

# PLASTICIDAD EN GRANDES DEFORMACIONES PARA MATERIALES COMPUESTOS ANISÓTROPAS PARTE II: TEORÍA DE MEZCLAS Y APLICACIONES

**E. Car, S. Oller y E. Oñate**

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos.*

*Universidad Politécnica de Catalunya*

*Módulo C1 Campus Norte 08034 Barcelona España*

*email: car@cimne.upc.es*

## RESUMEN

En este trabajo se presenta una generalización de la teoría de la plasticidad isotrópica clásica al campo anisótropo, su extensión a la teoría de grandes deformaciones y su aplicación a la simulación numérica del comportamiento de materiales compuestos. En esta segunda parte se presenta la teoría de mezclas de sustancias básicas en la cual se introduce el modelo propuesto en la Parte I y que permite simular el comportamiento del material compuesto. Dicho comportamiento se obtiene en función del porcentaje en volumen ocupado por cada material componente. Esta teoría tiene en cuenta la coparticipación de "n" sustancias componentes en cada punto, tal que cada una de estas puede ser independiente de las demás: isotrópicas, ortótropas o anisótropas. y cada sustancia puede tener una ley constitutiva distinta: elástica, frágil, plástica o la combinación de ellas. Por último se presenta un ejemplo de aplicación del modelo al análisis del comportamiento lineal y no-lineal de materiales compuestos.

## ABSTRACT

In this work a generalized anisotropic model in large strains based on the classical isotropic plasticity theory and its application to simulate the constitutive behavior of composite materials is presented. The second part of this work describes the mixing theory where the proposed anisotropic elastoplastic constitutive model, presented in Part I, is implemented. The behavior of composite materials assumes that each compound participates in the whole composite in the same volume proportion and with independent constitutive laws: elastic, elastoplastic, etc. An application example showing the performance of the model for the analysis of the linear and non-linear behavior of fiber reinforced composite materials is given.

## COMPORTAMIENTO DEL COMPUESTO ANISÓTROPICO

### Introducción

Los materiales compuestos constituidos por plásticos reforzados con fibras (FRP "fiber reinforced plastic") y especialmente los compuestos reforzados con fibras de vidrio o carbono son muy utilizados para la fabricación

de elementos estructurales en los que el peso y la resistencia constituyen variables fundamentales durante el proceso de diseño. Por lo tanto es necesario formular modelos constitutivos que permitan predecir la respuesta de este tipo de materiales bajo diversos tipos de sollicitaciones. El mecanismo de falla en los materiales compuestos reforzados con fibras es complejo debido a la presencia de diversos fenómenos y a la propia constitución del compuesto. Dependiendo del tipo de material y de los esfuerzos a los que está sometida la pieza, el proceso de falla del material puede sobrevenir como una combinación de diversos mecanismos de falla. El modelo constitutivo que se desarrolla en este trabajo tiene por objetivo simular este complejo mecanismo de falla de los materiales compuestos. Está basado en tres teorías que permiten simular los diversos mecanismo que se generan durante el proceso de falla de los materiales compuestos:

- Teoría de grandes deformaciones para materiales isótropos
- Teoría de mezclas modificada para materiales isótropos que permite combinar sustancias básicas
- Teoría de mapeo de espacios para materiales anisótropos que aporta la metodología para transformar el comportamiento plástico anisótropo en un comportamiento plástico isótropo.

La elección del modelo constitutivo, de un criterio de fluencia y de una regla de flujo plástico adecuados resultan de gran importancia en la descripción del comportamiento no lineal anisótropo de los materiales FRP.

### Teoría de mezclas

Existen diversas teorías que permiten simular el comportamiento constitutivo de los materiales compuestos, entre ellas la *Teoría de Mezclas* se considera adecuada para la simulación del comportamiento de este tipo de materiales.

La teoría de mezclas fue estudiada por Trusdell y Toupin<sup>11</sup> y a su vez estos estudios dieron las bases de los trabajos de Ortiz y Popov.<sup>9</sup> Los resultados obtenidos por Trusdell constituyen también la base de trabajos como el de Green y Naghdi<sup>3</sup> y el de Ortiz y Popov<sup>10</sup> para materiales bifase.

El modelo que aquí se presenta es un modelo más general que representa el comportamiento constitutivo de un material compuesto de "n" fases altamente anisótropo en de grandes deformaciones.

