

# **SIMULACIÓN NUMÉRICA DE LA CONVECCIÓN MIXTA Y TRANSFERENCIA DE CALOR EN UN CANAL HORIZONTAL CON UNA OBSTRUCCIÓN CUADRADA**

**Víctor Nieto, Diego Celentano y Marcela Cruchaga**  
*Departamento de Ingeniería Mecánica*  
*Universidad de Santiago de Chile*  
*Avda. Bdo. O'Higgins 3363 – Santiago de Chile – CHILE*  
*e-mail: [dcelenta@lauca.usach.cl](mailto:dcelenta@lauca.usach.cl)*

## **RESUMEN**

En el presente trabajo se presenta la simulación numérica del problema de convección mixta y transferencia de calor en un canal horizontal con una obstrucción cuadrada analizando, en particular, la influencia de los números de Reynolds y Grashof en el comportamiento del flujo y en las condiciones de transferencia de calor. Para tal fin, se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes incompresibles mediante el método de los elementos finitos. Las soluciones obtenidas en este trabajo se comparan con los resultados publicados por otros autores utilizando diferentes técnicas de solución numérica.

## **ABSTRACT**

A numerical simulation of a mixed convection problem of an horizontal channel is presented. In particular, the influence of the Reynolds and Grashof numbers on the flow behaviour and heat transfer conditions is analyzed. To this end, the thermally coupled incompressible Navier-Stokes equations are solved using the finite element method. The numerical solutions obtained in this work are contrasted with other results available in the literature.

## **INTRODUCCIÓN**

El fenómeno de la convección mixta de un flujo interno adquiere un notable interés en ingeniería al analizar problemas tales como el estudio de intercambiadores de calor, reactores, sistemas electrónicos y en sistemas de almacenamiento de energía. Si bien el análisis de estos fenómenos es complejo, desde hace ya algunas décadas los métodos numéricos constituyen una herramienta en continuo desarrollo que puede contribuir a una adecuada descripción del comportamiento de las variables involucradas en los diferentes problemas.

En este trabajo se presenta el análisis del problema de convección mixta y transferencia de calor en un canal horizontal con una obstrucción cuadrada, considerando diferentes números de Reynolds y Grashof utilizando el método de los elementos finitos. Se pretende evaluar el comportamiento de este método y comparar los resultados obtenidos en este trabajo con los publicados por otros autores<sup>[1]</sup>.

## **ECUACIONES DEL PROBLEMA**

Las ecuaciones que definen el problema de convección mixta en un fluido newtoniano incompresible se describen como <sup>[2,3]</sup>:

- Ecuación de balance de la cantidad de movimiento:

$$\rho \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \rho (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla p - \nabla \cdot (2\mu \boldsymbol{\varepsilon}) = \rho \mathbf{b} \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de continuidad:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

- Ecuación de la energía:

$$\rho c \left( \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla T \right) = \nabla \cdot (k \nabla T) + \rho r \quad \text{en } \Omega \times \tau$$

junto con condiciones de contorno e iniciales adecuadas. En las ecuaciones precedentes se tiene que  $\rho$  es la densidad,  $\mu$  es la viscosidad dinámica,  $\mathbf{v}$  es el vector velocidad,  $p$  es la presión,  $\epsilon$  es el tensor velocidad deformación,  $\Omega$  es el dominio de análisis,  $\tau$  es el intervalo de tiempo de interés,  $\nabla$  es el operador gradiente relativo a un sistema de coordenadas cartesiano,  $T$  es la temperatura,  $c$  es el calor específico,  $k$  es el coeficiente de conductividad,  $r$  es la fuente especificada de calor y  $\mathbf{b}$  es la fuerza de volumen teniendo en cuenta la aproximación de Boussinesq ( $\mathbf{b} = \mathbf{g} [1 - \alpha (T - T_{\text{ref}})]$ ), donde  $\alpha$  es el coeficiente de dilatación térmica volumétrica,  $\mathbf{g}$  es la aceleración de la gravedad y  $T_{\text{ref}}$  es una temperatura de referencia).

## MODELIZACIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones antes descritas se resuelven a través del método de los elementos finitos (MEF). En este contexto, la solución de las ecuaciones de Navier-Stokes (ecuación de cantidad de movimiento y de continuidad) térmicamente acopladas con la ecuación de la energía, se obtiene mediante el planteamiento de la correspondiente forma débil basada en la metodología conocida como de ponderación generalizada a contra corriente<sup>[2]</sup>. El algoritmo se escribe en las variables primitivas del problema y el sistema algebraico acoplado resultante se resuelve con un esquema incremental iterativo convergido tipo Newton–Rapson definido a través del criterio de la norma de los residuos que preserva el grado de acoplamiento del problema<sup>[2,3]</sup>.

## EJEMPLO DE APLICACIÓN

Se presenta el análisis de la convección mixta y transferencia de calor en un canal horizontal con una obstrucción cuadrada. El esquema general de la situación física se muestra a continuación.

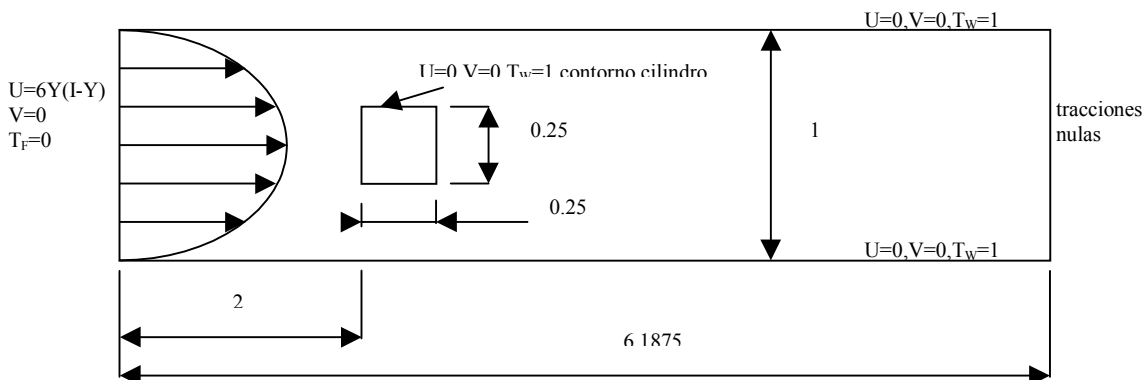


Figura A. Esquema general del problema de convección mixta en un canal horizontal con una obstrucción cuadrada.

Específicamente, se analizará para un número de Reynolds 100, los casos correspondientes a números de Grashof  $0$ ,  $4 \cdot 10^4$ ,  $8 \cdot 10^4$  y  $16 \cdot 10^4$ . Luego, para número de Reynolds 500, se estudiarán los casos correspondientes a números de Grashof  $0$  y  $8 \cdot 10^4$ . Todo el análisis se hará para un número de Prandtl constante igual a 0.71; además se utilizará una malla de 7500 elementos y 7750 nodos, formada por elementos bilineales de cuatro nodos (ver figura B).

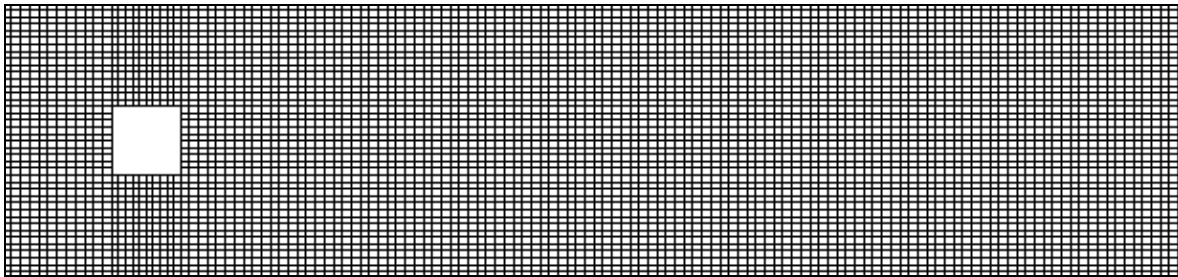


Figura B. Malla de elementos finitos.

El objetivo de esta simulación numérica es analizar el efecto de la obstrucción en el comportamiento del flujo. En particular, se estudian en las paredes del canal la transferencia de calor en términos del número de Nusselt y el coeficiente de fricción, ambos para situaciones variables de los números de Reynolds y Grashof.

