

TOPICOS EN EL ANALISIS NO LINEAL FISICO Y GEOMETRICO. APLICACIONES A CONSOLIDACIÓN DE SUELOS.

Di Rado, Héctor A. -- Beneyto, Pablo A. – Manzollilo, Juan E.
Universidad Nacional del Nordeste (U.N.N.E.)
Departamento de Mecánica Aplicada.
Las Heras 727 (3500, (03722)-425064, adirado@ing.unne.edu.ar)
Resistencia, ARGENTINA

Awruch, Armando M.
Universidad Federal de Rio Grande do Sul
Departamento de Mecánica Aplicada.
Av. Osvaldo Aranha 99 (90035-190, awruch@adufrgs.ufrgs.br)
Porto Alegre, BRASIL

RESUMEN

El objetivo del presente trabajo es resolver el problema de consolidación de suelos saturados basado en la teoría de Biot (1955)^{1,2} en el marco de la no linealidad física y geométrica. Especial énfasis se ha prestado a esto último por lo que la formulación se ha realizado a través de diferentes maneras. Inicialmente se usa una descripción Lagrangiana actualizada - Jaumann explícito, luego una descripción con Jaumann implícito y finalmente se intenta hacer alguna referencia al uso de una descripción con tensor de Truesdell. El modelo elasto-plástico está basado en la teoría de estados críticos y la solución del problema se consiguió empleando el Método de los Elementos Finitos. Se presentan los resultados obtenidos luego de resolver el problema de una viga bi – empotrada, el problema de consolidación unidimensional de Terzaghi y el caso de una fundación directa. La calidad de los resultados obtenidos con las diversas maneras de implementar la no linealidad geométrica dependen del caso atacado pero la descripción Jaumann implícito mostró ser la más confiable para cualquiera de ellos.

ABSTRACT

The main goal of the present paper is to solve the saturated soil consolidation issue based on Biot's theory (1955)^{1,2}, within the horizon of physical and geometrical non linear behavior. Special insight to the latter was done introducing the mathematical framework in different ways. Initially an updated Lagrangian – Jaumann explicit description was carried out, afterwards a Jaumann implicit description and finally, some reference about a Truesdell description was tempted. The elastoplastic model is based on critical state theory and the Finite Element Method was employed for solving purposes. Solutions for the cases of an encastered beam, the unidimensional Terzaghi's consolidation problem and a strip footing, are presented. The suitability of the results obtained through the manifold manners of introducing the geometrical non-linearity depends on the solved case, however the Jaumann implicit description showed itself as the most reliable for any case.

INTRODUCCIÓN

El problema de consolidación de suelos, al igual que otros casos de la mecánica, presenta índices de desplazamientos y deformaciones elevados cuando la sollicitación es debida a grandes fundaciones directas o cuando se está estudiando la estabilidad de presas de tierra. Debido a esto se justifica plenamente realizar el análisis de tensiones y deformaciones dentro del marco de la no linealidad geométrica.

El trabajo propuesto pretende comparar resultados y mostrar los problemas encontrados al emplear diferentes maneras de implementar el modelo matemático con desplazamientos finitos. Se ha utilizado una descripción Lagrangiana actualizada con la inclusión de tensor de Jaumann en forma explícita con matriz geométrica, el mismo tensor pero en forma implícita y finalmente la inclusión del tensor de Truesdell con una simplificación para mantener simétrico el sistema.

El análisis de consolidación se ha basado en la teoría de Biot^{1,2} que permite el análisis del equilibrio de las tensiones totales (EFECTIVA + POROS) y la compatibilidad de deformación durante la consolidación.

Para la no linealidad física, se ha implementado para la estructura del suelo un modelo elasto-plástico basado en la teoría de estados críticos propuesta por Zienkiewicz⁷, con algunas modificaciones propuestas por los autores⁶, la cual incluye los efectos de la cohesión y fricción además del tercer invariante de tensiones. Este modelo presenta adecuadas aptitudes para ser usado en arcillas con ligera a gran preconsolidación.

El problema será discretizado por el Método de los Elementos Finitos. Usando las funciones de interpolación de elementos de ocho nodos para las incógnitas desplazamientos y las de elementos de cuatro nodos para la incógnita presión de poros. En base a lo anterior se desarrolló un código en FORTRAN llamado FECCUND V1.1

Se presentarán finalmente, ejemplos para una viga simple, casos de consolidación unidimensional y consolidación bidimensional.

FORMULACIÓN GENERAL DEL MODELO

El problema general de consolidación.

El problema de consolidación de suelos es de tipo acoplado, teniendo en cuenta que las cargas aplicadas provocan un aumento en la presión de poros que es disipada por medio del flujo del agua a través de la estructura de suelo.

