

# ANALISIS DE SENSIBILIDAD LOCAL Y UNICIDAD APARENTE EN EL PROBLEMA DE ESTRICCIÓN DE BARRAS METÁLICAS

C. García-Garino\*, A. Mirasso†, S. Raichman\*\* and J. M<sup>a</sup> Goicolea‡

\* LAPIC, ITU, National University of Cuyo & CONICET  
Casilla de Correo 947, 5500, Mendoza, Argentina  
e-mail:cgarcia@pascal.uncu.edu.ar

† LAPIC & IMPSA  
Carril Rodriguez Peña 2451  
5503 San Francisco del Monte, Godoy Cruz (Mza), Argentina  
e-mail:amirasso@impsa.com.ar

## RESUMEN

Cuando se somete a una probeta metálica cilíndrico circular al ensayo de tracción simple es necesario imponer una ligera imperfección con el fin de garantizar que la estricción se concentre en la zona central. En el trabajo se estudia la influencia de las imperfecciones sobre los resultados del problema en general y la ecuación constitutiva en particular. Para ello los autores han introducido el estudio de sensibilidad local que conduce a la unicidad aparente de los resultados. Se discute además el papel que la relación de estricción  $\frac{D}{D_0}$  puede tener en el modelado del problema.

## ABSTRACT

A slight imperfection is usually imposed in a circular cylindrical metallic specimen in order to get that necking takes place in the central zone. In the paper the sensitivity of the problems in general and constitutive law in particular to imperfections is discussed. In order to perform the study the so called local sensitivity analysis is performed and the *apparent uniqueness* result is outlined. Finally the role of  $\frac{D}{D_0}$  parameter on the governing equations is discussed.

## INTRODUCCION

En muchos problemas de interés industrial como resultan el conformado de metales o problemas de choque o impacto es necesario conocer el comportamiento del material en régimen de grandes deformaciones. Para ello es necesario ensayar el material y una de las formas más simples y efectivas es realizar el ensayo de tracción simple.<sup>1,2</sup>

Sin embargo en presencia de grandes deformaciones hay que *interpretar* los resultados del ensayo y para ello resultan necesarios estudios numéricos.<sup>6,10</sup> En el MECOM96 se presentó un panorama del problema<sup>13</sup> discutiendo el estado del arte, los resultados analíticos conocidos, la simulación numérica del problema, etc. Una de las características distintivas del ensayo es la marcada estricción que se produce generalmente en la zona central.

Desde el punto de vista numérico es necesario introducir una ligera imperfección con el fin de obligar a que las deformaciones se concentren y aparezca la imperfección. En el MECOM anterior los autores sealaban la importancia de investigar la sensibilidad de los resultados respecto de las imperfecciones y presentaron algunos resultados preliminares<sup>14</sup> e indagaron acerca de la unicidad de los resultados.

A partir de dichos resultados se pudo mostrar, mediante el estudio local de sensibilidad a las imperfecciones, que la ecuación constitutiva está afectada solo de manera muy indirecta, en lo que los autores denominaron *unicidad aparente*,<sup>15</sup> que sin embargo parece suficiente a los fines de conocer la ecuación constitutiva.

Recientemente los autores han profundizado el estudio local de sensibilidad a las imperfecciones y se ha sugerido la existencia de un parámetro característico definido por la relación de estricción  $\frac{D}{D_0}$  que gobierna todo el problema.<sup>16</sup>

Resulta difícil precisar si efectivamente es posible gobernar un problema relativamente complejo como el de la estricción, en donde se existe un estado tridimensional de tensiones, solo con un parámetro escalar adimensional. Para ello es necesario reflexionar acerca del problema, realizar estudios experimentales, interpretar sus resultados y, además revisar los resultados analíticos disponibles.