Los números adimensionales para este problema son:

$$\text{Re} = \frac{U_{av} H \rho}{\mu} \quad \text{Gr} = \frac{g \alpha (T_w - T_F) H^3 \rho^2}{\mu^2} \quad \text{Pr} = \frac{\mu c}{k}$$

en donde :

- H : Altura del canal (H=1)
- $U_{av}$  : Velocidad promedio en la sección de entrada
- $T_w$  : Temperatura en la pared del canal
- $T_F$  : Temperatura del fluido a la entrada del canal.

El número de Nusselt y el coeficiente de fricción local se definen como:

$$N_{ux} = \frac{T_w - T_F}{T_w - T_b} \frac{\partial T}{\partial y}$$

$$C_x = 2 \frac{\partial u}{\partial y}$$

donde  $T_b$  es la temperatura promedio para cada sección transversal del canal.

Los resultados que se presentan a continuación corresponden al estado estacionario.

Las figuras 1 a 4 muestran los resultados de isotermas, isobaras y líneas de corriente para un número de Reynolds igual a 100 y números de Grashof igual a  $0$ ,  $4 \cdot 10^4$ ,  $8 \cdot 10^4$  y  $16 \cdot 10^4$ , respectivamente.

En la figura 1,  $\text{Gr}=0$  y, por lo tanto, no hay convección natural. Ésto sumado al hecho de que las condiciones de borde son simétricas, provoca que los valores de las variables con respecto al eje del canal sean también simétricas. Los valores máximos para la temperatura y la presión del flujo se encuentran en la zona inmediatamente anterior a la obstrucción.

En la figura 2 se puede notar la influencia del empuje térmico, lo que se traduce en una asimetría de las variables, puesto que el flujo comienza a pasar en mayor proporción por la parte inferior del canal. Al observar los valores máximos de temperatura y presión, éstos se ubican en la parte inferior de la obstrucción produciéndose isotermas e isobaras de mayores valores en esta zona.

En la figura 3 las líneas de corriente muestran que la mayor parte del flujo está pasando por debajo de la obstrucción, lo que acentúa la asimetría y el traslado de los valores máximos a esta parte del canal.

En la figura 4 continúa la misma tendencia donde más del 80 % del flujo pasa por debajo de la obstrucción.

En las figuras 1 a 4 se puede observar cómo afecta el número de Grashof al comportamiento del flujo y la transferencia de calor para  $Re=100$ . A medida que el número de Grashof aumenta, la convección natural adquiere mayor importancia y se combina con la convección forzada, produciéndose claramente convección mixta para números de Grashof iguales o superiores a 40000. A pesar de la simetría de las condiciones de borde, el aumento del número de Grashof provoca asimetría en el flujo y específicamente un desplazamiento de los valores máximos de las variables hacia la zona inferior de la obstrucción debido al efecto del empuje térmico.

En las figuras 5 y 6 se presenta la influencia del número de Grashof en el comportamiento del flujo y la transferencia de calor para  $Re=500$ . Esto significa que la velocidad del flujo aumentó cinco veces con respecto a los casos anteriores, lo que se traduce en una mayor permanencia de las condiciones del flujo a lo largo del canal debido al fenómeno de transporte de las variables que dependen de la velocidad. En la figura 5 se observa simetría en los resultados, ya que el número de Grashof es igual a cero, lo que significa que la convección natural no se manifiesta. Por otra parte, cuando el número de Grashof aumenta a 80000, los resultados adquieren una pequeña asimetría. Sin embargo, en las líneas de corriente se observa que el flujo aún atraviesa en forma simétrica el canal con respecto a la obstrucción hecho que corrobora la importancia relativa de la convección forzada respecto de la convección natural.

La figura 7 muestra la variación del número de Nusselt a lo largo de las paredes superiores e inferiores del canal para todos los casos estudiados. Para la entrada del canal, la distribución del número de Nusselt disminuye continuamente antes de enfrentarse a la obstrucción. Cerca de  $x = 1.375$  el número de Nusselt comienza a crecer y encuentra el máximo en el final del obstáculo, donde vuelve a disminuir. A medida que el número de Grashof aumenta, el número de Nusselt disminuye en la pared superior y aumenta en la pared inferior para el caso  $Re=100$  (ver figura 7.a) y 7.b). Debido a la fuerte influencia del número de Grashof en el caso  $Gr/Re^2 = 16$ , el número de Nusselt en la pared superior es mucho menor que el correspondiente al caso  $Gr=0$ . Para  $Re=500$ , las curvas del número de Nusselt para los distintos  $Gr$  se superponen puesto que el aumento del número de Grashof no es lo suficientemente significativo para que el efecto de la convección natural sea preponderante.

