachanov<sup>12</sup> de daño escalar puede expresarse como:

$$C_{ijkl}^s(d) = (1-d) C_{ijkl}^o \quad (2)$$

$C_{ijkl}^o$  : tensor secante inicial del material no dañado y:  $\begin{cases} d = 0 & \text{para el material no dañado} \\ d = 1 & \text{para el material totalmente dañado} \end{cases}$

La disipación mecánica  $\Xi_m$  resulta:

$$\Xi_m = -m \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (3)$$

La ley constitutiva secante total, satisface la desigualdad de Clasius-Planck. Luego, se deduce lo siguiente:

$$\sigma_{ij} = m \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}^e; d)}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad (4)$$

El criterio de daño se define como<sup>12</sup>:

$$G^d = \bar{\sigma}(\sigma_{ij}) - f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) \quad (5)$$

donde  $\bar{\sigma}(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente que puede calcularse usando funciones de fluencia de la teoría de plasticidad (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, etc) u otras expresiones,  $f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d)$  es el umbral de daño equivalente y  $\kappa^d$  es la variable de endurecimiento en daño.

En el modelo de daño independiente del tiempo original<sup>12</sup> se exige el cumplimiento la condición de daño  $G^d \leq 0$  y la evolución de la *variable interna de daño* se obtiene de la *condición de consistencia de daño*  $\dot{G}^d = 0$ . En el modelo propuesto en este trabajo, con el objeto de tener en cuenta la sobrerresistencia y rigidización bajo cargas impulsivas, en lugar de dichas condiciones, se define la siguiente regla de evolución del daño, que es similar a la expresión para la evolución de la deformación viscoplástica propuesta por Perzyna<sup>8</sup>:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle G^d \rangle}{f_c} \right]^N \quad (6)$$

La variable de daño  $d$  toma siempre valores positivos y crece cuando  $G^d > 0$ . Los parámetros adimensionales  $\eta$  y  $N$  ajustan la evolución del daño según el nivel de sobretensión resultante, y se determinan mediante ensayos experimentales.

La regla de evolución de la *variable de endurecimiento en daño*  $\kappa^d$  se determina normalizando la energía disipada en el proceso de degradación a la unidad, de la siguiente manera:

$$\kappa^d = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right] m \Psi^o \dot{d} \quad (7)$$

donde  $\Psi^o$  es la energía elástica libre del material no dañado:  $\Psi^o = \frac{1}{2m} [\epsilon_{ij}^e C_{ijkl}^o \epsilon_{kl}^e]$  (8)

$$g_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{\bar{\sigma}} g_f^d \quad g_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{\bar{\sigma}} g_c^d \quad r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad \langle \pm x \rangle = \frac{1}{2} (x \pm |x|): \text{función rampa} \quad (9)$$

$$g_f^d = G_f / l_c \quad g_c^d = G_c / l_c \quad (10)$$

$g_f^d$  y  $g_c^d$  son las energías específicas disipadas por daño en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente, y se calculan dividiendo la energía de fractura por unidad de área por la longitud característica del dominio fracturado  $l_c$ .  $R^{od}$  es la relación entre los umbrales de degradación en compresión y en tracción uniaxial.

Cuando la carga es de tipo impulsiva, la energía disipada en el proceso de daño depende de la velocidad de deformación. Para tener en cuenta este fenómeno, en este trabajo se proponen las siguientes expresiones para  $G_f$  y  $G_c$

$$G_c = f \left( \frac{\dot{\epsilon}_c}{\dot{\epsilon}_{co}} \right) G_{co} \quad G_f = f^* \left( \frac{\dot{\epsilon}_{ct}}{\dot{\epsilon}_{cto}} \right) G_{fo} \quad (11)$$

Donde  $\dot{\epsilon}_{cto} = 3 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $\dot{\epsilon}_{co} = -30 \cdot 10^{-6} \text{ s}^{-1}$ ,  $G_{co}$  y  $G_{fo}$  corresponden a ensayos cuasi-estáticos del hormigón. Las funciones  $f$  y  $f^*$  dependen de la velocidad de deformación en compresión y tracción respectivamente, y son análogas a las expresiones que se utilizan en el CEB FIP 1990<sup>13</sup>, para la evolución de la resistencia pico del hormigón en problemas con altas velocidades de deformación

