

## **DISTRIBUCION DE LAS REACCIONES EN PLATEAS DE FUNDACIÓN BAJO CARGA VARIABLE**

**Ing. Juan C. Paloto - Ing. Roberto D. Santos**  
*Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur*  
*Avda. Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina*

### **RESUMEN**

Para hallar soluciones a las plateas sobre fundación elástica se emplea el método de las diferencias finitas. Inicialmente, en el presente caso con una carga aplicada de distribución lineal, los asentamientos de la platea son determinados según una característica N general de diseño y un factor  $\alpha$  de asentamiento en el borde, de acuerdo con el planteo presentado en el XENIEF 97. Luego, esos resultados son considerados para evaluar la necesaria capacidad de soporte de los elementos como vigas y plateas componentes del dispositivo Estructural.

Mediante el utilitario Mathematica con N expresado en forma simbólica, se resuelve el problema asumiendo valores de  $\alpha$  entre 0 y 0,6. Finalmente por medio de un desarrollo en la planilla de cálculo Excel, la integración de los valores por la regla de Simpson permite proveer las relaciones porcentuales de las reacciones de soporte.

### **ABSTRACT**

To find solutions for plates resting on elastic foundations the finite difference method is employed. Initially in the present case with a linearly distributed load applied, the settlements of the plate are determined depending of a general edge settlement factor  $\alpha$  according with the statement presented in the XENIEF '97. Then, these results are considered to evaluate the necessary support capacity of the elements as beams and plates composing the structural device.

By the Mathematica system with N literary expressed, the problem is solved assuming  $\alpha$  Values between 0 and 0,6. Finally, by means of a development in Excel system, the integration values according Simpson rule allows to provide the ratio (percentage) for the support reactions.

### **INTRODUCCIÓN**

Para el estudio de dispositivos estructurales para fundaciones mediante placas o plateas con vigas de borde, en principio es necesaria la determinación numérica de los asentamientos de acuerdo con las condiciones mecánicas del suelo y con los valores que se anticipen como condiciones de borde a las mismas. Con este fin se pueden utilizar los métodos de las diferencias finitas (D.F.)<sup>1,2</sup> o de los elementos finitos (M.E.F.) programándose las soluciones en términos de las características particulares definidas para el caso.

Superada esa primera etapa, conviene encaminar el tratamiento del problema hacia la obtención de las porciones de la carga total que deberán soportar cada una de las partes del dispositivo según el diseño inicial propuesto. Para ello se programa el método de integración a utilizar <sup>3</sup>.

El conocimiento del porcentaje de carga que deben tomar las vigas como elemento de fundación, permite proceder al dimensionado final de las mismas o a la comprobación o modificación del dimensionado que se hubiera realizado. En el presente trabajo se ha desarrollado el procedimiento computacional para obtener los porcentajes de repartición de las reacciones para equilibrar una carga de distribución lineal aplicada sobre la placa.

### PLANTEO DEL PROBLEMA. CONDICIONES:

El procedimiento de resolución<sup>3</sup> se ajusta a las condiciones del caso ahora tratado, que son:

- Carga constante  $q(y)$  [Kf/cm<sup>2</sup>] distribuída variando linealmente sobre una dirección de la placa.
- Suelo con coeficiente de reacción  $k$  [Kf/cm<sup>3</sup>] de valor constante<sup>3</sup>.
- Condición de borde de apoyo simple entre placa y viga con condición de asentamiento uniforme  $W_0$  de la viga en el suelo.

Esta última condición compromete el diseño de las vigas para que el dispositivo de fundación asegure la verticalidad de la estructura montada en la fundación.

A su vez el dimensionado definitivo deberá admitir el asentamiento final de las vigas con un valor igual al propuesto en la condición inicial c).

En principio los parámetros del problema son:  $q=q(y)$  [Kf/cm<sup>2</sup>],  $k$  [Kf/cm<sup>3</sup>] y  $D$  [Kf . cm] constante de rigidez a la flexión de la placa. Siendo  $W(x,y)$  la variable dependiente o función de los asentamiento o desplazamientos verticales por flexión de la placa, la ecuación diferencial para su resolución es :

$$\nabla^2 \nabla^2 W = (1/D) \cdot [q(y) - k \cdot (W + W_0)] \quad (1)$$

con su expresión en coordenadas cartesianas ortogonales.