## REVISION DE LOS RESULTADOS ANALITICOS

La respuesta del ensayo de tracción simple puede estudiarse en función de la carga  $P$  y de la deformación logarítmica  $\varepsilon$  ya que ambas magnitudes se miden con relativa facilidad en el ensayo. Durante el mismo se pueden sealar dos etapas bien marcadas: una trayectoria precrítica que muestra un comportamiento homogéneo seguida por la respuesta poscrítica después de alcanzar la carga máxima. Para el primer caso (precrítico) es suficiente conocer los valores promedios y la deformación logarítmica  $\varepsilon_{zz}$  y la tensión promediada  $\sigma_{zz} = \frac{P}{A}$  describen adecuadamente el ensayo:

$$\sigma_{zz} = \frac{P}{A}; \quad \varepsilon_{zz} = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} \quad (1)$$

deonde  $P$  es la carga medida en el ensayo,  $l$  y  $l_0$  las longitudes original y actual de la probeta respectivamente,  $A$  es el área actual que se calcula facilmente a partir del radio actual  $r$  medido en el experimento.

Para el caso poscrítico puede observarse una estricción bien marcada en la zona central en la cual existe un estado triaxial de tensiones y las magnitudes descritas en la ec. (1) ya no resultan variables válidas para definir el problema. Luego, con el fin de indentificar los parámetros que gobiernan el problema, se resumen algunos resultados analíticos disponibles en la literatura:<sup>1,2</sup>

- i) Las deformaciones radiales strains permanecen constantes a través del cuello.<sup>1,2</sup>
- ii) El flujo plástico sigue la ley de Von Mises y el comportamiento es incompresible.
- iii) Existen condiciones de simetría radial y longitudinal en la zona del cuello.

La constancia de las deformaciones radiales a través del cuello no es un resultado facil de intuir y ademas constituye una de las características distintivas del problema. Este resultado se debe a experimentos de Davidenkov and Spiridinova<sup>2</sup> quienes se basaron en estudios de metallografía cuantitativa realizados a partir de la medida del tamaño de grano. Este resultado había sido propuesto previamente por Bridgman.<sup>1</sup>

A partir de las hipótesis anteriores surge:

$$\varepsilon_p = \varepsilon_{zz} = -2 \ln \frac{D}{D_0} \quad (2)$$

La deducción detallada de este importante resultado puede encontrarse en los trabajos citados de Bridgman<sup>1</sup> y Davidenkov and Spiridinova<sup>2</sup> y también en los trabajos de Goicolea y coautores.<sup>6, 10, 13</sup>

De la ec. (3) surge que la deformación plástica efectiva es constante en la sección del cuello. Además es inmediato observar que la tensión de fluencia  $Y$  también es constante en dicha zona. Este resultado fue confirmado experimentalmente por Goicolea<sup>6</sup> para lo cual se basó en ensayos de microdureza en la sección del cuello.

A partir del criterio de Von Mises y las hipótesis señaladas puede escribirse la tensión de fluencia  $Y$  en función de las componentes longitudinal y radial del tensor de tensiones de Cauchy:

$$Y = \sigma_{zz} - \sigma_{rr} \quad (3)$$

La tensión longitudinal  $\sigma_{zz}$  resulta:

$$\sigma_{zz} = Y + \sigma_{rr} \quad (4)$$

Como se ha señalado la tensión de fluencia  $Y$  es constante a través del cuello. Por otro lado tensión radial  $\sigma_{rr}$  es nula en la superficie exterior de la probeta y máxima en el centro y por lo tanto la tensión radial promedio  $\bar{\sigma}_{rr}$  es no nula. Del promedio de la ec. (4) surge:

$$\bar{\sigma}_{zz} = Y + \bar{\sigma}_{rr} > Y \quad (5)$$

La ec. (5) muestra que la tensión de fluencia  $Y$  se aparta considerablemente de la tensión longitudinal promediada  $\bar{\sigma}_{zz}$ , como se muestra en la figura 1, y constituye una de las características distintivas del problema. De esta forma se muestra que los resultados obtenidos directamente del experimento no son válidos para indentificar los parámetros del material y deben ajustarse.