El *umbral de daño* puede definirse como una función explícita de la variable de endurecimiento en daño:

$$f_c(\sigma_{ij}, \kappa^d) = r(\sigma) \sigma_t(\kappa^d) + [1 - r(\sigma)] \sigma_c(\kappa^d) \quad (12)$$

$\sigma_t(\kappa^d)$  y  $\sigma_c(\kappa^d)$  representan la evolución de la tensión, en procesos de tracción y compresión uniaxial respectivamente, en función de la variable de daño por degradación, y pueden obtenerse a partir de las curvas  $\sigma_t-\varepsilon_t$  y  $\sigma_c-\varepsilon_c$  experimentales y de la definición de la variable de degradación

## TRATAMIENTO NUMERICO DEL MODELO PROPUESTO

### Integración de la Ecuación Constitutiva

Se utiliza un algoritmo de integración de la ecuación constitutiva del tipo full Euler backward<sup>14</sup>.

Partiendo de un estado inicial conocido en el instante de tiempo  $t^{n-1}$ , se busca la solución del problema en  $t^n$  debido a un incremento de desplazamientos  $\Delta u^n$  correspondiente al intervalo de tiempo  $\Delta t$ . La tensión al final del paso  $n$  puede calcularse con la siguiente expresión:

$$\sigma_{ij}^n = (1 - d^n) C_{ijkl}^o : \varepsilon_{kl}^n \quad (13)$$

donde:

$$d^n = d^{n-1} + \Delta d^n \quad (14)$$

$$\Delta d^n = \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)^n}{f_c^n} \right\rangle^N \quad (15)$$

$$y \quad (G^d)^n = G^d \left[ \sigma_{ij}^n, (\kappa^d)^n \right] = G^d \left[ (1 - d^{n-1} - \Delta d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n, (\kappa^d)^{n-1} + \left( \frac{r}{g_f^{d^*}} + \frac{1-r}{g_c^{d^*}} \right) \Psi_o^n \Delta d^n \right] \quad (16)$$

Teniendo en cuenta la ec.(16), la expresión (15) constituye una ecuación no lineal en  $\Delta d^n$ , que puede resolverse mediante el método iterativo de Newton-Raphson. Expresando la ec.(15) en forma de residuo, resulta:

$$R = -\Delta d + \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)^n}{f_c} \right\rangle^N \quad (17)$$

De donde  $\Delta d$  puede actualizarse en forma iterativa como sigue:

$$\Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + \delta(\Delta d)_k \quad (18)$$

$$\delta(\Delta d)_k = -R_{k-1} \left( \frac{\partial R}{\partial \Delta d} \right)_{k-1}^{-1} \quad (19)$$

$$\text{con:} \quad \left( \frac{\partial R}{\partial \Delta d} \right)_{k-1} = -1 + \frac{\Delta t}{\eta} \left( \frac{1}{f_c} \frac{\partial |\sigma|}{\partial \Delta d} - \frac{|\sigma|}{f_c^2} \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \frac{\partial \kappa^d}{\partial \Delta d} \right)_{k-1} \quad (20)$$

En la Tabla 1 se presenta el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva.