La figura 8 muestra la variación del coeficiente de fricción a lo largo de las paredes superior e inferior del canal para los casos estudiados. Se puede observar que este coeficiente se ve influenciado por  $Gr$ . Sobre la pared inferior el coeficiente de fricción aumenta según el número de Grashof mientras que en la cara superior hay una tendencia opuesta para el caso  $Re=100$  (ver figura 8.a) y 8.b). Se observa una gran recirculación en la pared superior para el caso  $Gr/Re^2 = 16$  en la región de entrada que se vuelve pequeña cerca del cilindro por la reducción de área. Para los casos de  $Re=500$ , se aprecia que las curvas del coeficiente de fricción se superponen para  $Gr=0$  y  $Gr=80000$  debido a que la convección forzada es mucho más significativa que la convección natural (ver figura 8.c).

## CONCLUSIONES Y PERSPECTIVAS

Se ha presentado en este trabajo el problema de convección mixta en dos dimensiones. A partir de los resultados se puede concluir que el método ha respondido de manera satisfactoria, mostrando convergencia y estabilidad. La consistencia del modelo ha permitido evaluar variables tales como temperatura, velocidades, presión, líneas de corriente, números de Nusselt y coeficiente de fricción en estado estacionario.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo mostraron que si la diferencia entre la temperatura del fluido en el ingreso del canal y la de las paredes es grande y la velocidad del flujo es baja, la convección natural es considerable. Sin embargo, cuando la velocidad crece, el efecto de la convección forzada es el que predomina, provocando que la convección natural disminuya su efecto en la transferencia de calor.

Futuros esfuerzos pueden dirigirse a estudiar problemas con el objetivo de determinar el largo del canal para obtener una condición de flujo desarrollado a la salida, ya que el flujo obtenido en este estudio presenta estas características sólo de forma aproximada.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al DICYT y FONDECYT N° 1980054 que permitieron el desarrollo de este trabajo.

## REFERENCIAS

- [1] B. Ramaswamy and T. C. Jue: “ Some recent trends and developments in finite element analysis for incompressible thermal flows”, *International journal for numerical methods in engineering*, vol. 35, pp. 671-707 (1992).
- [2] Marcela A. Cruchaga and Eugenio Oñate: “ A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 143 (1997) 49-67.
- [3] Diego Celentano: “A finite element formulation for phase-change problems with advective effects”, *Communications in numerical methods in engineering*.14 , 719-730 (1998).

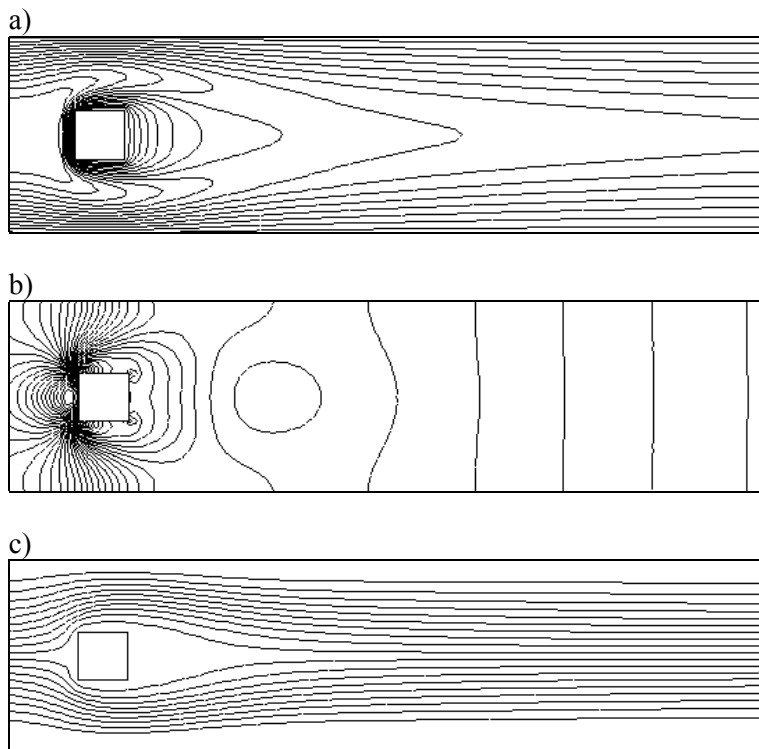
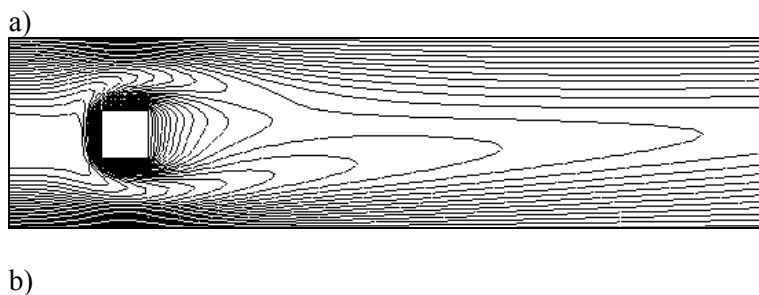
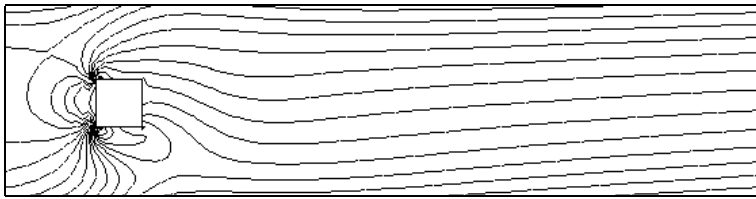