Una de las expresiones más importantes de la mecánica de suelos es aquella que relaciona las tensiones totales, $\tilde{\sigma}$, con las tensiones efectivas, $\tilde{\sigma}'$, y presión de poros, p , expresado en términos de tasas. $\tilde{\sigma}^{Pr}$, representa las tensiones originadas por las deformaciones debidas a la presión de poros.

$$\dot{\tilde{\sigma}} = \dot{\tilde{\sigma}}' - m \dot{p} - \dot{\tilde{\sigma}}^{Pr} \quad (1)$$

Por otro lado, la tasa de tensiones está relacionada con la tasa de deformaciones por medio de la expresión:

$$\dot{\tilde{\sigma}}' = D \begin{pmatrix} \dot{\tilde{\varepsilon}} \\ \dot{\tilde{\varepsilon}}^{IN} \end{pmatrix} \text{ y } \dot{\tilde{\sigma}}^{Pr} = D \dot{\tilde{\varepsilon}}^{Pr} \quad (2)$$

donde $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{IN}$ indica el vector de tasas de deformaciones específicas inelásticas, y $\dot{\tilde{\varepsilon}}^{Pr}$ es el vector de tasas de deformación provocada por la presión de poros y viene dado por

$$\dot{\tilde{\varepsilon}}^{Pr} = -m \frac{\dot{p}}{3k_s} \quad (3)$$

Donde k_s es el módulo de compresibilidad de los granos del suelo. Las expresiones (1), (2) y (3) conducen al modelo constitutivo a ser utilizado:

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} = \underline{\underline{D}} \left(\dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} - \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}^{IN}} \right) - \underline{\underline{D}} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}}^{pr} - \underline{\underline{m}} \dot{\underline{\underline{p}}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{m}} - \frac{\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{m}}}{3k_s} \right) \dot{\underline{\underline{p}}} = \dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \bar{\alpha} \dot{\underline{\underline{p}}} \quad (4)$$

donde $\bar{\alpha}$ es la constante de Biot y viene dada por $\bar{\alpha} = 1 - \frac{\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{m}}}{9k_s}$.

Esta relación constitutiva debe ser incluida en el principio de trabajos virtuales que asegura el equilibrio de la masa en su conjunto:

$$\int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \underline{\underline{D}}_{EP} \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} d\Omega - \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \frac{1}{3} \left(\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{m}} - \frac{\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{m}}}{3k_s} \right) \dot{\underline{\underline{p}}} d\Omega = \int_{\Omega} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{b}} d\Omega + \int_{\Gamma_o} \delta \underline{\underline{u}}^T \underline{\underline{t}} d\Gamma \quad (5)$$

Donde se ha usado una relación elasto-plástica entre deformaciones y tensiones efectivas.

Por otra parte, se cuenta con la ecuación de conservación de la masa de fluido:

$$\nabla^T \underline{\underline{v}} - \dot{\underline{\underline{\Psi}}} = 0 \quad (6)$$

Aquí, " $\dot{\underline{\underline{\Psi}}}$ " es velocidad de acumulación de fluido. Varios factores inciden sobre esta variable y se detallan a continuación:

- La velocidad de acumulación de fluido debido a deformaciones volumétricas.
- La velocidad de acumulación de fluido debido a cambio de volumen de los granos de suelo debido a la presión de poros.
- La velocidad de acumulación de fluido debido a la compresibilidad del fluido (k_f).
- La velocidad de acumulación de fluido debido a cambio de volumen de los granos de suelo debido a la presión

$$\dot{\underline{\underline{\sigma}}} - \dot{\underline{\underline{\sigma}}}^{pr}$$

Todos estos elementos sustituidos en (6), llevan a la ecuación:

$$\left[\frac{1-n}{k_s} + \frac{n}{k_f} - \frac{1}{(3k_s)^2} \left(\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{m}} \right) \right] \dot{\underline{\underline{p}}} - \nabla^T \underline{\underline{k}} \nabla \underline{\underline{p}} + \left(\underline{\underline{m}}^T - \frac{\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}}}{3k_s} \right) \dot{\underline{\underline{\varepsilon}}} = + \nabla^T \underline{\underline{k}} \nabla (\gamma^* z) - \frac{\underline{\underline{m}}^T \underline{\underline{D}} \underline{\underline{\varepsilon}}^{IN}}{3k_s} \quad (7)$$

Las ecuaciones (5) y (7), conforman el sistema acoplado antes mencionado y por medio de aplicación de elementos finitos podrán ser resueltos.

INTRODUCCIÓN DE DEFORMACIONES FINITAS

Cuando se desea considerar en las ecuaciones anteriores la inclusión de una descripción no lineal de los desplazamientos y deformaciones, inmediatamente se debe introducir una descripción objetiva de las tensiones a través de tensores especiales. A continuación se hará una breve reseña de los utilizados en el presente trabajo.