Esta teoría es la adecuada para explicar el comportamiento de un punto de un sólido compuesto a partir de la información de sus componentes basando toda su formulación en la estructura físico-matemática de la *mecánica de medios continuos*. Se basa en el principio de interacción entre las sustancias componentes que constituyen el material con las siguientes hipótesis: (i) en cada volumen infinitesimal de un compuesto participan un número de sustancias componentes; (ii) cada componente participa en el comportamiento del compuesto en la misma proporción que su participación volumétrica; (iii) todos los componentes poseen la misma deformación (ecuación de cierre o compatibilidad); (iv) el volumen ocupado por cada componente es mucho menor que el volumen total del compuesto.

La segunda hipótesis implica una distribución homogénea de todas las sustancias en una cierta región del compuesto. La interacción entre las diferentes sustancias componentes, cada una con su respectiva ley constitutiva, determina el comportamiento del material compuesto y depende básicamente del porcentaje en volumen ocupado por cada componente y de su distribución en el compuesto.

La tercera hipótesis en la que se basa la teoría de mezclas supone que en ausencia de difusión atómica<sup>1</sup> la deformación es idéntica para todos los componentes del compuesto. Esta hipótesis se debe verificar tanto en la configuración referencial como en la espacial para cada fase. En esta última configuración la condición de compatibilidad de deformaciones resulta:<sup>6,11</sup>

---

<sup>1</sup> Los fenómenos de difusión atómica se producen a temperaturas muy altas. En los análisis se considera una temperatura inferior a la correspondiente al punto de fusión.

$$e_{ij} \equiv (e_{ij})_1 = (e_{ij})_2 = \dots = (e_{ij})_n \quad (1)$$

La ec. (1) se conoce como ecuación de cierre o compatibilidad. La definición de la tensión para el compuesto  $\boldsymbol{\tau}$  se obtiene a partir de la formulación del modelo hiperelástico garantizando la condición de disipación del segundo Principio de la Termodinámica.<sup>5</sup> Esto es:

$$\boldsymbol{\tau} = m \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c \frac{\partial \psi_c}{\partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c m_c (\boldsymbol{\tau})_c \quad (2)$$

donde  $k_c$  es la relación entre el volumen del componente  $c$  y el volumen total del compuesto. El tensor tangente constitutivo del compuesto, está dado por:

$$\mathbf{c}^T = \frac{\partial^2 \psi}{\partial \mathbf{e} \otimes \partial \mathbf{e}} = \sum_{c=1}^n k_c (\mathbf{c}^T)_c \quad (3)$$

donde  $(\mathbf{c}^T)_c$  representa el tensor constitutivo tangente anisótropo real para el componente  $c^{\text{ésimo}}$ .

El análisis de materiales compuestos utilizando la teoría de mezclas clásica resulta insuficiente, debido a que esta no puede tener en cuenta ciertos fenómenos que tienen lugar en estos materiales. La ecuación de cierre solo es válida para materiales con comportamiento en paralelo, por ejemplo matrices con fibras largas, despreciando los fenómenos que ocurren en los extremos de las fibras. En el caso de materiales compuestos reforzados con fibras cortas la ecuación de compatibilidad o cierre no se cumple. Por lo tanto, resulta necesario modificar la teoría de mezclas clásica debido a que no se cumple la ecuación de compatibilidad, definiendo por ello una ecuación de cierre distinta<sup>8</sup> o realizando una corrección en las propiedades de cada componente manteniendo la ecuación de cierre de la teoría de mezclas clásica.<sup>2</sup> Este último método conduce a una formulación más simple. La modificación en las propiedades del material se basa en el hecho de que en los materiales compuestos de fibra corta o que presentan fenómenos de deslizamiento relativo entre componentes la ecuación de cierre es posible escribirla como:

$$e_{ij} \equiv n_1 \underbrace{(e_{ij}^e + e_{ij}^p)}_{(e'_{ij})_1} = n_2 \underbrace{(e_{ij}^e + e_{ij}^p)}_{(e'_{ij})_2} = \dots = n_n \underbrace{(e_{ij}^e + e_{ij}^p)}_{(e'_{ij})_n} \quad (4)$$

Esta ecuación establece que las deformaciones en cada componente está afectada de un cierto factor  $n_i$  función de la relación de elasticidad entre componentes de la deformación y el estado de las variables internas de las deformaciones del conjunto  $e_{ij}$ . Con esta hipótesis, la tensión en el componente  $i$  del material compuesto se calcula con la siguiente expresión:

$$(\boldsymbol{\tau})_i = \mathbf{c}_i : (\mathbf{e}' - \mathbf{e}'^p)_i = \underbrace{n_i \mathbf{c}_i}_{\mathbf{c}'_i} : (\mathbf{e} - \mathbf{e}^p)_i \quad (5)$$