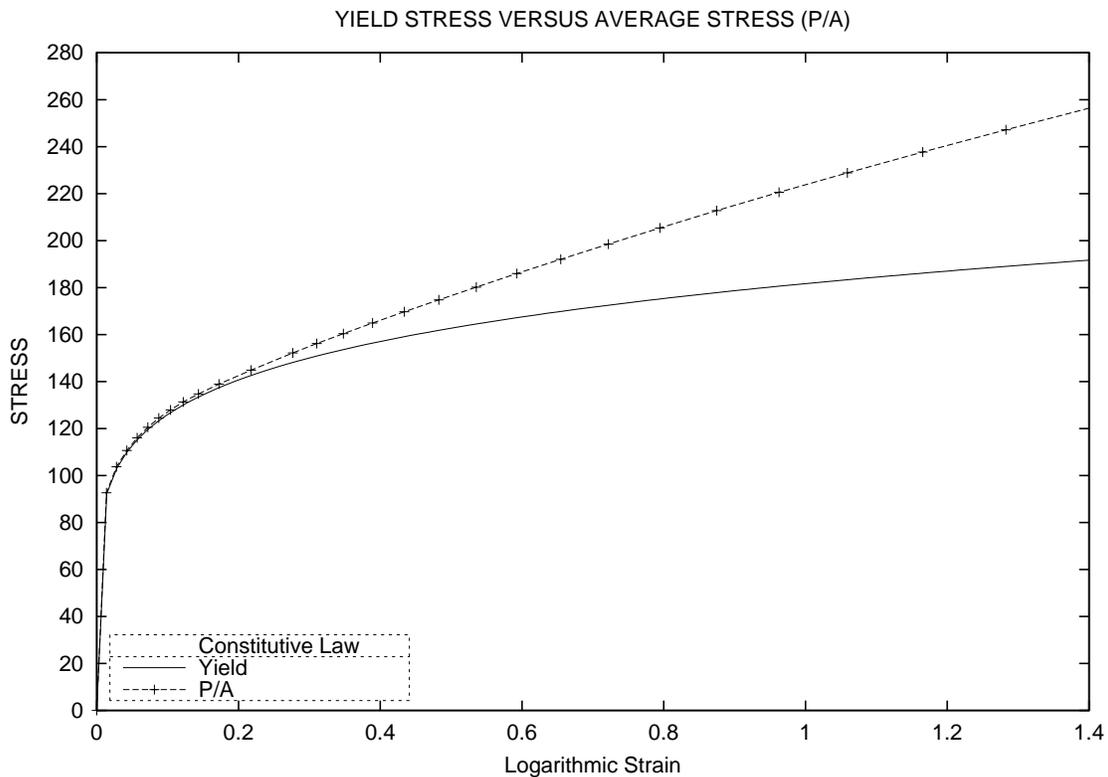


Figura 1: Evolución de  $\bar{\sigma}_{zz}$  y  $Y$  evolution

En la literatura se han propuesto diferentes esquemas para ajustar los resultados. Wilkins<sup>17</sup> sugirió un esquema iterativo que ha sido utilizado, entre otros, por Norries et al.<sup>5</sup> Con el fin de evitar el proceso iterativo Goicolea<sup>7</sup> propuso utilizar el factor de corrección debido a Bridgman<sup>1</sup> que se muestra en las ec. (6) y (7).

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = \left(1 + \frac{2}{\sqrt{\varepsilon_{zz}-0.1}}\right) \ln \left(1 + \frac{\sqrt{\varepsilon_{zz}-0.1}}{2}\right) \quad \text{if } (\varepsilon_{zz} > 0.1) \quad (6)$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y} = 1 \quad \text{if } (\varepsilon_{zz} \leq 0.1) \quad (7)$$

## DISCUSION DE LOS RESULTADOS ANALITICOS

Con en fin de identificar parámetros de interés para el estudio se analizan los resultados discutidos en el punto anterior.

De la ec. (2) surge que la deformación plástica efectiva  $\varepsilon_p = \varepsilon_{zz}$  depende solamente de la relación  $\frac{D}{D_0}$ . El área actual  $A$  también depende sólo del diámetro actual  $D$  y también puede reescribirse en función de la relación  $\frac{D}{D_0}$  too.

Como la tensión de fluencia  $Y$  es una función de la deformación plástica efectiva dada por la ec.(4) también depende del mismo parámetro. Finalmente cabe sealar que el factor de ajuste  $\frac{\bar{\sigma}_{zz}}{Y}$  también se expresa en función de la relación  $\frac{D}{D_0}$ .