Figura 1. Problema de convección mixta.  $Re=100$ ;  $Gr=0$ : a) Isotermas; b) Isobaras c) Líneas de corriente.





c)

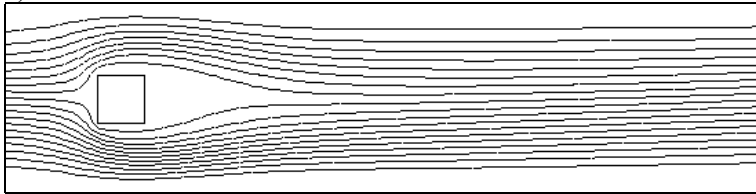
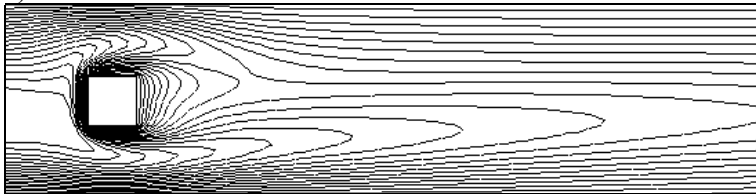
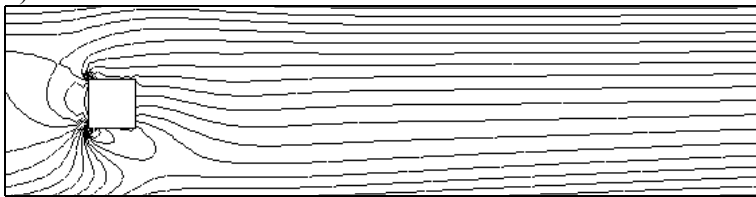


Figura 2. Problema de convección mixta.  $Re=100$ ;  $Gr=40000$ : a) Isotermas; b) Isobaras c) Líneas de corriente.

a)



b)



c)

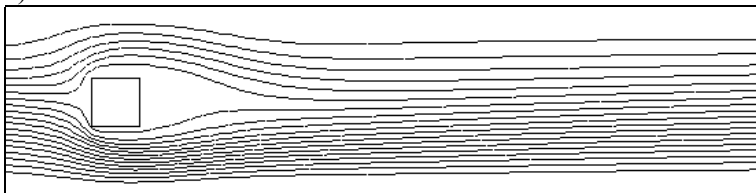
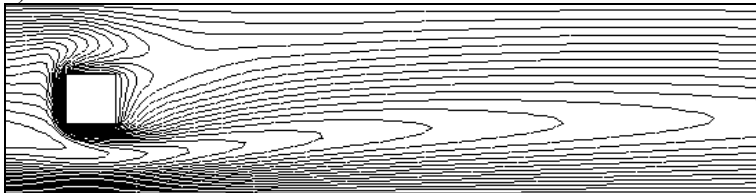
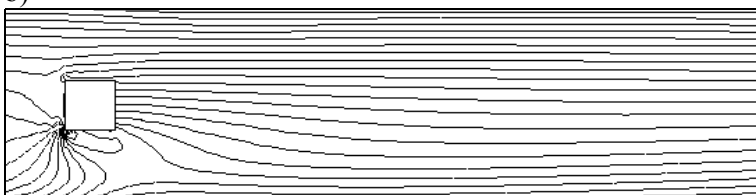


