

ESTADO TENSIONAL EN SILOS. MODELO DEL LLENADO

Adriana Pernich¹ y Fernando G. Flores²

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N
Universidad Nacional de Córdoba
Casilla de correos 916, (5000) Córdoba - Argentina

RESUMEN

Se presenta un modelo para la predicción de los estados tensionales que se producen en materiales granulares y las sollicitaciones sobre las estructuras que los contienen. Se utiliza una ley constitutiva hipoeelástica para representar el comportamiento elástico no lineal característico de los materiales granulares. Se presentan ejemplos y se compara con otros resultados teóricos, numéricos y experimentales.

ABSTRACT

A model for prediction of sollicitations produced by granular material over containing structures is presented. A hypoelastic constitutive law is used to represent the non-linear elastic behavior characteristic of a granular material. Some examples are presented with comparison with other teorical, numerical and experimental results.

INTRODUCCION

El comportamiento de materiales granulares presenta interés científico debido al complejo conjunto de características físicas involucradas. Este conocimiento es relevante para varias ramas de la industria, en las cuales se requiere mejorar el diseño de las plantas de

¹Becaria Se.C.yT. - Universidad Nacional de Córdoba - F.O.M.E.C.

²Investigador Adjunto de CONICET y Profesor Titular Universidad Nacional de Córdoba.

almacenamiento y manipulación de este tipo de materiales. El comportamiento estructural y las solicitaciones a las que se ven sometidos los silos, en particular, presentan en la actualidad falencias e incertidumbres.

La mayoría de los trabajos realizados en este área tratan el proceso de vaciado modelando al material como un fluido, y suponiendo una distribución lineal de las tensiones como condición inicial [1,2,3,4].

Experimentalmente se ha observado [5] que el estado tensional del material al final de la etapa de llenado no corresponde a una distribución lineal. También se ha establecido una clara dependencia entre el estado tensional inicial y la forma en que el material fluye durante el vaciado. Existen además curvas teóricas [6] de distribución de presiones sobre las paredes del silo, en las cuales se basan gran parte de los diseños.

Por las razones anteriores se ha abordado el problema de determinar el estado tensional del material ensilado y las solicitaciones que ejerce sobre la estructura durante el llenado. A tal fin se considera al proceso de llenado fundamentalmente estático, considerando que el comportamiento mecánico del material almacenado puede representarse como un sólido elástico no lineal que desarrolla fricción con la pared.

MODELO DE ELEMENTOS FINITOS

El material almacenado se modela utilizando elementos finitos bidimensionales de deformación plana/axilsimetría de cuatro nodos, para los cuales las deformaciones y las tensiones han sido referidas a un sistema corrotacional, que permite actualizar fácilmente las variables incrementales.

Se utiliza un mapeamiento isoparamétrico que para cada instante de tiempo permite escribir la configuración actual y los desplazamientos incrementales como:

$$\mathbf{x}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{x}^i \quad (1)$$

$$\mathbf{u}(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^4 N^i(\xi, \eta) \mathbf{u}^i \quad (2)$$

donde:

ξ, η : son las coordenadas naturales del elemento

$N^i(\xi, \eta)$: es la función de forma asociada al nodo i

\mathbf{x}^i : es la coordenada actual del nodo i en un sistema cartesiano global fijo

\mathbf{u}^i : es el vector incremento de desplazamiento del nodo i respecto del sistema cartesiano global fijo

En cada punto de integración se evalúa la expresión anterior, definiéndose el versor \mathbf{l}_1 , correspondiente al eje corrotacional \bar{x}_1 , como paralelo al vector \mathbf{x}'_ξ y adoptando al versor \mathbf{l}_2 perpendicular a \mathbf{l}_1 . Con ello se obtiene la matriz de transformación ortonormal \mathbf{T} la cual permite expresar un vector incremento de desplazamiento $\bar{\mathbf{u}}$ del sistema corrotacional en el sistema global haciendo $\mathbf{u} = \mathbf{T}\bar{\mathbf{u}}$.