El análisis de estos resultados muestra que el parámetro  $\frac{D}{D_0}$  que define el tamaño de la estricción juega un rol determinante en la evolución del problem y puede ser identificado como una de las variables que identifican el problema.

Una cuestión central surge inmediatamente: Puede expresarse la carga  $P$  como una función implícita de la relación  $\frac{D}{D_0}$ ?

$$P = P\left(\frac{D}{D_0}\right) \quad (8)$$

La ec. (8) sugiere que la carga  $P$  y, consecuentemente, la ecuación constitutiva dependen, del parámetro  $\frac{D}{D_0}$ .

En la práctica se suele imponer una ligera disminución en el diámetro central con el fin de garantizar que la estricción tenga lugar en dicha zona. Luego parece conveniente analizar la sensibilidad del parámetro  $\frac{D}{D_0}$  respecto de las imperfecciones impuestas al problema.

## ANALISIS DE SENSIBILIDAD DEL PARAMETRO $\frac{D}{D_0}$

Con el propósito de estudiar la sensibilidad del parámetro  $\frac{D}{D_0}$  e indirectamente del problema frente a las imperfecciones se propone un experimento numérico. Para ello se simula numéricamente el ensayo de tracción simple a una barra metálica cilíndrico circular<sup>6</sup> a la cual se le impone una ligera imperfección en la zona central.

Para ello se modela un barra ligeramente cónica en lugar de la cilíndrica que constituye el caso *perfecto* con radio  $r=8.1$  mm. Para las barras imperfectas se hacer variar el radio central en  $z = 0$  desde  $r^i = 7.95$  hasta  $r^i = 8.1$ , donde  $r^i$  indica el radio imperfecto, y el radio en  $z = l$  se mantiene fijo e igual al del caso perfecto. La longitud inicial de la barra  $l_0$  es 37.5 mm y solo se estudia un cuarto de la misma debido a las condiciones de simetría del problema. Los desplazamientos longitudinales  $u_z$  son nulos en  $z = 0$  y son una función  $u_z = u_z(t)$  impuesta en  $z = l$ , donde la condición de contorno permite los movimientos radiales.

El material de la barra es un aluminio HE30 y sus propiedades mecánicas son  $E = 67$  Gpa,  $\mu = 0.3$ ,  $A = 181.7$  Mpa y  $n = 0.159^6$  las cuales se han obtenido a partir de ensayos experimentales. La función de endurecimiento no lineal resulta:

$$Y(\varepsilon_p) = A\varepsilon_{eq}^n \quad (9)$$

Los resultados numéricos se han obtenido utilizando el código de elementos finitos no lineal SOGDE<sup>18</sup> capaz de tener en cuenta el problema de plasticidad con grandes deformaciones. Para ello se han resuelto diferentes problemas para el caso perfecto y para cada uno de las geometrías imperfectas. La malla de elementos finitos empleada posee 393 elementos cuadriláteros lineales con presión constante y está convenientemente refinada en la zona central.

En la práctica se acostumbra a realizar el estudio de sensibilidad de los resultados de manera *global*. Para ello la variable de interés se analiza en función de alguna magnitud global adecuada, que en el caso del problema de la estricción es la deformación ingenieril  $\frac{\Delta l}{l_0}$ . La figura 2 muestra la evolución del parámetro  $\frac{D}{D_0}$ , y la figura 3 la evolución de la carga  $P$  en función de en función de la deformación ingenieril, para cada uno de las geometrías estudiadas.