Tabla 1. Algoritmo de Integración de la Ecuación Constitutiva

<p><b>0) Datos del incremento:</b> <math>\Delta u_k^n, \Delta \varepsilon_{kl}^n, \varepsilon_{kl}^n</math></p> <p><b>1) Predictor:</b> <math>k=0</math>  <math>d_o^n = d^{n-1}, \Delta d_o^n = 0, (f_c)_o^n = (f_c)^{n-1}, (\kappa^d)_o^n = (\kappa^d)^{n-1}, (\sigma_{ij}^o)_o^n = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n, (\sigma_{ij})_o^n = (1-d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n</math></p> <p><b>2) Verificación de la condición de daño</b> <math>(G^d)_o^n = \bar{\sigma} [(\sigma_{ij})_o^n] - (f_c)_o^n</math>  Si <math>(G^d)_o^n &lt; 0</math> vaya a <b>10)</b></p> <p><b>3) Cálculo del residuo</b> <math>R_o = \Delta d_o^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)_o^n}{(f_c)_o^n} \right\rangle^N</math></p> <p><b>4) Corrección de la variable de daño:</b> <math>(\delta \Delta d)_k = - \left( \frac{\partial R}{\partial \Delta d} \right)_{k-1}^{-1} R_{k-1}, \Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + (\delta \Delta d)_k, d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n</math></p> <p><b>5) Cálculo de la tensión:</b> <math>(\sigma_{ij})_k^n = (1-d_k^n) (\sigma_{ij}^o)_k^n</math></p> <p><b>6) Actualización de la variable de endurecimiento en daño:</b>  <math>(\Delta \kappa^d)_k^n = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right]_k^n (\Psi^o)^n \Delta d_k^n, (\kappa^d)_k^n = (\kappa^d)^{n-1} + (\Delta \kappa^d)_k^n</math></p> <p><b>7) Actualización del umbral de daño:</b> <math>(f_c)_k^n = r(\sigma_k^n) \sigma_t [(\kappa^d)_k^n] + [1-r(\sigma_k^n)] \sigma_c [(\kappa^d)_k^n]</math></p> <p><b>8) Cálculo de la función de daño:</b> <math>(G^d)_k^n = \bar{\sigma} [(\sigma_{ij})_k^n] - (f_c)_k^n</math></p> <p><b>9) Cálculo del residuo:</b> <math>R_k = \Delta d_k^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{(G^d)_k^n}{(f_c)_k^n} \right\rangle^N</math>  Si <math>R_k &gt; \text{tolerancia}</math>, entonces: <math>k=k+1</math>, vuelva a <b>4)</b></p> <p><b>10) Actualización de las variables:</b> <math>(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n, d^n = d_k^n, (f_c)^n = (f_c)_k^n, (\kappa^d)^n = (\kappa^d)_k^n,</math></p> <p><b>11) Cálculo del Operador Tangente Consistente <math>C^t</math>:</b></p> <p><b>12) FIN</b></p>
---

### Operador Tangente Consistente

Se denomina *operador tangente consistente* al tensor de rango cuatro,  $C_{ijkl}^t = \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}}$ . El mismo puede ser obtenido por diferenciación del sistema de ecuaciones implícitas (21) que depende de la deformación específica  $\varepsilon$ <sup>15</sup>.

$$\begin{aligned}
R_{ij}^\sigma &= (\sigma_{ij})^n - (1-d^n) C_{ijkl}^o : (\varepsilon_{kl})^n = 0 \\
R^d &= d^n - d^{n-1} - \frac{\Delta t}{\eta} \left[ \frac{(G^d)^n}{(f_c)^n} \right]^N = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

Las variables de estado se determinan mediante el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva y dependen de  $\varepsilon$ . Diferenciando el sistema (21) se obtiene:

$$\frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = - \frac{\partial R_{ij}^\sigma}{\partial \varepsilon_{mn}} \tag{22}$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R^d}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = -\frac{\partial R^d}{\partial \varepsilon_{mn}} \quad (23)$$

y el operador tangente consistente resulta:

$$C_{klmn}^t = \left[ I_{ijkl} - a \left( \sigma_{ij}^o \left( \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \right)^n \right) \right]^{-1} \left[ \left( 1 + \frac{1}{b} \right) (1 - d^n) C_{ijmn}^o + \frac{1}{(\Psi^o)^n} \sigma_{ij}^o (\sigma_{mn})^n \right] \quad (24)$$

$$\sigma_{ij}^o = C_{ijkl}^o : (\varepsilon_{kl})^n \quad a = \left( \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \left( \frac{G^d}{(f_c)^n} \right)^{N-1} \right\rangle \right) \quad b = a \left[ \frac{(\bar{\sigma})^n}{[(f_c)^n]^2} \left( \frac{\partial f_c}{\partial \kappa^d} \right)^n \left[ \frac{r^n}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r^n)}{g_c^{*d}} \right] (\Psi^o)^n \right] \quad (25)$$