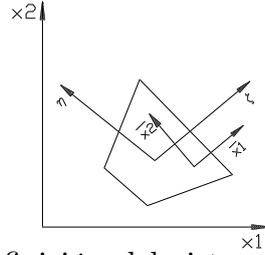


Fig.1 Definición del sistema local de coordenadas

El tensor incremento de deformación para el elemento de deformación plana, utilizando notación matricial, se define como:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_2} \\ \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_2} & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_1} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{T}^T \mathbf{u}^i = \bar{\mathbf{B}}_*^i \mathbf{u}^i \quad (3)$$

siendo la deformación volumétrica incremental:

$$\Delta\bar{\Delta} = \left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_1} + \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_2} \right) \quad (4)$$

Análogamente para el elemento de axilsimetría se tienen:

$$\Delta\bar{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \Delta\bar{\varepsilon}_{11} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{22} \\ 2\Delta\bar{\varepsilon}_{12} \\ \Delta\bar{\varepsilon}_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_1} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_2} \\ \frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_2} & \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_1} \\ \frac{u_1}{x_1} & 0 \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{B}}^i \mathbf{T}^T \mathbf{u}^i = \bar{\mathbf{B}}_*^i \mathbf{u}^i \quad (5)$$

y

$$\Delta\bar{\Delta} = \left(\frac{\partial\bar{u}_1}{\partial\bar{x}_1} + \frac{\partial\bar{u}_2}{\partial\bar{x}_2} + \frac{u_1}{x_1} \right) \quad (6)$$

Las matrices $\overline{\mathbf{B}}_*$ están en función de las derivadas de las funciones de forma $N^i(\xi, \eta)$ respecto del sistema corrotacional, las cuales se obtienen mediante:

$$\begin{bmatrix} N_{x_1}^i & N_{x_2}^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{\xi}^i & N_{\eta}^i \end{bmatrix} \mathbf{JT} \quad (7)$$

La ecuación constitutiva que se utiliza es de tipo hipoeástica, y se trabaja descomponiendo los tensores de tensión y de deformación en sus partes esférica y desviadora:

$$\Delta p = K(p) \Delta \overline{\Delta} \quad (8)$$

$$\Delta s_{ij} = 2G(p) \Delta \overline{e}_{ij} \quad (9)$$

donde $\Delta(\)$ indica incremento de $(\)$, siendo:

p : un tercio del primer invariante del tensor de tensiones

s_{ij} : parte desviadora del tensor de tensiones

$\overline{\Delta}$: deformación volumétrica

\overline{e}_{ij} : componente desviadora del tensor de deformaciones

Esta forma de integración temporal de las deformaciones y tensiones es equivalente a usar tensiones y deformaciones de Hencky (logarítmicas) en una formulación Lagrangeana total. Se considera que el material es elástico e isótropo y que el coeficiente de Poisson ν es constante, mientras que el módulo elástico tangente $E_t(p)$ es dependiente de p . Esta dependencia se ha determinado experimentalmente [7,8,9,10,11], resultando como buena aproximación de la forma:

$$E_t(p) = k_{ur} p_a \left(\frac{p}{p_a} \right)^n \quad (10)$$

siendo:

E_t : el módulo elástico tangente correspondiente al nivel p

k_{ur}, n : parámetros de caracterización del material, determinados en base a datos experimentales

p_a : la presión atmosférica

El módulo de deformación volumétrica y el módulo elástico transversal respectivamente quedan expresados:

$$K(p) = \frac{E_t(p)}{3(1 - 2\nu)} \quad (11)$$

$$G(p) = \frac{E_t(p)}{2(1 + \nu)} \quad (12)$$

Las ecuaciones de movimiento, que gobiernan el comportamiento del sólido, se integran en forma explícita en el tiempo utilizando el algoritmo estándar de integración por diferencias centrales dentro del esquema de Euler hacia adelante.

El llenado del silo se simula por la adición sucesiva de capas de elementos, como forma discreta del llenado continuo. Se considera que el proceso de llenado es fundamentalmente estático, despreciándose la energía cinética contenida en el mismo. Al ser adicionada una capa de elementos comienza a actuar la fuerza gravitatoria correspondiente a la masa de los elementos de la capa. Esta fuerza produce oscilaciones en los desplazamientos, con el fin de estabilizar la solución se impone un fuerte amortiguamiento “ficticio” antes de agregar una nueva capa .