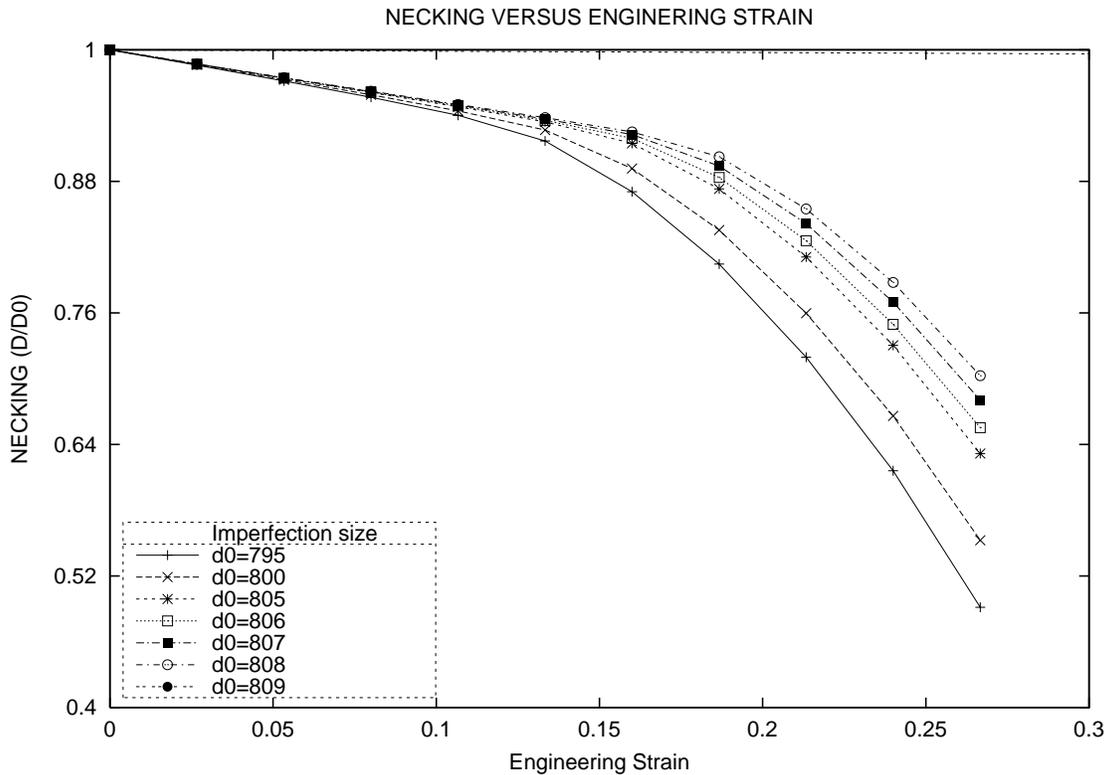


Figura 2: Evolución de la estricción en función de las deformaciones ingenieriles para las distintas geometrías

Como surge de la figura se confirman algunos resultados conocidos en la literatura,<sup>7-9</sup> que muestran que el problema es altamente sensible frente a las imperfecciones impuestas.

## Análisis Local

A partir de los resultados obtenidos previamente por los autores<sup>14-16</sup> se analiza el llamado *análisis local* que relaciona la carga  $P$  en función una variable independiente local.

La elección de la variable local no es trivial y bien podría adoptarse el parámetro  $\frac{D}{D_0}$ , sin embargo, y teniendo en cuenta que el interés del problema es conocer la ecuación constitutiva, se selecciona la deformación logarítmica  $\varepsilon_{zz} = -2 \ln \frac{D}{D_0}$  at  $z = 0$  ya que depende solo del parámetro  $\frac{D}{D_0}$  como muestra la ec.(2), y luego es apropiada para el estudio local.

La figura 4 muestra un resultado destacable y quizás sorprendente: todos los especímenes estudiados siguen prácticamente la misma curva. Si se desprecian las ligeras diferencias que aparecen en el entorno de la carga máxima *aparentemente* se ha recuperado la unicidad de la solución para el problema, un resultado que, hasta el conocimiento de los autores, no aparece citado en la literatura.