Teniendo en cuenta la ecuación de cierre dada en la ec.(4) y la ec.(5) se observa que el factor de proporcionalidad entre la deformación de un componente y la deformación total del conjunto provoca una modificación del tensor constitutivo del componente  $n_i \mathbf{c}_i$  dando lugar a un nuevo tensor constitutivo para el componente  $\mathbf{c}'_i$  que permite utilizar para el cálculo de la tensión en el componente  $i$  la deformación del conjunto. La modificación de las propiedades del componente permite utilizar entonces como ecuación de compatibilidad la definida en la ec. (1)

La ecuación de compatibilidad tampoco resulta válida en el caso en que se produzca un deslizamiento relativo entre fibra y matriz. Este fenómeno se produce en el instante en que la tensión cortante máxima admisible de la interfase entre fibra y matriz es superada. Este fenómeno se conoce con el nombre de

Módulo de Young	3170 <i>Mpa</i>
Coefficiente de Poisson	0,35
Tensión de fluencia	75,53 <i>Mpa</i>
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	exponencial con ablandamiento
Energía de fractura	1,47 <i>N/m</i>
$V_m$	40%

Tabla 1: Propiedades resina epoxi

"*debonding*". Los materiales compuestos sometidos a estados tensionales en los cuales se ha producido el fenómeno de *debonding* no cumplen con la condición de compatibilidad impuesta por la teoría de mezclas de sustancias básicas.

El fenómeno de *debonding* se debe a la imposibilidad de la matriz de transferir esfuerzos a la fibra. Esto es, la fibra no es capaz de aumentar su estado tensional por causas atribuibles a la zona de interfase fibra-matriz. El modelo constitutivo propuesto se basa en la idea de que el proceso de transferencia de cargas de matriz a fibra varía en el momento en que la matriz sufre deformaciones plásticas. El modelo que se propone en este trabajo es un modelo "*no local material*" y se basa en establecer el estado tensional en el que se encuentra la fibra en el momento de producirse la rotura en la matriz del compuesto. A partir de esta situación las fibras aumentan su estado tensional según un módulo elástico diferente del inicial debido a que durante el fenómeno de separación entre fibra y matriz operan fuerzas friccionales entre ambos materiales.

El modelo elastoplástico anisótropo en régimen de grandes deformaciones, presentado en la primera parte constituye uno de los modelos "base" que se utilizan en la teoría de mezclas. En particular para el caso de materiales compuestos reforzados con fibras largas se consideran un modelo constitutivo para cada fase: fibra y matriz. El comportamiento de la matriz se simula con un modelo constitutivo elastoplástico isótropo clásico y el modelo constitutivo elastoplástico anisótropo se utiliza para simular el comportamiento del refuerzo.

En la Figura 1 se observa un esquema de solución del problema no lineal bifase en el que una de las fases esta constituida por un material anisótropo y la fase restante es un material isótropo.

## EJEMPLOS DE APLICACIÓN

### Ensayo para la determinación de las propiedades a cortante en materiales compuestos

En este apartado se presenta un ejemplo de aplicación de la formulación que combina la teoría de mezclas, el modelo anisótropo propuesto y la teoría de grandes deformaciones. El ejemplo consiste en simular numéricamente un ensayo de una probeta de material compuesto laminado multidireccional de 30 capas con una secuencia de apilamiento  $(45^\circ, -45^\circ)_{SS}$  sometidas a un estado de corte plano. El ensayo se ejecuta de acuerdo con la norma ASTM D4255.<sup>1</sup> El material compuesto está constituido por una resina denominada RS-3 Policinato y el refuerzo está constituido por fibra de carbono XN-50 con participaciones volumétricas del 40% y 60% respectivamente.

La resina se comporta como un material isótropo con una ley de comportamiento elastoplástico, mientras que las fibras se comportan como un material elastoplástico anisótropo. A los fines de simular el comportamiento del material compuesto se utilizan dos modelos "base" en el contexto de la teoría de mezclas, uno isótropo para la matriz y el modelo anisótropo para la fase de refuerzo.