Los campos de desplazamientos y velocidades iniciales son nulos en el dominio Ω . En el contorno Γ_c donde se imponen las condiciones de contacto entre el material granular y las paredes deben satisfacerse las siguientes condiciones:

- contacto mecánico: la componente normal de la fuerza que actúa en el contacto debe ser de compresión

- no penetración: una superficie no puede penetrar en la otra, condición que se expresa estableciendo que el “gap”, mínima distancia entre las superficies de contacto, sea siempre mayor o igual a cero.

- ley de fricción: la fuerza tangencial no puede superar una fracción de la fuerza normal, dicha fracción está asociada al ángulo de fricción grano-pared.

Como las ecuaciones de movimiento se integran en forma explícita, las condiciones de contacto pueden ser valuadas en función de los desplazamientos en cada instante. Si se relajan las condiciones en Γ_c y se utiliza el método de penalización para imponer las condiciones de no penetración y la ley de fricción resulta que la componente perpendicular de la tensión de contacto es proporcional al coeficiente de penalización α_n , a la penetración (“gap” <0) y al módulo elástico tangente e inversamente proporcional al tamaño de la malla. Mientras la componente tangencial de la tensión de contacto resulta proporcional al coeficiente de penalización α_t , a un micro-deslizamiento relativo y al coeficiente de fricción. Se hace aquí uso de una formulación “no clásica” que establece una relación lineal entre la componente tangencial de las fuerzas de contacto y un micro deslizamiento relativo entre las superficies. Si la magnitud de la fuerza alcanza al valor crítico F_c comienza un macro deslizamiento. Siendo F_c igual al producto entre la fuerza normal y el coeficiente de fricción entre las superficies en contacto. De esta manera quedan determinadas las fuerzas que actúan en esta parte del contorno.

La inclinación de las capas guarda relación con la manera en que se llena el silo. Estas pueden ser horizontales o estar inclinadas un ángulo φ respecto de la horizontal. Si se supone que el llenado se produce a partir de un punto fijo en la parte superior del silo, la inclinación que adoptarán las sucesivas superficies libres del material tendrán una

inclinación igual al ángulo de reposo del material ϕ_r . En otros casos se tendrá $0 \leq \varphi \leq \phi_r$.

RESULTADOS NUMERICOS

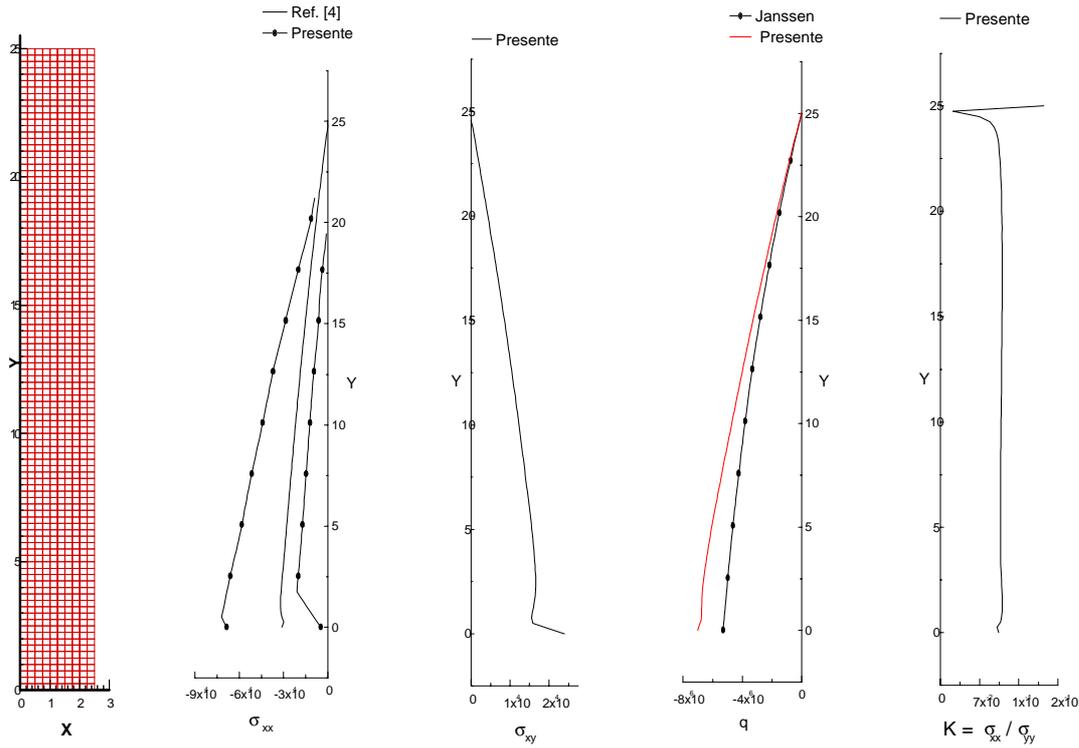
A continuación se presentan un par de ejemplos analizados con la metodología indicada. El material granular adoptado tiene las siguientes características:

k_{ur}	= 960	número módulo (adimensional)
n	= 0.57	exponente
ν	= 0.2	relación de Poisson
ρ	= 1417	[kg/m^3] densidad
p_a	= 100000	[N/m^2] presión atmosférica
c	= 0	cohesión
ϕ	= 34°	ángulo de fricción interna del material
ϕ_r	= 30°	ángulo de reposo del material
ϕ_w	= 18°	ángulo de fricción entre el material y la pared

Silo de fondo plano

Este ejemplo ha sido propuesto por J.M. Rotter y J.Y.Ooi como “benchmark” para comparar diferentes formulaciones utilizadas en el modelado del llenado, corresponde a un silo de 5m de ancho y 25m de altura, en deformación planal. Se utilizó una malla uniforme de 1004 elementos, con 100 capas horizontales de 0.25m de espesor, que se muestra en Fig.2.a. Se ha discretizado la mitad del silo debido a la simetría. Los resultados se obtuvieron utilizando un incremento de tiempo 5×10^{-4} seg., obteniéndose un valor máximo de penetración en la pared del orden de 0.5mm y de 0.3mm en el fondo. En Fig.2.b se muestra la distribución de la tensión horizontal σ_{xx} que actúa sobre la pared comparada con las distribuciones correspondientes a otras soluciones numéricas extraídas de la Ref.[4]. Esta comparación es un ejemplo de la enorme dispersión de resultados obtenidos dependiendo de los modelos utilizados y las hipótesis empleadas. En este caso los resultados de la presente formulación se encuentran entre las presentadas en la Ref.[4]. Por otro lado en la en la Fig.2.d se compara el valor q de la integral de las tensiones verticales σ_{yy} en secciones horizontales (valor de la carga vertical total que actúa en planos horizontales ubicados a una profundidad z a partir de la superficie libre del material) con los valores dados por la fórmula teórica propuesta por Janssen [6]. En este caso puede observarse que el presente modelo conduce a una menor descarga del peso del material a través de fricción con las paredes. En Fig.2.c se ha graficado la distribución de la tensión de corte σ_{xy} que actúa sobre la pared. Finalmente en Fig.2.e se muestra la variación de la relación de tensiones K que se define como el cociente $\sigma_{xx} / \sigma_{yy}$, la cual tiene un valor prácticamente constante en toda la altura del silo. La relación de tensiones está vinculada con el hecho de que los sólidos granulares tienen diferente resistencia en las

direcciones vertical y horizontal; y suele ser considerado como un parámetro macroscópico de caracterización del material. Diferentes propuestas teóricas lo deducen en función de la relación de Poisson, o del coeficiente de fricción interna y el coeficiente de fricción entre el material y la pared [13].