Descripción Lagrangiana actualizada - Jaumann (explícito)

Esta descripción está basada mayormente en la presentada por Bathe³. Reformulando el principio de los trabajos virtuales con la configuración geométrica en el tiempo "t":

$$\int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\sigma}}' \cdot d\Omega + \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{m}} \cdot p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W e \quad (8)$$

Aplicando grandes deformaciones a las tensiones efectivas teniendo en cuenta la relación entre el trabajo realizado por las tensiones de Piola Kirchoff y por las de Cauchy (ver referencia³):

$$\int_{t\Omega} \delta {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}^T \cdot {}^{t+\Delta t} \underline{\underline{s}} \cdot d\Omega + \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{m}} \cdot p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W e \quad (8 \text{ bis})$$

Donde las deformaciones finitas, $\underline{\underline{e}}$, se descomponen en una parte lineal y otra no lineal.

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{e}}_{ij} = {}_t \Delta e_{ij} = {}_t \Delta \varepsilon_{ij} + {}_t \Delta \eta_{ij} \quad (9)$$

$${}_t \Delta \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t \Delta u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial_t \Delta u_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{y} \quad {}_t \Delta \eta_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial_t \Delta u_k}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial_t \Delta u_k}{\partial x_j} \right) \quad (10)$$

Además el 2^{do} tensor de Piola Kirchoff se descompone en:

$${}^{t+\Delta t} \underline{\underline{S}} = {}_t \underline{\underline{S}} + {}_t \Delta \underline{\underline{S}} \quad \text{con} \quad {}_t \underline{\underline{S}} = {}_t \underline{\underline{\sigma}}' \quad \text{y} \quad p = {}_t p + {}_t \Delta p \quad (11)$$

Sustituyendo (9) y (11) en (8 bis) se llega a :

$$\int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \Delta \underline{\underline{S}} \cdot d\Omega + \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\eta}}^T \cdot {}_t \underline{\underline{\sigma}}' \cdot dV + \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{\alpha}} \cdot \underline{\underline{m}} \cdot \Delta p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W e - \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot {}_t \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\Omega \quad (12)$$

Asumiendo que en el primer sumando, la tensión descrita puede tomarse como el incremento de tensión de Cauchy y que la deformación puede linealizarse; considerando una relación constitutiva elasto-plástica, obtenemos:

$$\int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \underline{\underline{D}}_{EP} \cdot \Delta \underline{\underline{\varepsilon}} \cdot d\Omega - \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot \left(\underline{\underline{m}} - \frac{\underline{\underline{D}} \underline{\underline{m}}}{3k_s} \right) \Delta p \cdot d\Omega + \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\eta}}^T \cdot {}_t \underline{\underline{\sigma}}' \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W e - \int_{t\Omega} \delta \Delta \underline{\underline{\varepsilon}}^T \cdot {}_t \underline{\underline{\sigma}} \cdot d\Omega \quad (13)$$

El tensor de tasas de Jaumann viene dado por (en notación indicial):

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ip} \cdot \Omega_{pj} - \sigma_{jp} \cdot \Omega_{pi} \quad (14)$$

con:

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \dot{u}_i}{\partial x_j} - \frac{\partial \dot{u}_j}{\partial x_i} \right) \quad \text{y} \quad \dot{\sigma}_{ij} \cdot \Delta t = {}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} - {}_t \sigma_{ij} \quad (15)$$

Su introducción en esta descripción se hace a través del cálculo del incremento de tensiones. Sustituyendo (15) en (14), reagrupando términos y asumiendo:

$$\overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \cdot \Delta t = {}_t D_{ijkl} \cdot \Delta \varepsilon_{kl} \quad (16)$$

donde D_{ijkl} es la matriz constitutiva elástica o elasto-plástica. El cálculo de las tensiones se realiza:

$${}^{t+\Delta t} \sigma_{ij} = {}_t \sigma_{ij} + \overset{\nabla}{\sigma}_{ij} \cdot \Delta t + {}_t \sigma_{ip} \cdot {}_t \Omega_{pj} \cdot \Delta t + {}_t \sigma_{jp} \cdot {}_t \Omega_{pi} \cdot \Delta t \quad (17)$$

La (17) se aplica a tensiones efectivas exclusivamente.

Descripción Jaumann implícito.