Figura 3. Problema de convección mixta.  $Re=100$ ;  $Gr=80000$ : a) Isotermas; b) Isobaras; c) Líneas de corriente.

a)



b)



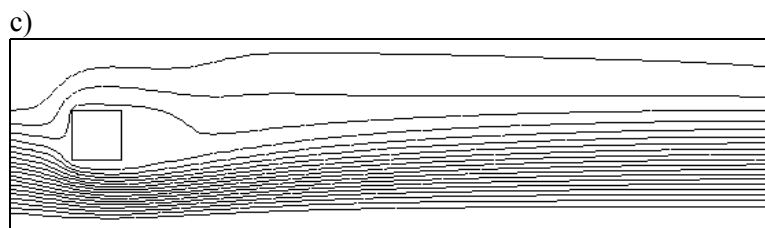


Figura 4. Problema de convección mixta.  $Re=100$ ;  $Gr=160000$ : a) Isotermas; b) Isobaras; c) Líneas de corriente.

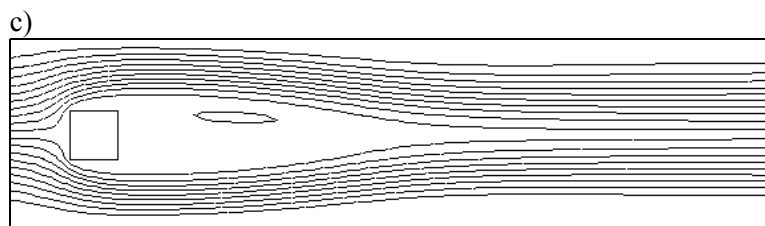
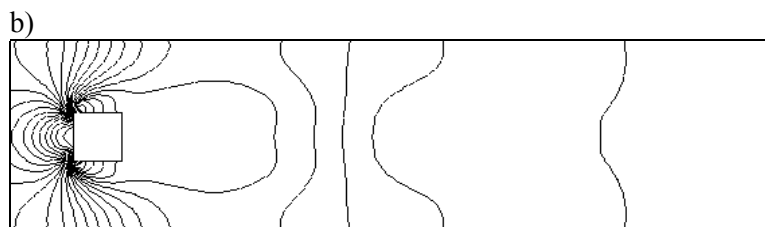
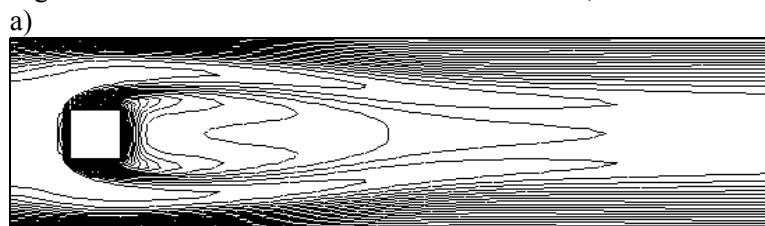
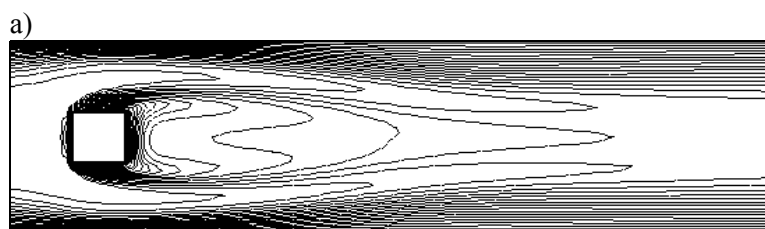


Figura 5. Problema de convección mixta.  $Re=500$ ;  $Gr=0$ : a) Isotermas; b) Isobaras; c) Líneas de corriente.



c)