### ANALISIS DE LA PROPAGACION DE ONDA

Partiendo de las ecuaciones de movimiento y continuidad para un continuo tridimensional genérico, sin amortiguamiento y sin fuerzas de masa, se obtienen las siguientes ecuaciones de onda infinitesimal<sup>1</sup>:

$$\sigma_{ij,j} = m v_i \quad (26)$$

$v_i = \dot{u}_i$ : componente  $i$  del vector de velocidades, (perturbaciones admisibles)

Tomando la derivada respecto del tiempo de la ecuación (4), para  $G^d(\sigma, d) > 0$  resulta:

$$\sigma_{ij} = (1 - d^o) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} - C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o \dot{d} \quad (27)$$

donde  $d^o$  y  $\varepsilon^o$  se refieren al estado de daño y deformación a partir del cual se considera la perturbación.

Sustituyendo la ecuación (27) en la ecuación de onda, se obtiene la siguiente expresión:

$$(1 - d^o) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl,j} - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o - \dot{d} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl,j}^o = m \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad \text{con} \quad \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (v_{k,l} + v_{l,k}) \quad (28)$$

Esta ecuación es válida para un modelo de daño tanto independiente como dependiente del tiempo. Dicha ecuación de movimiento contiene explícitamente los gradientes espaciales de las variables de estado iniciales  $(\varepsilon_{ij}^o, d^o)$  a partir de las cuales se considera la perturbación. Se puede observar que los términos en que aparecen las derivadas espaciales de  $(\varepsilon_{ij}^o, d^o)$  no contienen las derivadas de mayor orden de la perturbación  $\mathbf{v}$ . Luego, no modifican la naturaleza de las ecuaciones diferenciales parciales que gobiernan el problema, y se supone un estado inicial de daño y deformación homogéneo.

Dada la evolución del daño definida en la ecuación (6), la misma no es función de la perturbación  $\mathbf{v}$ . En la ecuación de onda se consideran finalmente sólo los términos en que aparece la perturbación, omitiendo aquellos que son función del estado inicial solamente y que no modifican la naturaleza de las ecuaciones diferenciales parciales.

$$(1 - d^o) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl,j} = \left[ (1 - d^o) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} \right]_{,j} = m \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (29)$$

Esta ecuación es similar a la de un sólido elástico de rigidez  $(1 - d^o) C^o$ , positiva definida en todo el dominio, luego, la ecuación de onda resulta incondicionalmente hiperbólica. Puede concluirse, que el problema de onda en este

modelo constitutivo es estable y bien condicionado, independientemente del estado de daño y deformación a partir del cual se considera la deformación.

Como ejemplo puede tomarse un elemento con ablandamiento unidimensional, donde la ecuación de onda resulta:

$$(1 - d^o)E \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial x^2} = m \frac{\partial^2 v(x,t)}{\partial t^2} \tag{30}$$

La ecuación de onda (30) sólo está controlada por la rigidez de descarga del material, y la velocidad de propagación de onda  $c$  es:

$$c = \sqrt{\frac{(1 - d^o)E}{m}} \tag{31}$$

### EJEMPLOS DE APLICACION

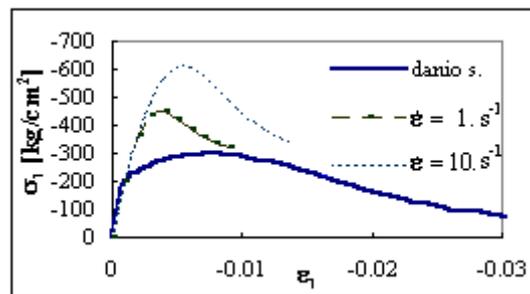
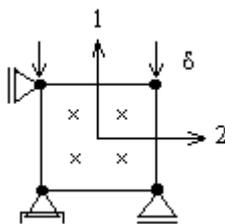
El modelo descrito fue implementado en un programa de elementos finitos planos para sólidos con no linealidad material y geométrica que permite realizar análisis estático y dinámico. Para ello se utilizaron el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva y el módulo tangente consistente descriptos.