Teniendo en cuenta la (14) en tasas y la (16), la expresión del tensor de Jaumann queda, en el caso de tensiones generales, de la siguiente forma:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = D_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl} + \sigma_{ip} \cdot \dot{\Omega}_{pj} + \sigma_{jp} \cdot \dot{\Omega}_{pi} \quad (18)$$

expresión que también puede ser escrita de la siguiente manera:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = D_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl} + W_{ijkl} \cdot \dot{\Omega}_{kl} \quad \text{con} \quad W_{ijkl} = \frac{1}{2} (\sigma_{il} \cdot \delta_{jk} + \sigma_{jl} \cdot \delta_{ik} - \sigma_{ik} \cdot \delta_{jl} - \sigma_{jk} \cdot \delta_{il}) \quad (19)$$

La expresión (18) puede ser escrita en forma incremental⁴:

$$\Delta \bar{\sigma}_{ij} = D_{ijkl} \cdot \Delta \varepsilon_{kl} + W_{ijkl} \cdot \Delta \Omega_{kl} \quad (20)$$

compactando la expresión anterior en forma matricial:

$$\Delta \bar{\underline{\sigma}} = \underline{S}_{(\sigma)} \cdot \Delta \bar{\underline{\varepsilon}} \quad \text{con} \quad \Delta \bar{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\sigma} \\ \Delta \bar{\sigma}^* \end{bmatrix}; \quad \Delta \bar{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta \bar{\varepsilon} \\ \Delta \bar{\omega} \end{bmatrix}; \quad \underline{S}_{(\sigma)} = \begin{bmatrix} \underline{D} & \underline{W} \\ \underline{W}^T & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Nuevamente, planteando el P.T.V. en términos de la tensión efectiva de Cauchy y presión de poros:

$$\int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot {}^{t+\Delta t} \bar{\underline{\sigma}}' \cdot d\Omega - \int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot \left[\bar{m} - \frac{\underline{D} \bar{m}}{3k_s} \right] \cdot p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W_e \quad (22)$$

pero las tensiones efectivas y presiones de poros pueden descomponerse en:

$${}^{t+\Delta t} \bar{\underline{\sigma}}' = {}^t \bar{\underline{\sigma}}' + \Delta \bar{\underline{\sigma}}' \quad \text{y} \quad {}^{t+\Delta t} p = {}^t p + \Delta p \quad (23)$$

Tomando la (21) y (23) e introduciéndolas en (22):

$$\int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot \underline{S}_{(\sigma)} \cdot \Delta \bar{\underline{\varepsilon}} \cdot d\Omega - \int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot \left[\bar{m} - \frac{\underline{D} \bar{m}}{3k_s} \right] \cdot \Delta p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W_e - \int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot {}^t \bar{\underline{\sigma}}' \cdot d\Omega \quad (24)$$

Linealizando el primer término y considerando nuevamente una relación elasto-plástica, se tiene:

$$\int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot \underline{D}_{EP} \cdot \Delta \bar{\underline{\varepsilon}} \cdot d\Omega - \int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot \left[\bar{m} - \frac{\underline{D} \bar{m}}{3k_s} \right] \cdot \Delta p \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W_e - \int_{t_{\Omega}} \delta \Delta \bar{\underline{\varepsilon}}^{-T} \cdot {}^t \bar{\underline{\sigma}}' \cdot d\Omega \quad (25)$$

donde para el cálculo del incremento de tensiones efectivas se utiliza la (21).

Descripción Truesdell implícito.

La definición del tensor de Truesdell viene dada por:

$$\overset{T}{\sigma}_{ij} = \dot{\sigma}_{ij} - \sigma_{ip} \cdot \Omega_{pj} - \sigma_{jp} \cdot \Omega_{pi} - \sigma_{ik} \cdot \dot{\varepsilon}_{jk} - \sigma_{jk} \cdot \dot{\varepsilon}_{ik} + \sigma_{ij} \cdot \dot{\varepsilon}_{kk} \quad (26)$$

al igual que en (19), la tensión de Cauchy puede despejarse de la expresión anterior y escribirse (Hughes & Winget⁴):

$$\dot{\sigma}_{ij} = \left(D_{ijkl} + \hat{D}_{ijkl} \right) \dot{\epsilon}_{kl} + W_{ijkl} \cdot \dot{\omega}_{kl} \quad (27)$$

$$\text{con } \hat{D}_{ijkl} = -\sigma_{ij} \cdot \delta_{kl} + \frac{1}{2} (\sigma_{il} \cdot \delta_{jk} + \sigma_{jl} \cdot \delta_{ik} + \sigma_{ik} \cdot \delta_{jl} + \sigma_{jk} \cdot \delta_{il}) \quad (28)$$

que matricialmente es:

$$\hat{\underline{D}} = \begin{vmatrix} \sigma_{11} & -\sigma_{11} & \sigma_{12} \\ -\sigma_{22} & \sigma_{22} & \sigma_{12} \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \end{vmatrix} \quad (29)$$