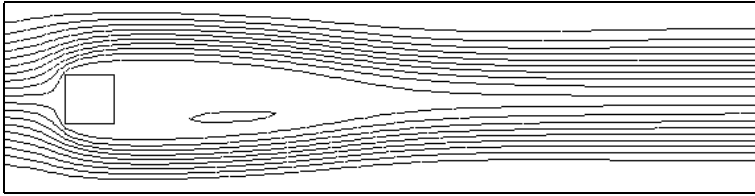
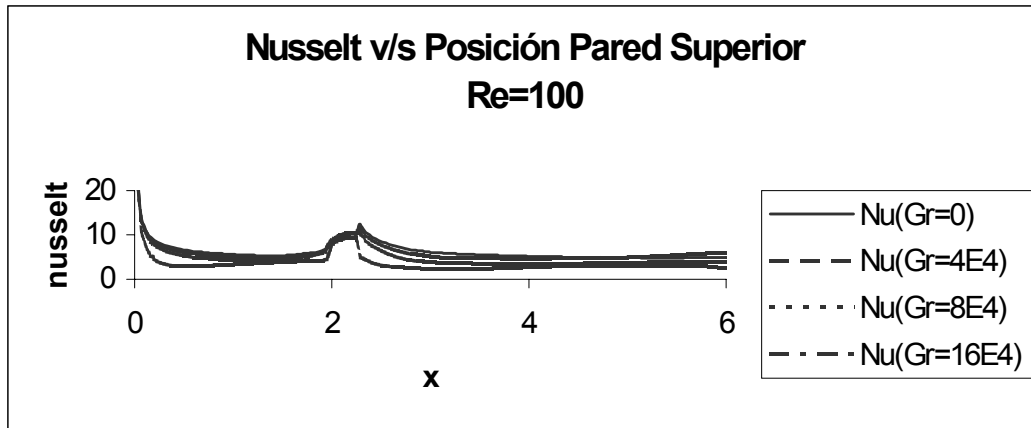
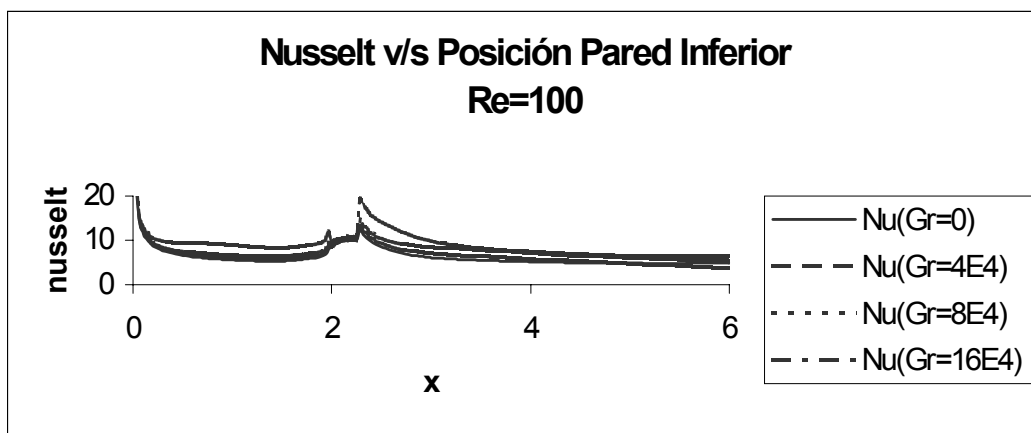


Figura 6. Problema de convección mixta.  $Re=500$ ;  $Gr=80000$ : a) Isotermas; b) Isobaras; c) Líneas de corriente.

a)



b)



c)