Sin embargo un análisis cuidadoso de la figura 4 revela que la deformación logarítmica alcanza diferentes valores para cada uno de los distintos casos estudiados. Luego la unicidad solo es aparente y por ello en un trabajo anterior los autores la denominaron *unicidad aparente*.<sup>15</sup>

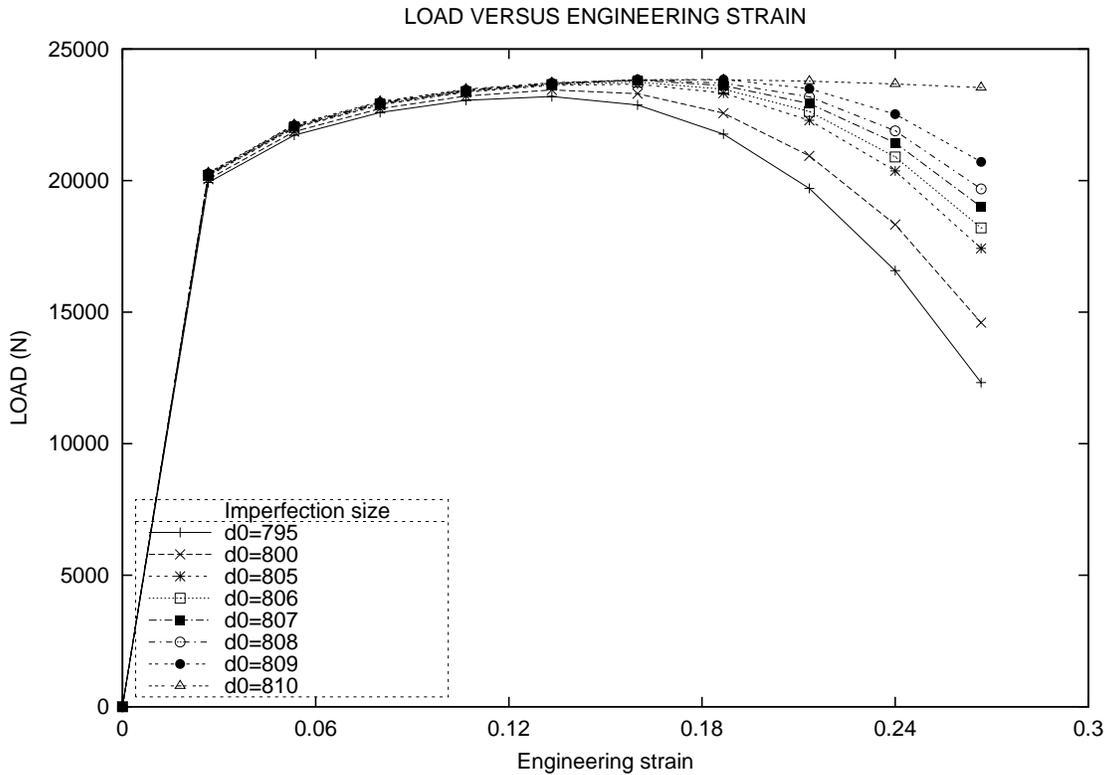


Figura 3: Evolución de la Carga  $P(N)$  en función de la deformación ingenieril  $\frac{\Delta l}{l_0}$

Los diferentes valores de la deformación logarítmica alcanzados para los distintos casos se explican fácilmente a partir de la ec. (2) y de la figura 2. La ec.(2) muestra que la deformación logarítmica  $\varepsilon_{zz}$  es una función de la relación  $\frac{D}{D_0}$  que, como muestra la figura 2 depende del tamaño de las imperfecciones. Luego la deformación logarítmica  $\varepsilon_{zz}$ , muestra gran sensibilidad al tamaño de las imperfecciones.

Del estudio realizado se pueden obtener dos importantes conclusiones:

i) La curva  $P - \varepsilon_{zz}$  no depende de las imperfecciones, si se deja de lado el rango alcanzado en cada caso, y consecuentemente la ecuación constitutiva parece no depender de las imperfecciones.

ii) En el sentido de la pregunta de la ec. (8) bien puede considerarse a la carga  $P$  como una función de  $\frac{D}{D_0}$ . El hecho que un estado de tensiones tridimensional, bastante complejo, característico de la zona de la estricción pudiera considerarse gobernado por el parámetro escalar  $\frac{D}{D_0}$  no resulta sencillo de explicar y, en opinión de los autores, merece un análisis más profundo. Para ello es necesario contar con estudios experimentales y revisar los resultados analíticos disponibles en la literatura con el fin de obtener un conocimiento más profundo del problema.