Las propiedades mecánicas de la resina RS-3 Policinato y de la fibra XN-50 utilizados en la simulación numérica se pueden observar en la Tabla 1y 2

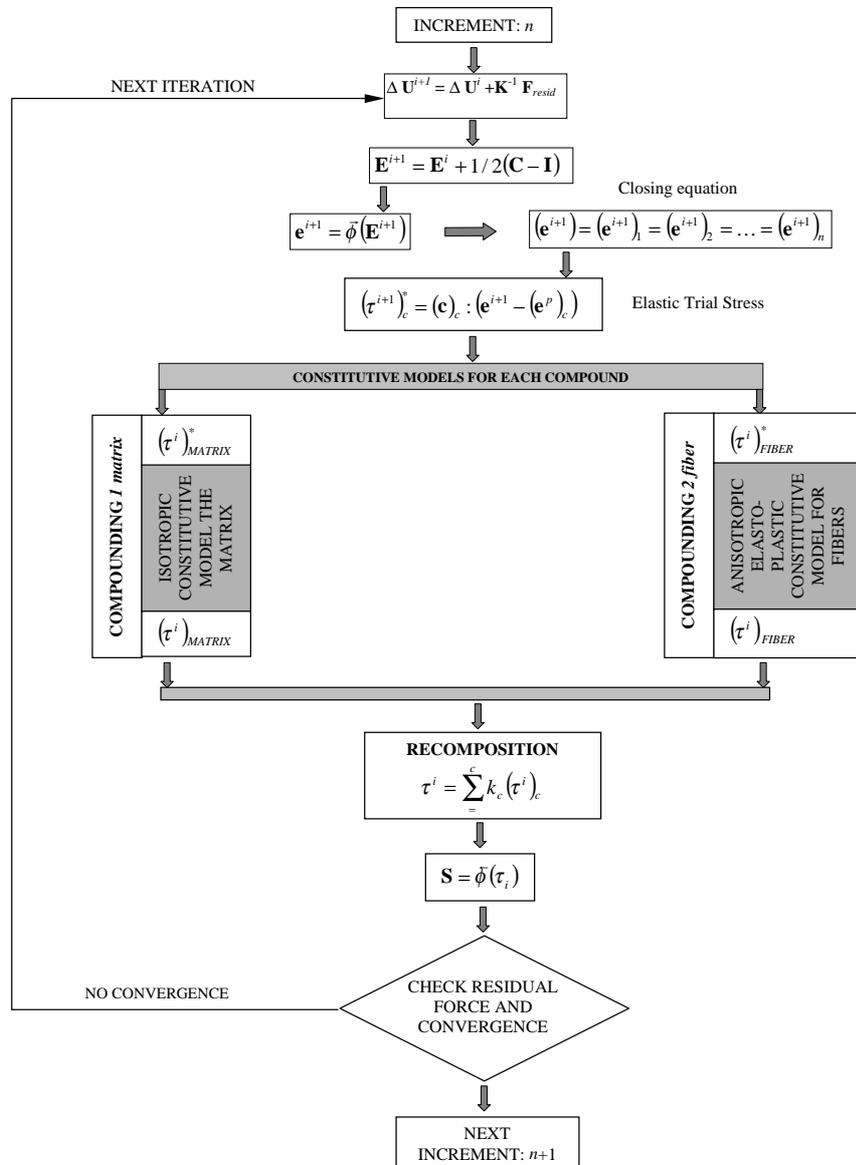


Figura 1: Modelo constitutivo para materiales compuestos reforzados con fibras

Módulo de Young	507.177 Mpa
Coefficiente de Poisson	0,0
Tensión de fluencia	3183.34 Mpa
Ley de comportamiento posterior a la fluencia	lineal con endurecimiento
$V_f$	60%