Con el programa se realizaron una serie de ejemplos de aplicación. Los parámetros del material utilizados son los siguientes: módulo de elasticidad  $E=300.000 \text{ kg/cm}^2$ , módulo de Poisson  $\nu=0,2$ , tensión umbral de daño  $f_{co}=220\text{kg/cm}^2$ , energía de fractura  $G_f=5 \text{ kg.cm/cm}^2$ ,  $N=1$ . A continuación se describen algunos de los ensayos.

#### Ensayo cuasi-estático de deformación controlada

En este ejemplo se realiza el análisis estático de un prisma de hormigón, como el que se indica en la fig.1, sometido a compresión uniaxial con distintas velocidades de deformación. Para ello se utiliza un elemento finito de 4 nodos y 2x2 puntos de integración con las condiciones de apoyo indicadas en fig.1.

La fig.2 muestra las curvas tensión vs deformación obtenidas para las distintas velocidades de deformación y para el modelo de daño simple independiente del tiempo. En la misma puede observarse como aumenta la rigidez, la resistencia pico y la capacidad de disipación de energía a medida que aumenta la velocidad de deformación. Esto coincide con las observaciones experimentales sobre elementos de hormigón sometidos a cargas de tipo impulsivo.

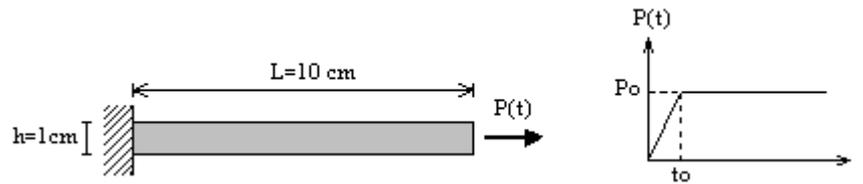


**Fig.1:**Prisma de hormigón sometido a compresión uniaxial.**Fig.2:**Diagrama  $\sigma$ - $\epsilon$  según la velocidad de deformación

#### Barra sometida a una carga impulsiva

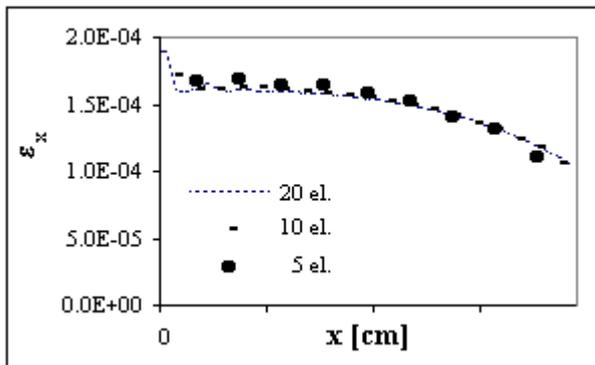
En este ejemplo se analiza una barra fija en un extremo y sometida a una carga dinámica en el extremo opuesto. El modelo constitutivo propuesto presenta ablandamiento en la etapa posterior al pico. Por lo cual se estudia su comportamiento en lo que respecta a la propagación de onda a lo largo de una barra<sup>16</sup>.

Las dimensiones de la barra y las características de la carga se indican en la fig.3 . Se utilizan elementos finitos de 8 nodos y 2x2 puntos de integración. El escalón de carga se define tal que  $P_o=0.75(Af_i)$ , donde  $A$  es el área de la barra y  $f_i$  la resistencia del hormigón en un ensayo cuasi-estático.