Los resultados obtenidos muestran que el ensayo de tracción simple es una herramienta muy valiosa para caracterizar la respuesta constitutiva de los metales en régimen de grandes deformaciones ya que las curvas  $P - \varepsilon_{zz}$  no resultan muy sensibles a las imperfecciones iniciales. Si el rango de valores cubierto por la historia  $P - \varepsilon_{zz}$  fuera insuficiente el problema se reprocesa aumentando el tamaño de la imperfección inicial.

## CONCLUSIONES

La ecuación constitutiva no parece ser sensible al tamaño de las imperfecciones, excepto en el rango de valores que alcanza la misma, como surge del análisis del estudio de sensibilidad local.

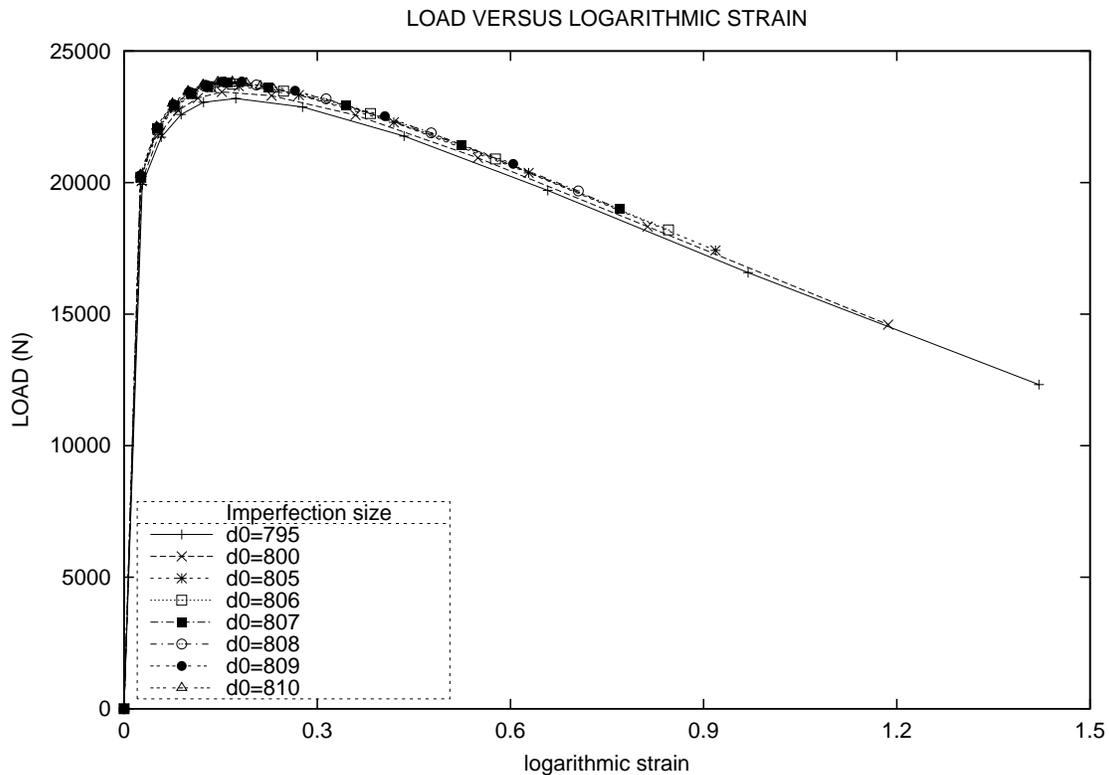


Figura 4: Comparación de la carga en función de las deformaciones logarítmicas en  $z = 0$  para las diferentes geometrías

El ensayo de tracción simple resulta una valiosa herramienta para caracterizar la respuesta constitutiva de los materiales en presencia de grandes deformaciones.

Los resultados obtenidos sugieren que la carga  $P$  y otras variables de interés puede expresarse en función de la relación  $\frac{D}{D_0}$ . Con este propósito se deben realizar estudios adicionales.

Debería investigarse la sensibilidad frente a otro tipo de imperfecciones.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado parcialmente por el Area de Física del Instituto de Ciencias Básicas de la Universidad Nacional de Cuyo y el programa de cooperación con América Latina de la Universidad Politécnica de Madrid, a través del proyecto AEL.