Tabla 2: Propiedades fibra de carbono

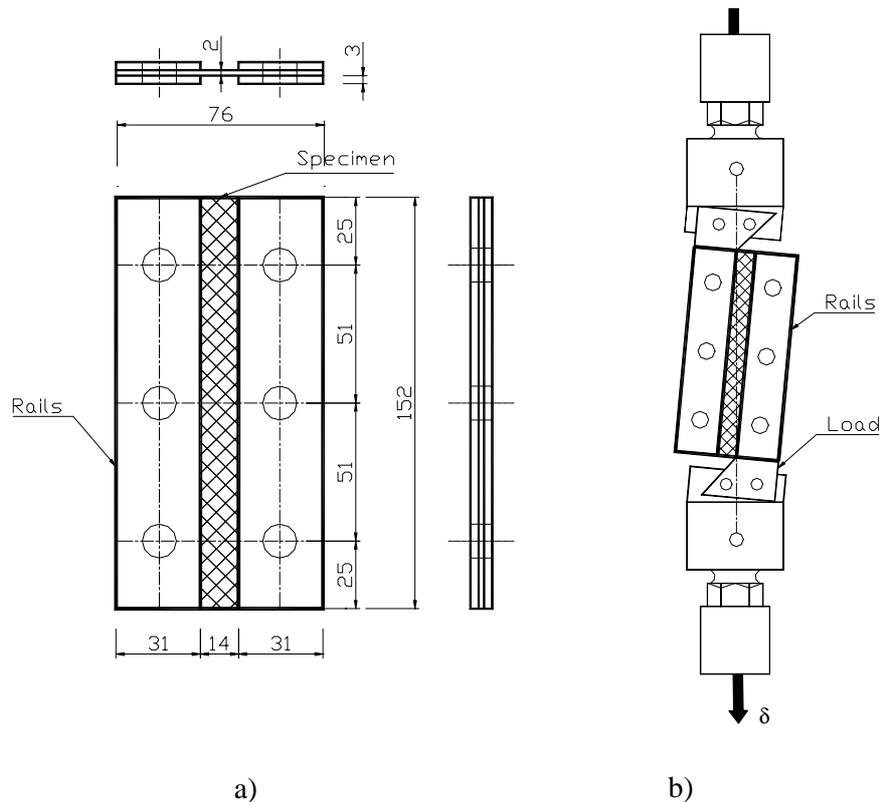


Figura 2: a) Dimensiones de la probeta b) Aparato de ensayo

En la Figura 2 se observa la geometría de la pieza y su posición en la máquina de ensayos. El ensayo consiste en someter a la pieza a un desplazamiento impuesto aplicado en los orificios de la misma induciendo un estado de corte plano. Para determinar el módulo a cortante del material se colocan "strain gages" en la zona central de la pieza formando un ángulo de  $45^\circ$  con el eje longitudinal.

Las simulaciones se han realizado empleando una malla de elementos finitos triangulares de 3 nodos con un total de 2074 elementos, 1144 nodos y 2228 grados de libertad. En la Figura 3 se observa la malla de elementos finitos empleada.

En la Figura 4 se muestra un detalle de las condiciones de borde empleadas en la simulación numérica. La Figura 4a y b muestran las condiciones de borde impuesta en los orificios del lado izquierdo y derecho de la probeta respectivamente. La simulación numérica se realiza imponiendo desplazamientos en los orificios de la zona izquierda de la probeta. El análisis se lleva a cabo con un procedimiento incremental con un total de 200 pasos.

En la Figura 5 se observa la deformada de la probeta en el estado final. Esta figura presentan un factor de amplificación de los desplazamientos de 3. Se observa en la misma figura los efectos locales que se producen en cada orificio y la desviación que sufre la probeta durante el ensayo

En la figura 6 se muestran los contornos de desplazamiento en la probeta en el ultimo paso del análisis y se observa una fuerte localización de las deformaciones en la zona central de la probeta analizada. En las figura 7a se presenta el contorno de las deformaciones plásticas cortantes, en la zona central de la probeta, en el último paso del análisis. En la figura 7b se observa el contorno de las tensiones cortantes en el mismo paso del análisis en la zona central de la probeta. Las deformaciones plásticas se concentran en tres áreas uniendo los orificios del lado izquierdo de la probeta con los del lado derecho. Las deformaciones plásticas