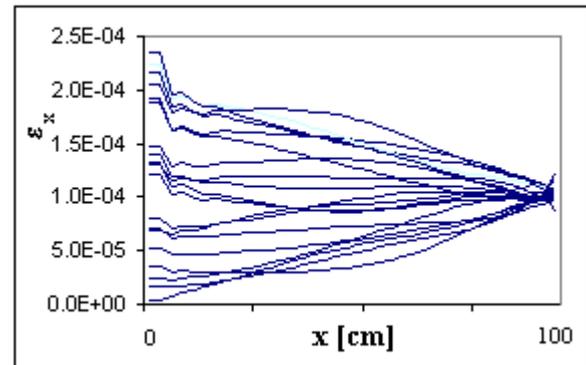


**Fig.3** Barra sometida a carga impulsiva en un extremo

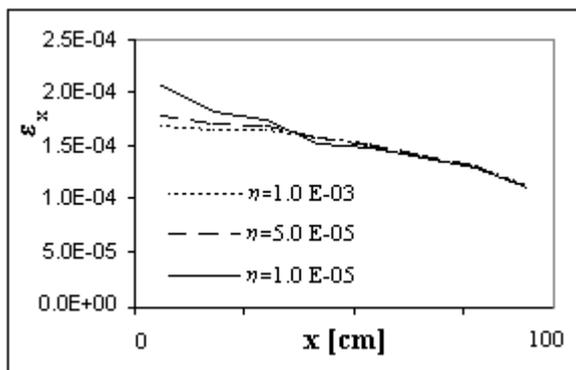
En la fig.4 se grafica la deformación específica a lo largo de la barra. Los resultados que se obtienen con mallas de 5, 10 y 20 elementos, son independientes de dicho refinamiento. De esta forma se verifica que el problema permanece bien condicionado. En la fig.5 se observa la evolución de la deformación a lo largo de la barra en el tiempo. Con respecto a las fig.6 y 7, las mismas muestran el comportamiento de la variable de daño y la deformación específica cuando el parámetro  $\eta$  del modelo propuesto, toma valores entre  $1 \times 10^{-3}$  y  $5 \times 10^{-5}$ . Se observa que  $\eta$  modifica la distribución de velocidades de deformación y de daño, y como consecuencia el ancho de banda de localización de las deformaciones.



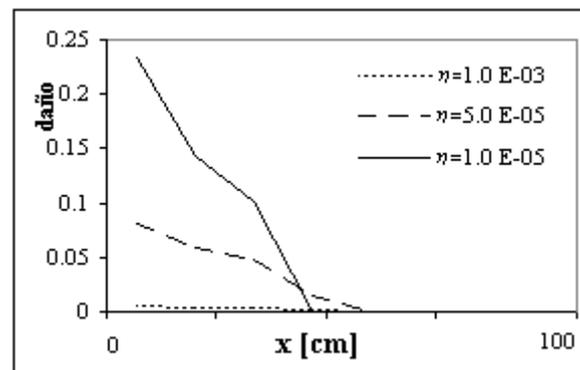
**Fig.4:** Evolución de la deformación  $\epsilon_x$  a lo largo de la barra para distintas mallas en el tiempo  $t=3t_0$  ( $t_0=5. \times 10^{-5}$  s y  $\eta= 0.1$ ).



**Fig.5:** Evolución de la deformación  $\epsilon_x$  en el tiempo a lo largo de la barra (20el.,  $t_0=5.0 \times 10^{-5}$  s y  $\eta= 0.1$ ).



**Fig.6:** Evolución de la deformación  $\epsilon_x$  a lo largo de la barra para distintos  $\eta$  (5 elem.,  $t_0=5.E-05$  s)



**Fig.7:** Evolución de la variable de daño  $d$  a lo largo de la barra para distintos  $\eta$  (5 elem.,  $t_0=5.E-05$  s)

## CONCLUSIONES

El presente trabajo incorpora la dependencia del tiempo a un modelo de daño escalar isótropo. Adoptando una ley de evolución de la variable interna de daño  $d$  del tipo de la deformación viscoplástica de Perzyna, se obtiene de manera simple, un modelo constitutivo dependiente de la velocidad de aplicación de la carga.

El algoritmo de integración de la ecuación constitutiva es del tipo full Euler backward. La resolución se realiza mediante el método iterativo de Newton-Raphson de un solo residuo. El mismo se obtiene a partir de la expresión de variación de la variable interna de daño, y resulta particularmente conveniente. El control de convergencia se realiza sólo para la variable  $d$ .

El modelo propuesto no tiene una condición de consistencia en su formulación. Para el cálculo de operador tangente consistente es necesario recurrir a un sistema de ecuaciones implícitas en términos del tensor de tensiones y de la variable de las variables internas. Dicho sistema depende de la deformación específica. El operador tangente obtenido no es continuo.