## Referencias

- [1] P.W. Bridgman, The Stress Distribution at the Neck of a tensile Specimen, *Trans. Amer. Soc. Metals*, 32, 553-574, 1944.
- [2] N. Davidenkov and N. Spiridinova, Analysis of the State of Stress in the Neck of a Tension Test Specimen., *Proc. Amer. Soc. Testing Mater.*, 46, 1147-1158 (1946).
- [3] W. Chen, Necking of a Bar, *Int. J. Sol. Struct.*, 7, 685-717, (1971).

- [4] A. Needleman, A Numerical Study of necking in circular cylindrical bars, *J. Mech. Phys. Solids*, **20**(2), 111-127 (1972).
- [5] D. M. Norris Jr., B. Moran, J. K. Scudder and D. F. Quinñones, A Computer Simulation of the Tensile Test, *J. Mech. Phys. Solids*, **26**, 1-19 (1978).
- [6] J. M. Goicolea, Numerical Modelling in Large Strain Plasticity with Application to Tube Collapse Analysis., Ph.D. Thesis, Univ. of London, (1985).
- [7] J. O. Hallquist, User's Manual for DYNA2D - An explicit Two-dimensional Hydrodynamic Finite element code with Interactive rezoning, University of California, Lawrence Livermore National Laboratory, report UCID-18756, Rev. 1, 1982.
- [8] J.C. Simo, A Framework for Finite Strain Elastoplasticity based on maximum Plastic Dissipation and the Multiplicative Decomposition: Part II, Computational Aspects, *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, **68**, 1-31 (1988).
- [9] J. Ph. Ponthot, Metodologie Eulerien Lagrangienne et test par element finit pour l'etude de grandes deformations termomecaniques. Aplicacions au problémens de mis en forme, Ph. D. Tesis (in french), LTAS, University of Liege (1995).
- [10] J. M. Goicolea, F. Gabaldón y C. García Garino, Interpretación de la Estricción en el Ensayo de Tracción empleando modelos hipoeelásticos e hiperelásticos, en *Métodos Numéricos en Ingeniería*, Doblaré M. et al, eds pp 875, vol 1, (SEMNI, Barcelona, 1996).
- [11] R. Hill, A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids, *J. Mech. Phys. Solids*, **6**, 26-34 (1980).
- [12] V. Tvergaard, Bifurcation and Imperfection Sensivity at Necking Instabilities, *ZAMM*, **60**, 26-34, 1980.
- [13] C. García Garino, J. M. Goicolea y F. Gabaldón, Simulación Numérica del Ensayo de Tracción Simple, *Mecánica Computacional*, G. Etse y B. Luccioni (Compiladores), **17**, 425-436, (1996)
- [14] C. García Garino, Mirasso A., Raichman S., y J. M. Goicolea, Estricción de barras metálicas cilíndricas: sensibilidad frente al tamaño y tipo de las imperfecciones, *Mecánica Computacional*, G. Etse y B. Luccioni (Compiladores), **17**, 437-444, (1996)
- [15] C. Garca Garía Garino, A. Mirasso, S. Raichman and J. M. Goicolea, Imperfection sensitivity analysis of necking instability in circular cilyndrical bars, *Computational Plasticity*, 760-764, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds), CIMNE, Barcelona, (1997).
- [16] C. Garca Garía Garino, A. Mirasso, S. Raichman and J. M. Goicolea, Local and global sensitivity analysis of necking instability in circular cilyndrical bars, Large strain plasticity Mini-Symposia, Proceedings of the First Canadian Conference on Nonlinear Solid Mechanics, CanCNSM, pp 224-232, vol 1, Elena Croitoro (Ed.) University of Victoria and Pacific Institute for the mathematical sciences, Victoria, (1999).
- [17] M. L. Wilkins, Third Progress Report of Light Armor Program., Lawrence Livermore Natl. Lab., U. of California, rept. UCRL-50460 (1968).
- [18] C. García Garino, Un Modelo Nu-mérico para el Análisis de Sólidos Elastoplásticos Sometidos a Grandes Deformaciones. Tesis Doctoral, Universidad Politécnic de Cataluña, (1993).