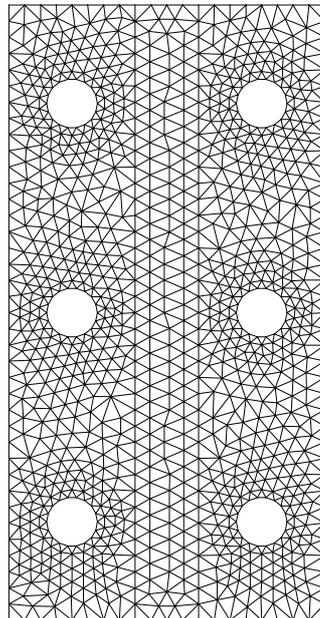


Figura 3: Malla de elementos finitos

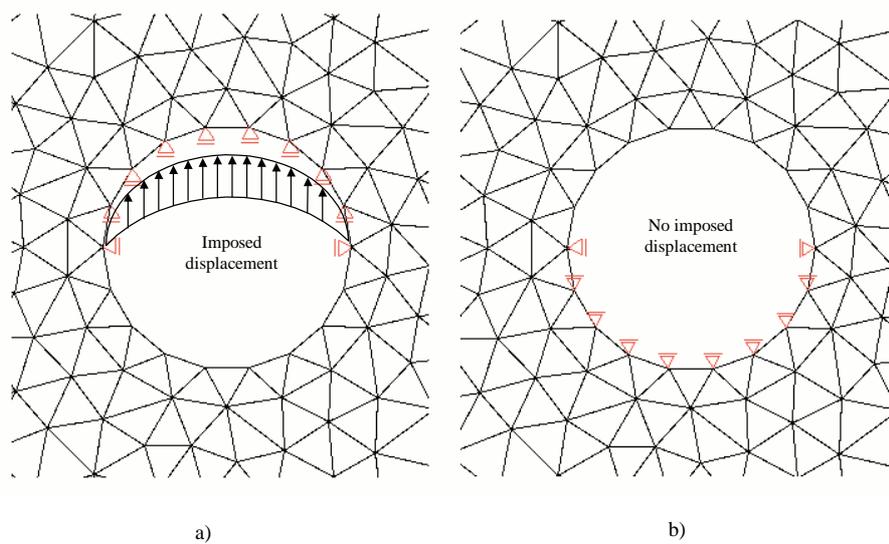


Figura 4: Condiciones de borde utilizadas en la simulación numérica

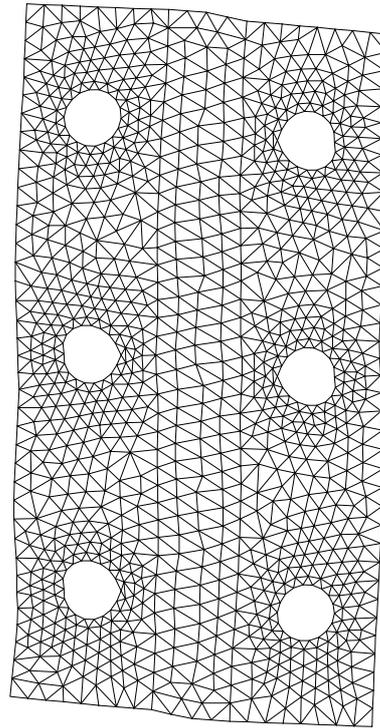


Figura 5: Ensayo a corte ASTM D4255. Deformada 3:1

dan una idea de las zonas que presentan fractura difusa.

En la Figura 8 se observa una comparación entre la simulación numérica y la probeta ensayada. En la Figura 8a se presenta la probeta ensayada. En la misma se observa la existencia de dos fisuras inclinadas a  $45^\circ$  aproximadamente respecto del eje longitudinal de la probeta y la zona central que presenta una rotura generalizada. En la Figura 8b se presenta el contorno de las deformaciones plásticas efectivas obtenido con la simulación numérica. Al igual que en la fotografía de la probeta se observan dos zonas inclinadas aproximadamente a  $45^\circ$  respecto del eje longitudinal y una zona de mayor tamaño en la zona central de la probeta que presentan las máximas deformaciones plásticas efectivas. Esto se puede interpretar como las zonas de fractura difusa.<sup>4,7</sup> En figura se observa el fenómeno de delaminación que se produce en la probeta, debido a la presencia en el material compuesto de una fase con un alto módulo elástico, la fibra, y de otra fase con un bajo módulo elástico, la matriz, cuya misión es aglutinar a las fibras y transmitir la carga aplicada.

La Figura 9 muestra una comparación de curvas Carga - Desplazamiento considerando diversos modelos constitutivos. Se consideran diversos análisis numéricos basados en la teoría de mezclas con:

- un modelo constitutivo elástico lineal para cada fase en pequeñas deformaciones,
- un modelo constitutivo elástico lineal para cada fase en grandes deformaciones y
- un modelo constitutivo elastoplástico con anisotropía en grandes deformaciones.

Los resultados considerando el modelo elástico lineal en pequeñas deformaciones para cada fase constituye la envolvente superior de las respuestas. Se observa en la Figura el carácter no lineal de la respuesta considerando el modelo propuesto en este trabajo. Una de las razones del comportamiento no lineal de los materiales compuestos se debe al fenómeno de fisuración en la matriz y al despegue o deslizamiento relativo entre matriz y refuerzo que conduce a deformaciones irreversibles.

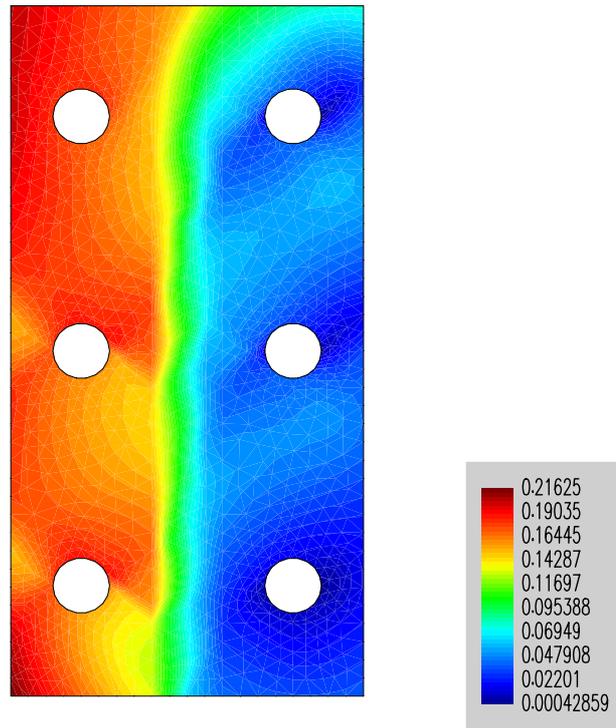


Figura 6: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50. Contorno de desplazamientos