En forma incremental, la (27) queda:

$$\Delta \sigma_{ij} = \left(D_{ijkl} + \hat{D}_{ijkl} \right) \Delta \epsilon_{kl} + W_{ijkl} \cdot \Delta \omega_{kl} \quad (30)$$

la que también puede ser escrita en forma matricial:

$$\hat{\underline{\sigma}} = \underline{T}_{(\sigma)} \cdot \underline{\Delta \epsilon} \quad \text{con } \underline{T}_{(\sigma)} = \underline{T}_{1(\sigma)} + \underline{T}_{2(\sigma)} = \begin{vmatrix} \underline{D} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \hat{\underline{D}} & \underline{W} \\ \underline{W}^T & \hat{\underline{D}}^* \end{vmatrix} \quad \text{y } \hat{\underline{D}}^* = \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \quad (31)$$

Claramente a través de (29), puede observarse que la matriz $\underline{T}_{2(\sigma)}$ no es simétrica. Para evitar la solución de un sistema de este tipo se puede recurrir a dos posibles simplificaciones: Se desprecian las deformaciones volumétricas con lo que la (29) se transforma en:

$$\hat{\underline{D}} = \begin{vmatrix} 2\sigma_{11} & 0 & \sigma_{12} \\ 0 & 2\sigma_{22} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{12} & \frac{\sigma_{11} + \sigma_{22}}{2} \end{vmatrix} \quad (32)$$

Si se considera que la influencia de las deformaciones volumétricas puede ser importante, se puede recurrir al artificio de trasladar su efecto como carga al miembro de la derecha pero tomada en el tiempo anterior.

Al igual que lo realizado para Jaumann, puede sustituirse la relación constitutiva (31) para tensiones efectivas en el principio de trabajos virtuales obteniendo así:

$$\int_{t_\Omega} \delta \underline{\Delta \epsilon}^{-T} \cdot \underline{T}_{(\sigma)} \cdot \underline{\Delta \epsilon} \cdot d\Omega - \int_{t_\Omega} \delta \underline{\Delta \epsilon}^{-T} \cdot \left[\underline{m} - \frac{\underline{D} \underline{m}}{3k_s} \right] \cdot \underline{\Delta p} \cdot d\Omega = {}^{t+\Delta t} \Delta W_e - \int_{t_\Omega} \delta \underline{\Delta \epsilon}^{-T} \cdot {}^t \underline{\sigma} \cdot d\Omega \quad (33)$$

Expresión que también puede ser linealizada. Los incrementos de tensiones efectivas se calculan según (31).

APLICACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Tras la aplicación de elementos finitos, el sistema constituido por (5) y (7) queda, luego de integrar en el tiempo a través del parámetro α y expresar todo en forma incremental⁵:

$$\begin{bmatrix} \tilde{K}^{(e)} & -\tilde{L}^{(e)} \\ -\tilde{L}^{(e)T} & -\left(\tilde{S}_1^{(e)} + \alpha\Delta t \tilde{H}^{(e)}\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{U}^{(e)} \\ \Delta \tilde{p}^{(e)} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \Delta t \tilde{H}^{(e)} \begin{Bmatrix} \tilde{U}^{(e)} \\ \tilde{p}^{(e)} \end{Bmatrix}_t + \begin{Bmatrix} \Delta \tilde{P}^{(e)} \\ \Delta \tilde{P}^{(e)} \end{Bmatrix} \quad (34)$$

En (33), las incógnitas del problema \tilde{u} y \tilde{p} son interpolados en términos de los valores nodales de esas incógnitas, usando funciones de interpolación \tilde{N}^u y \tilde{N}^p respectivamente, con las primeras siendo bicuadráticas y las segundas bilineales. El significado de cada matriz puede verse en la referencia⁵.

La consideración de grandes deformaciones solo ha sido aplicada a la primera de las ecuaciones mostradas en (34) y para cada uno de los casos considerados, esta expresión debe modificarse según:

Lagrangiana actualizada - Jaumann (explícito)

Tomando como base la expresión (13), solo debe agregarse a la primera de (34) la denominada matriz geométrica:

$$\left(\tilde{K}^{(e)} + \tilde{K}_G^{(e)}\right) \Delta \tilde{U}^{(e)} - \tilde{L}^{(e)} \Delta \tilde{p}^{(e)} = \Delta \tilde{P}^{(e)} \quad (35)$$

con:

$$\tilde{K}_G^e = \int_{\tilde{\Omega}} \tilde{B}_G^T \tilde{\sigma}_t \tilde{B}_G \, d\tilde{\Omega} \quad (36)$$

Donde \tilde{B}_G es derivada de las funciones de interpolación de desplazamientos y $\tilde{\sigma}_t$ es tensor de Cauchy en la configuración "t". Cabe aclarar, que la ecuación de flujo no sufre alteraciones por el agregado de la no linealidad geométrica.