### Resolución en Diferencias Finitas

Para resolver la ecuación 1 se opta por la aproximación del método de las diferencias finitas<sup>1,2</sup>. Se obtendrán así los valores de  $W_i$  en los nudos de la malla numérica de intervalo "s" prevista sobre la placa. En cada punto  $i$  se planteará una ecuación del tipo:

$$C_i \cdot W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j < > i}}^n C_j \cdot W_j = (s^4/D) \cdot [q_i - k \cdot (W_i + W_0)] \quad (2)$$

con  $q_i$  valor de la carga en cada punto de la malla y  $C_j$  los coeficientes del operador de  $n$  términos tomado para la ecuación.

Para generalizar los resultados se ha propuesto para este planteo (Ref.) definir un coeficiente adimensional  $N = k \cdot s^4 / D$  de manera que la ecuación en diferencias finitas toma la expresión:

$$(C_i + N) \cdot W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j < > i}}^n C_j \cdot W_j = [q_i \cdot s^4 / D - N \cdot W_0] = [q_i / k - W_0] \cdot N \quad (3)$$

con la solución

$$W_i = \Omega_i \cdot q / k$$

Llegando a este punto del planteo se advierte la necesidad de formular los términos  $W_0$  y  $q_i$ .

Para el caso de carga linealmente variable según "y", teniendo en cuenta las características de la malla considerada, corresponderá :  $q_i = (q/n) \cdot n_i$  Siendo q el valor máximo de la carga distribuida;  $n_i$  el número de fila de la malla para el punto i a contar desde el origen; n el número total de filas.

En cuanto a  $W_0$ , el criterio práctico <sup>3</sup> conveniente consiste en adoptar un valor de asentamiento previsible en el borde como una fracción  $\alpha$  del asentamiento máximo final  $q/k$ , es decir

$$W_0 = \alpha \cdot q/k \quad \text{con } 0 \leq \alpha < 1$$

De esta manera la solución del problema puede lograrse a través de propuestas con valores para  $\alpha$  y para N. Este último como prueba para el dimensionado de la placa.

Resuelto el sistema de ecuaciones (3) en términos generales según N y  $\alpha$ , es decir conocidos los factores numéricos  $\Omega_i$ , por integración de los mismos se obtienen los valores de las reacciones de soporte para las partes del sistema:

La reacción total de la placa

$$R_p = \int_0^a \int_0^b k \cdot (W + W_0) \, dx \cdot dy \quad (4)$$

Resultante de la carga aplicada

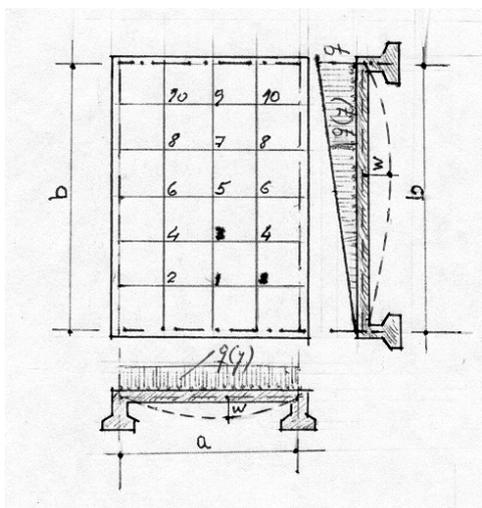
$$R_q = \int_0^a \int_0^b q(y) \cdot dx \cdot dy = (1/2) \cdot q \cdot a \cdot b \quad (5)$$

Reacción total de las vigas  $R_v$  determinable por la condición de equilibrio:

$$R_q = R_p + R_v \quad ; \quad R_v = R_q - R_p \quad (6)$$

### EJEMPLO DE APLICACIÓN

Detalles del Modelo. Fig.1



En la figura 1 se muestra el esquema de un caso de aplicación para una placa rectangular de medidas  $a, b = 1,5 \cdot a$  con carga linealmente variable  $q(y)$  y vigas de borde a diseñar para garantizar asentamientos uniformes.

Tomando una malla de brazos  $s = a/4$  se plantea un sistema de 10 ecuaciones de tipo (3)





	<b>5,13208</b>	$\Omega i$	<b>3,07934065</b>	$\Omega i$	<b>1,02634667</b>	$\Omega i$	<b>-1,02644661</b>	$\Omega i$
W1		0,16434		0,05102304		-0,06229		-0,1756109
W2	<b>0,43409333</b>	0,1217	<b>0,13259752</b>	0,03696831	<b>- 0,16902</b>	-0,04781	<b>- 0,4706619</b>	-0,1325955
W3		0,3241		0,1547967		-0,0145		-0,1837968
W4	<b>0,8566</b>	0,2402	<b>0,4080466</b>	0,1143183	<b>- 0,04044</b>	-0,01154	<b>- 0,4889789</b>	-0,1374179
W5		0,461		0,2766209		0,0922		-0,09220697
W6	<b>1,2196</b>	0,3421	<b>0,73184673</b>	0,2052873	<b>0,24386667</b>	0,0684	<b>- 0,2439488</b>	-0,06842908
W7		0,5224		0,3530936		0,1838		0,01450005
W8	<b>1,38613333</b>	0,3892	<b>0,937492</b>	0,2632861	<b>0,48893333</b>	0,1374	<b>0,04046617</b>	0,0115498
W9		0,4022		0,2889279		0,1756		0,06229393
W10	<b>1,074</b>	0,3022	<b>0,77229193</b>	0,2173775	<b>0,47066667</b>	0,1326	<b>0,16903222</b>	0,0478136