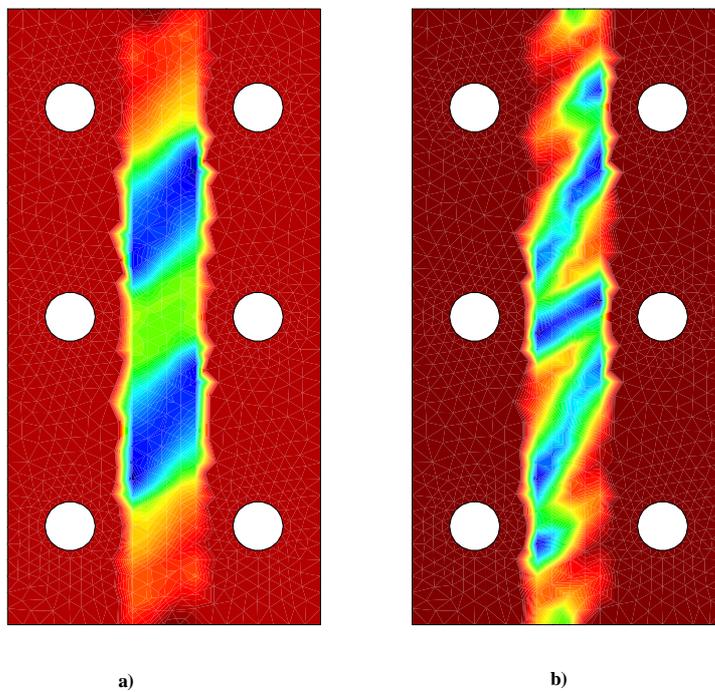


Figura 7: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50. a) Contorno de deformaciones plásticas  $E_{xy}^p$  b) Contorno de tensiones  $\sigma_{xy}$

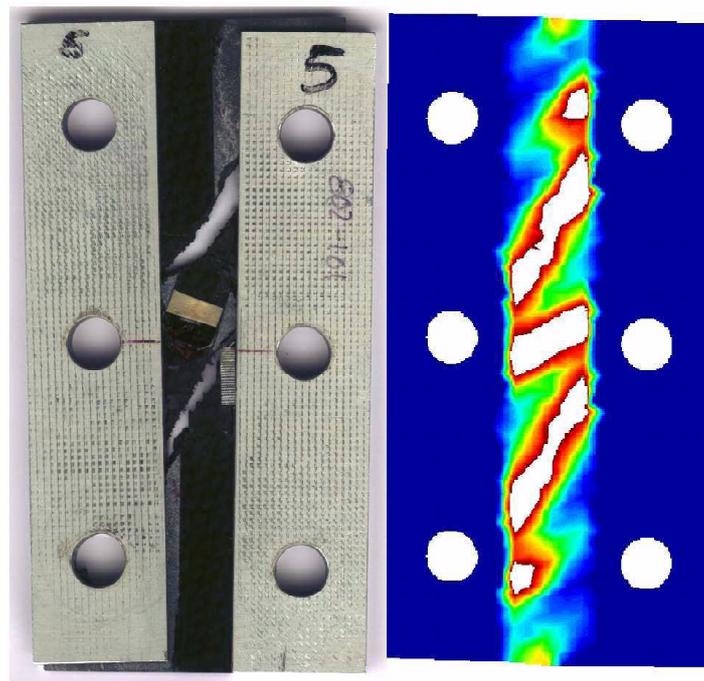


Figura 8: Ensayo probeta Policinato RS-3 - XN-50 a) Fotografía probeta ensayada. b) Contorno de deformación plástica efectiva