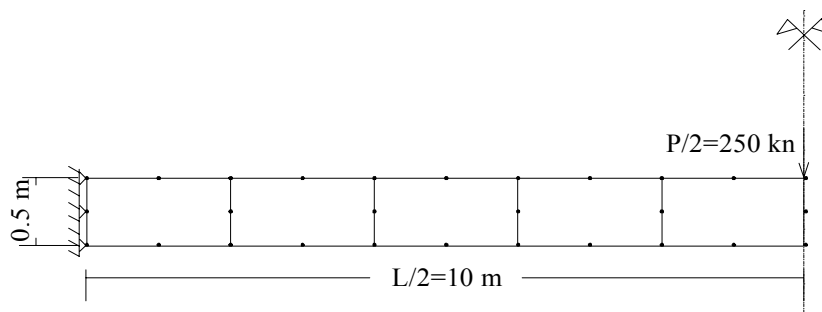
Jaumann implícito y Truesdell implícito.

Como se puede deducir de (24) y (33), debe cambiarse la relación constitutiva en la primera de (34) y tenerse en cuenta (21) y (31) para el cálculo del incremento de tensiones. Esto lleva a que la forma general de (34) se conserve con los reparos mencionados.

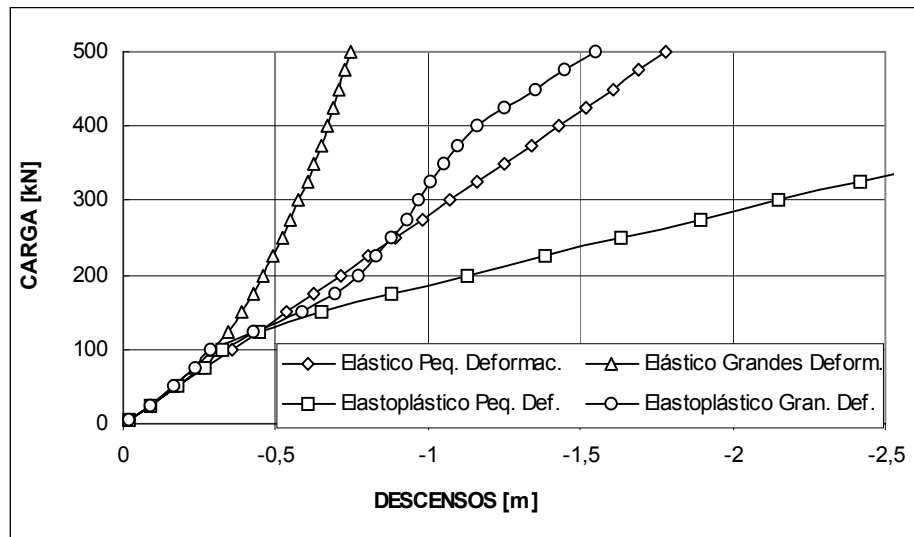
EJEMPLOS DE APLICACIÓN

Viga bi-empotrada.

Este ejemplo es presentado por dos razones fundamentales. La primera es que la solución en grandes deformaciones ha sido ya publicada extensamente y sirve para validar resultados y la segunda es que este es el único caso entre los elegidos en los que todos los sistemas de modelado de grandes deformaciones arrojaron



respuesta. El modelo elasto-plástico usado para este caso ha sido el de Von Mises y no se consideró endurecimiento (plástico perfecto).

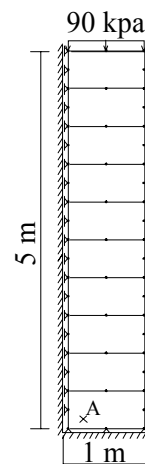
Fig.1 Viga Bi empotradaDatos:E= módulo de elasticidad = $1,2 \cdot 10^7$ t/m² μ = módulo de Poisson = 0,3 σ_f = Tensión de fluencia = $3 \cdot 10^4$ t/m²**Fig.2: Descensos – carga para Viga bi empotrada**

Los resultados consignados en la fig. 2, son perfectamente coincidentes para los casos de Jaumann explícito, implícito linealizado y Triesdell linealizado coincidiendo con los mostrados en referencia⁸.

Consolidación unidimensional de Terzaghi.

Este ejemplo permite analizar el problema dentro del umbral de la elasticidad. En el gráfico de la Fig.4, solo se ha representado la solución para Jaumann linealizado.

E= módulo de elasticidad = 100 Kpa
 μ = módulo de Poisson = 0.3
 K_h = Permeab. Horiz. = 0.0 m/día
 K_v = Permeab. Horiz. = $8.64 \cdot 10^{-4}$ m/día
 C = cohesión = 100 Kpa
 ϕ = Fricción interna = 0.1745 rad
 Carga aplicada instantáneamente.
 A: punto donde se toma la presión de poros.