Por último, de la aplicación de la condición de equilibrio (6), en la TABLA 2 se ordenan los valores porcentuales para las reacciones  $R_p$  y  $R_v$ , referidos al total  $R_q$ .

### Valores Porcentuales de las Reacciones

Tabla 2

	<b>N = 0,2</b>	<b>N = 0,2</b>	<b>N = 0,2</b>	<b>N = 0,2</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	13,3997037	48,0401466	82,6800287	117,319951
$R_v =$	86,6002963	51,9598534	17,3199713	-17,319951
	<b>N=0,4</b>	<b>N=0,4</b>	<b>N=0,4</b>	<b>N=0,4</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	22,1306667	53,2796159	84,4264296	115,573461
$R_v =$	77,8693333	46,7203841	15,5735704	-15,573460
	<b>N=0,6</b>	<b>N=0,6</b>	<b>N=0,6</b>	<b>N=0,6</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	28,299	56,980269	85,6601741	114,339912
$R_v =$	71,701	43,019731	14,3398259	-14,339912
	<b>N=0,8</b>	<b>N=0,8</b>	<b>N=0,8</b>	<b>N=0,8</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	32,8914815	59,7438927	86,5812741	113,418698
$R_v =$	67,1085185	40,2561073	13,4187259	-13,418698
	<b>N=1</b>	<b>N=1</b>	<b>N=1</b>	<b>N=1</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	36,4740741	61,8939661	87,2971111	112,702012
$R_v =$	63,5259259	38,1060339	12,7028889	-12,702011
	<b>N=1,5</b>	<b>N=1,5</b>	<b>N=1,5</b>	<b>N=1,5</b>
	Alfa = 0	Alfa = 0,2	Alfa = 0,4	Alfa = 0,6
$R_p =$	42,7673333	65,6611721	88,5528889	111,446278
$R_v =$	57,2326667	34,3388279	11,4471111	-11,446278

## CONCLUSIONES

Se ha programado un método que permite la predicción de las reacciones de soporte en un dispositivo combinado para fundaciones de estructuras para el caso de carga aplicada de distribución lineal.

A su vez, considerando un comportamiento elástico lineal del suelo, los resultados obtenidos a través de un ejemplo de aplicación permiten advertir que:

A mayor rigidez ( $N$  menor) en las propuestas de diseño para la placa, son mayores las reacciones de soporte necesarias en las vigas para satisfacer la condición esencial de asentamiento uniforme.

Cuando disminuye la rigidez aumenta el compromiso de reacción tomado por la platea.

Para un mismo valor de  $N$  (igual rigidez), al aumentar el asentamiento  $W_0$  (mayor  $\alpha$ ) es la placa la que toma mayor carga llegando a obligar a las vigas a trabajar como anclaje ( $R_v$  negativo), en general para asentamientos  $W_0 > 0,5.q/k$ . Contando con estas tendencias de crecimiento en los valores resultantes, se podrá ajustar el dimensionado inicial de platea y vigas de manera de lograr un comportamiento final del sistema de fundación que satisfaga con la mayor aproximación las condiciones impuestas.

## REFERENCIAS

- [1] Guzman, A.; Luisoni, C.; Ventura, G., "Curso de Elasticidad Aplicada" Cuad. II, Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.
- [2] Timoshenko, S.; Woinowsky Krieger, S., "Theory of Plates and Shells", Mc Graw Hill Book Co. Inc., Kogakusha, Japón, 1959.
- [3] Paloto J.C. ; Santos R.D., "Estudio de plateas de fundación mediante métodos numéricos " pp. 415-420, XENIEF, Centro Atómico Bariloche, Nov. 1997, Vol. XVIII.
- [4] Castillo, Iglesias, Gutiérrez, Alvarez, Cobo: Mathematica, Editorial Paraninfo, Madrid, España, 1993.
- [5] Todo Excel 4.0 para Windows, Editorial G y R Libros 1996.