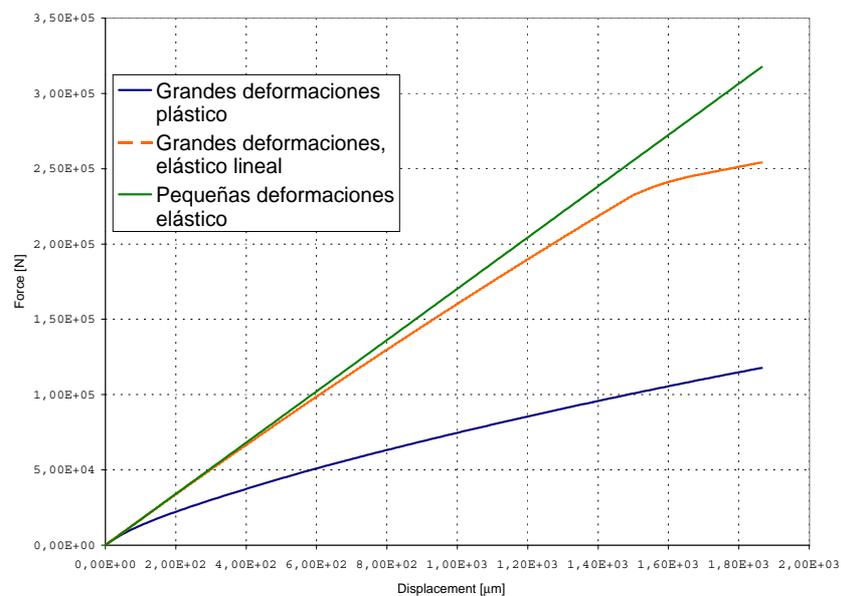


Figura 9: Ensayo Probeta Policinato RS-3 - XN-50. Curva Carga - Desplazamientos

## CONCLUSIONES

Las técnicas convencionales analíticas utilizadas para el análisis de materiales simples isótropos no resultan adecuadas para el análisis de materiales compuestos. Por ello resulta necesario a los fines de modelar materiales compuestos introducir teorías que permitan simular el comportamiento de materiales que presentan características diferentes de los materiales isótropos tradicionales.

En este trabajo se presenta en la primera parte una generalización de la teoría de la plasticidad isótropa clásica al campo anisótropo multifase y su extensión a la teoría de grandes deformaciones. Esta teoría anisótropa está basada en el concepto de mapeo de tensores desde el espacio anisótropo real al isótropo ficticio.

En la simulación del comportamiento constitutivo del material compuesto se utiliza la teoría de mezclas modificada conveniente, de forma de simular ciertos fenómenos que tienen lugar en este tipo de materiales.

El ejemplo de análisis presentado pone de manifiesto que el modelo constitutivo presentado resulta adecuado para realizar el análisis de materiales compuestos en régimen lineal y no lineal. La formulación es lo suficientemente completa y general y permite reproducir complejos fenómenos no lineales como el caso de la anisotropía, grandes deformaciones, plasticidad o daño que tienen lugar en los materiales compuestos.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a la empresa Construcciones Aeronáuticas S.A. (CASA) División Espacio y en especial a Pedro Luengo por su desinteresada colaboración. El primero de los autores desea también expresar su agradecimiento a la Generalitat de Catalunya por el apoyo económico prestado a través de la beca 1998TDOC00065.

## Referencias

- [1] American Society for Testing and Material. *ASTM Standards*. American Society for Testing and Materials, West Conshohocken, PA, 1994.
- [2] E. Car, S. Oller, and E. Oñate. Un modelo constitutivo elasto plástico acoplado con daño mecánico e higrométrico. Aplicación a pavimentos flexibles. *Revista Internacional de Ingeniería Estructural*, pages 19–37, 1998.
- [3] A. Green and P. Naghdi. A dynamical theory of interacting continua. *Journal Engineering Science*, 3:3–231, 1965.
- [4] J. Lubliner, J. Oliver, S. Oller, and E. Oñate. A plastic-damage model for concrete. *International Journal of Solids and Structures*, 25 No.3:299–326, 1989.
- [5] L. Malvern. *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, 1969.
- [6] E. Oñate, S. Oller, S. Botello, and J. Canet. Methods for analysis of composite material structures (in spanish). Technical Report 11, CIMNE, Barcelona, Spain, 1991.
- [7] S. Oller. Modelización numérica de materiales friccionales. Technical report, Centro Internacional de Métodos Numéricos en la Ingeniería, 1991.

- 
- [8] S. Oller, L. Neamtu, and E. Oñate. Una generalización de la teoría de mezclas clásica para el tratamiento de compuestos en serie/paralelo. *Congreso Nacional de Materiales Compuestos*, pages 433–438, 1995.
- [9] M. Ortiz and E. Popov. A physical model for the inelasticity of concrete. *Proc. Roy. Soc. London*, A383:101–125, 1982.
- [10] M. Ortiz and E. Popov. Plain concrete as a composite material. *Mechanics of Materials*, 1:139–150, 1982.
- [11] C. Truesdell and R. Toupin. *The Classical Field Theories*. Handbuch der Physik III/I – Springer Verlag, Berlin, 1960.