**Fig.3: Caso unidimensional de Terzaghi.**

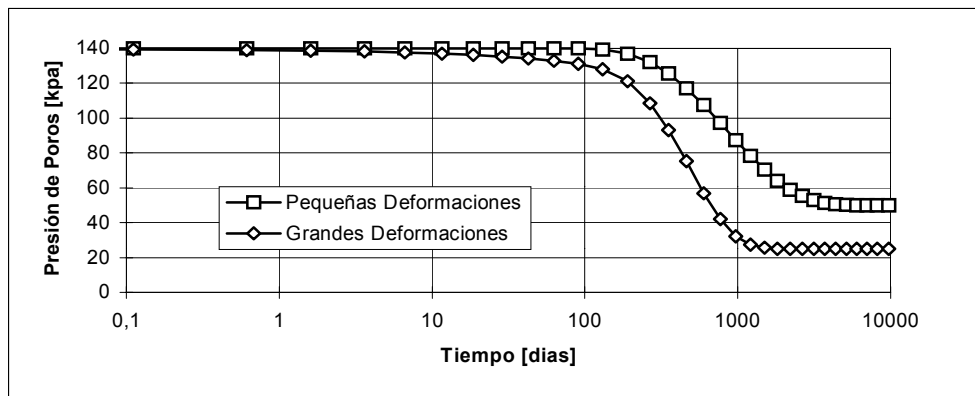


Fig.4: Presión de poros - tiempo

Fundación corrida.

Finalmente y como último caso, se presenta el de la fundación corrida. Para el, se ha usado un modelo elasto-plástico basado en estados críticos y mostrado detalladamente en la referencia⁶. Se muestran diagramas de carga - descensos para diferentes casos de preconsolidación. En todos ellos, la solución es con Jaumann linealizado.

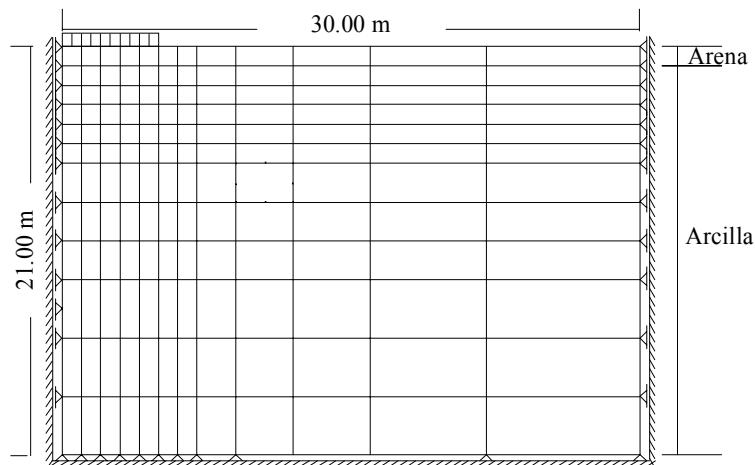


Fig.5: Fundación corrida.

Arena: Hiperelástica.

E = mód. de elasticidad = 5000 kpa

μ = módulo de Poisson = 0.0

γ = Peso específico = 2.0 t/m³

C = cohesión = 10 kpa

ϕ = Fricción interna = 0.5236 rad.

Carga:

120 Kpa. Aplicada en 90 días.

Arcilla: Elasto-plástica.

E = mód. de elasticidad = 1000 kpa

μ = módulo de Poisson = 0.40

γ = Peso específico = 2.0 t/m³

C = cohesión = 50 kpa

ϕ = Fricción interna = 0.2618 rad.

$k_v = k_h$ = Permeab.. = 8.00*10⁻⁵m/día

A: Pto. de Gauss de lectura.