La sobrerresistencia del hormigón existente bajo velocidades de deformación del orden de  $10^{-1}$  a  $10^3 \text{ s}^{-1}$ , se puede representar satisfactoriamente. La velocidad de daño depende de la sobretensión resultante y de los parámetros  $N$  y  $\eta$  que ajustan el modelo. Dichos parámetros se determinan a partir de ensayos experimentales realizados para distintas velocidades de deformación. Los ensayos numéricos muestran como la disminución del valor de  $\eta$ , cuando  $N$  toma el valor uno, aumenta la velocidad de daño y de deformación específica.

Con respecto a la resolución de la ecuación de movimiento, la misma se mantiene bien condicionada. La velocidad de propagación de onda corresponde a la velocidad en un medio elástico, con módulo de elasticidad coincidente con el módulo secante. Ensayos numéricos verifican que los resultados no dependen de la densificación de la malla. Sin embargo, la adopción de los parámetros del modelo modifican el ancho de banda de localización de las deformaciones y de daño.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el apoyo económico brindado por el Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET – Argentina), para la realización del presente trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] Dubé J. F., Pijudier Cabot, G. (1996), "Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, Vol 122, No. 10, pp. 939-947.
- [2] Bischoff, P. H. and Perry, S. H., (1991), "Compressive Behavior of Concrete at high Strain Rates", *Mat and Struc*, 24, 425-450.
- [3] Bruhwiler, E., (1990), "Fracture of Mass Concrete under Simulated Seismic Action" *Dam. Engrg.*, 1(3), 153-176.
- [4] Meyer, C., De Borst, R., Bicanic, N., Filipou, F., and Maekawa, K., "Chapter 6: Dynamic Loading", *Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures II*, J. Isenberg, de. ASCE, New York, 314-346.
- [5] Simo, J.C., and Ju, J. W., (1987a), "Strain and Stress Based Continuum Damage Models. Part I: Formulation", *Int. Jour. Solids & Structures, Special Issue in Memory of J.C.Simo*, August 25, 1995.
- [6] Simo, J.C., and Ju, J. W., (1987a), "Strain and Stress Based Continuum Damage Models. Part II: Computational Aspects", *Int. Jour. Solids & Structures*, 23(7), 841-869.
- [7] Ju, J.W., (1989), "On Energy-Based Coupled Elastoplastic Damage Theories: Constitutive Modeling and Computational Aspects", *Int. Jour. Solids & Structures*, 25(7), 803-833.
- [8] Perzyna, P., (1966), *Fundamental Problems in Viscoplasticity; Recent Advances in Applied Mechanics*, Academic Press, New York, N.Y..
- [9] Needleman, A., (1987), "Material Dependence and Mesh Sensitivity in Localisation Problems", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engrg.*, 67, 69-86.
- [10] Sluys, L. J., (1992), "Wave Propagation, Localisation and dispersion in strain softening solids", Doctoral Dissertation, Delft Univ. Of Technology, Delft, The Netherlands
- [11] Luccioni B., Oller S., Danesi R. (1996), "Coupled Plastic-Damaged Model", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 129 (1996) 81-89.

- 
- [12] Luccioni B.M. (1993), "Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos", Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Doctor en Ingeniería, Universidad Nacional de Tucumán, Diciembre de 1993.
  - [13] CEB-FIP Model Code 1990, Design Code, Comité euro-international du Beton, Thomas Telford Services House, Switzerland 1993
  - [14] A.N. Carosio "*Análisis Teórico-Computacional del Comportamiento Tiempo Dependiente de Materiales*". Tesis presentada como requerimiento parcial para la obtención del grado académico de Magister en Ingeniería Estructural, Universidad Nacional de Tucumán, Setiembre de 1997.
  - [15] S. Hartmann, G. Lührs and P. Haupt (1997) "An Efficient Stress Algorithm with Applications in Viscoplasticity and Plasticity", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 991-1013.
  - [16] R. De Borst, L.J. Sluys, H.-B. Mühlhaus and J. Pamin (1993) "Fundamental issues in finite element analyses of localization of deformation", *Engineering Computations*, Vol. 10, 99-121.