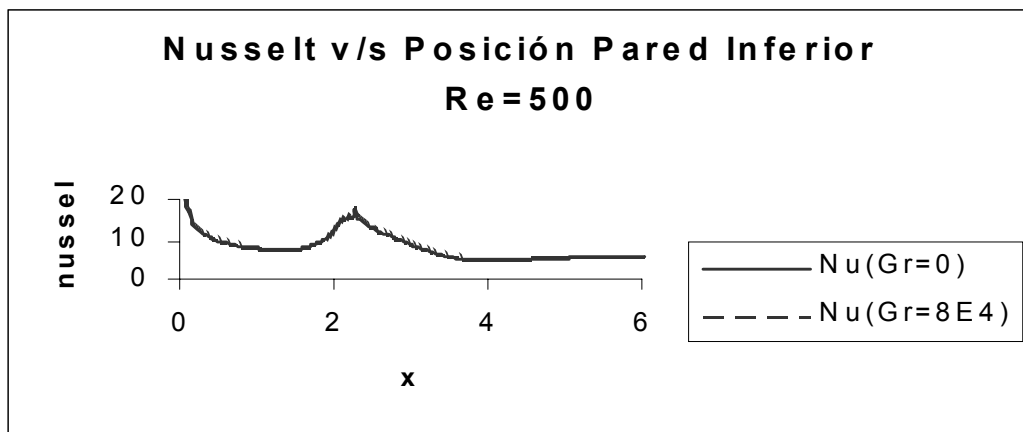
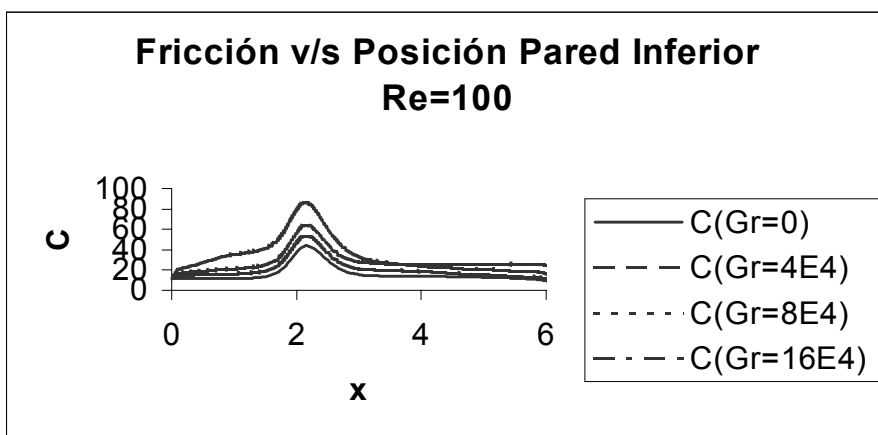
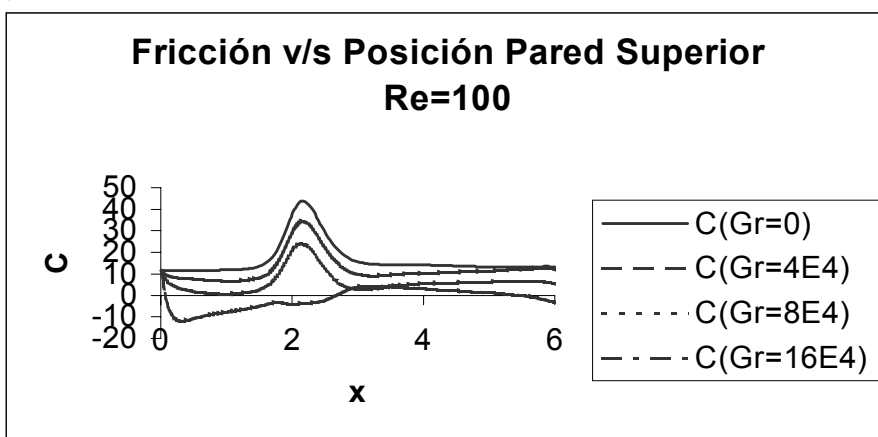


Figura 7. Problema de convección mixta. Número de Nusselt.

a)



b)



c)

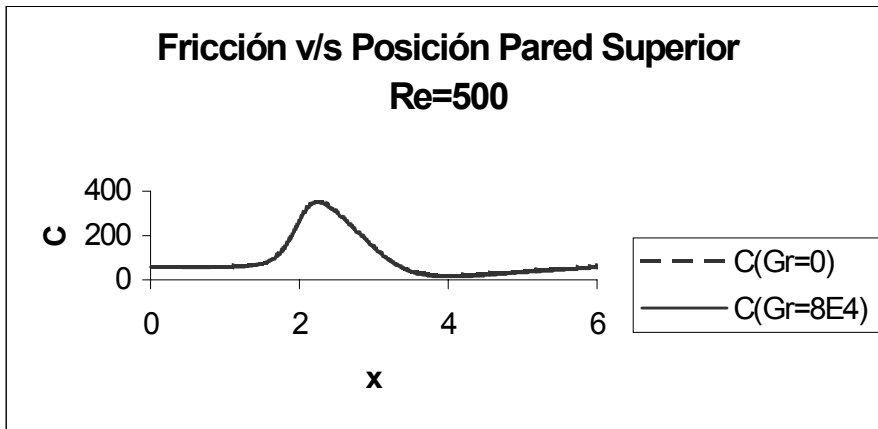


Figura 8. Problema de convección mixta. Coeficiente de fricción.