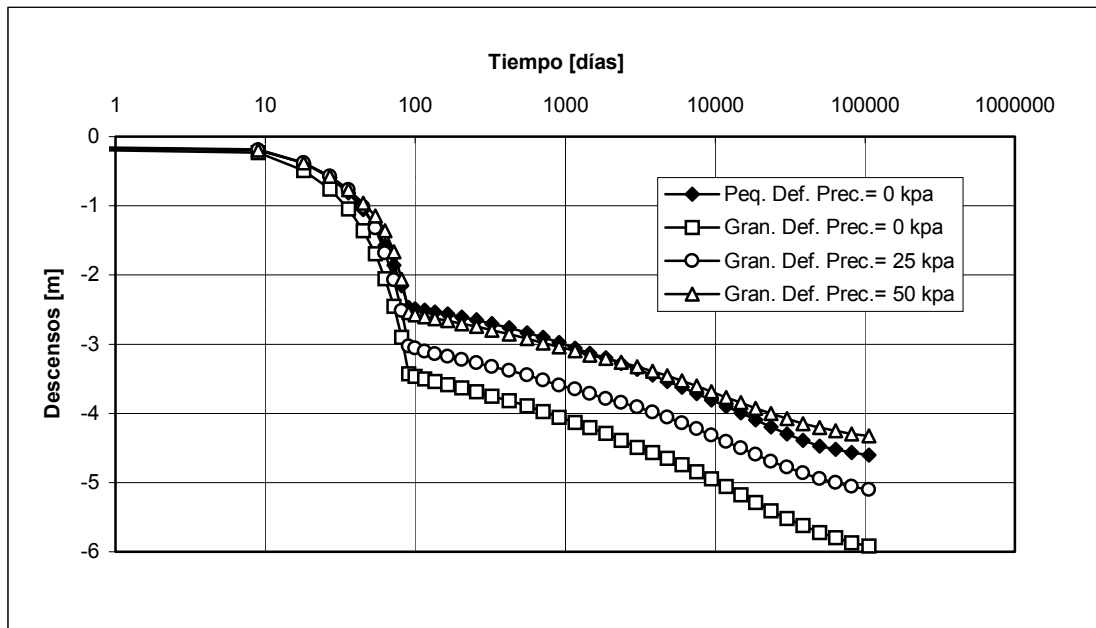


Fig.6: Tiempo – Descenso para fundación corrida.

CONCLUSIONES

- Se han presentado diversas posibilidades para la consideración de grandes desplazamientos y deformaciones en problemas de consolidación de suelos saturados.
- El caso de la viga bi-empotrada ha sido el único en el que se ha podido obtener resultados adecuados para todos los tipos de descripciones y tanto para los casos elástico como elasto-plástico.
- Con la descripción que contempla la inclusión de la matriz geométrica, solo se ha podido obtener resultados para el caso de la viga bi-empotrada y no para consolidación. El problema radicó en un aumento descontrolado de las tensiones tangenciales que finalmente distorsionan a los elementos.
- La implementación del tensor de Truesdell en el análisis, no mostró ser adecuada para ningún caso de consolidación siendo también el descontrol de las tensiones tangenciales el detonante de la falla.
- La inclusión de un sistema de referencia co-rotacional debería ser probado especialmente para Truesdell a los fines de evitar los problemas mencionados.
- Con la implementación del tensor de Jaumann en forma implícita y con linealización de la matriz de rigidez, se ha podido resolver todos los casos aquí propuestos. La metodología ha sido simple y los resultados cualitativamente adecuados.

AGRADECIMIENTOS

Los autores desean expresar su agradecimiento a los departamentos de Mecánica Aplicada y Estabilidad de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional del Nordeste, a AFIN (asociación de apoyo Facultad de Ingeniería) y a todos los que de una u otra manera han colaborado.

REFERENCIAS

- [1] BIOT, M. A. General theory of three - dimensional consolidation. J. of Applied Physics, V. 12, p.p. 155 - 164 (1941).

- [2] BIOT, M. A. Theory of deformation of a porous viscoelastic anisotropic solid, *J. of Applied Physics*, V. 27, p.p. 459 - 467 (1956).
- [3] BATHE, K. J and CIMENTO, A. P. Some Practical Procedures for the solution of Nonlinear Finite Element Equations. *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, V22, p.p. 59-85 (1984).
- [4] HUGHES, T. J. R. & WINGET, J. M., Finite rotations effects in numerical integration of rate constitutive equations arising in large deformation analysis. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, V.15, p.p. 1862-1867 (1980).
- [5] DI RADO, H. A., AWRUCH, A. M. & BENEYTO P. A.” Consolidation in Saturated Porous Media. Implementation and Numerical Problems”. *Computational Mechanics. New Trends and Applications* (Ed. By S. R. Idelshon, E. Oñate & E. Dvorkin), Part VIII (Application Fields), Section 5 (Geomechanics), International Center for Numerical Methods in Engineering (CIMNE); also presented in the Fourth World Congress on Computational Mechanics organized by the International Association in Computational Mechanics (IACM) held in Buenos Aires (Argentina) on June 29 – July 02, (1998)
- [6] DI RADO H.A. & AWRUCH, A.M. Un modelo elasto-plástico con grandes deformaciones para suelos cohesivos basado en la teoría de los estados críticos. *COPAINGE* .Tomo 1. p.p. 37 a 47. (1997)
- [7] ZIENKIEWICZ, O. C.; HUMPHESON, C. and LEWIS, R. W. Associated and non-associated visco-plasticity and plasticity in soil mechanics. *Geotechnique*, V.25, p.p. 671-689 (1975).
- [8] KANCHI, M.B.; ZIENKIEWICZ, O. and OWEN D.J. . The visco-plastic approach to problems of plasticity and creep involving geometrical non- linear effects. *International Journal For Numerical Methods in Engineering*. Vol.12, 169-181 (1978)