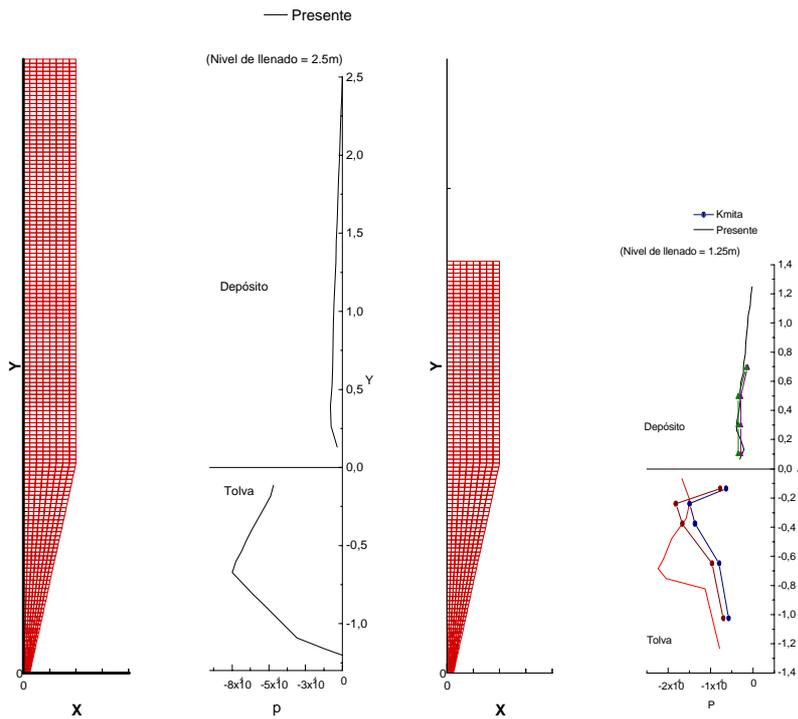


(a) (b) (c) (d) (e)
 Fig. 1: Silo de fondo plano. a) discretización; b) tensión normal sobre la pared; c) tensión tangencial sobre la pared; d) carga q; e) coeficiente K

Silo con tolva

En este segundo ejemplo se considera un silo cuyo depósito tiene 0.8m de ancho y 2.5m alto, la apertura de salida de la tolva es de 0.1m y la altura de la misma es 1.3m. Se lo modela en deformación plana, con simetría central. Los resultados se obtuvieron utilizando un incremento de tiempo 1.5×10^{-5} seg.. Se utilizaron 2 mallas para determinar las presiones en el mismo silo para diferentes niveles de llenado del depósito. Para el llenado total se utilizó una malla de 1216 elementos con 152 capas horizontales de 0.025m

de espesor (Fig.3.a), obteniendo la distribución de presiones sobre las paredes del depósito y la tolva que se muestran en Fig.3.b. La segunda malla corresponde a un nivel de llenado del depósito de 1,25m, consta de 816 elementos y 102 capas de 0.025m de espesor (Fig.3.c). En este segundo caso se cuenta con datos experimentales [5] con los cuales se han incluido para comparación en la Fig.3.d.



(a) (b) (c) (d)

Fig. 2: Silo con tolva. a) discretización para el llenado completo; b) tensión normal sobre la pared para el llenado completo; c) discretización para el llenado parcial; d) tensión normal sobre la pared para el llenado parcial.

CONCLUSIONES

Los valores presentados de presiones sobre las paredes están comprendidos en el rango determinado por otras soluciones numéricas. De la comparación con las curvas teóricas, el modelo propuesto descarga un menor porcentaje del peso de material a través de fricción con las paredes.

La constancia de la relación de tensiones K coincide cualitativamente con algunas de las propuestas teóricas, aunque el valor obtenido es menor a los modelos teóricos.

De la comparación entre los resultados numéricos y los datos experimentales, en el silo con tolva, se observa buena concordancia en la predicción de las solicitaciones en el depósito, pero hay mayores diferencias en la distribución de la presión media en la tolva.

REFERENCIAS

1. L.C. Schmidt and Y.H. Wu; "Prediction of Dynamic Wall Pressures on Silos"; *Bulk solids handling*; **9**(3), Agosto 1989, pp 99-104.
2. K. Runesson and L. Nilson; "Finite Element Modelling of the Gravitational Flow of a Granular Material"; *Bulk solids handling*, **6**(5), , Octubre 1986, pp 241-244.
3. M. Guaita Fernandez, F. Ayuga Telles, P. Aguado Rodriguez; "Aplicación del metodo de los elementos finitos en la estimación de empujes estáticos sobre las paredes de silos"; III Congreso Internacional de Ingenieria de Proyectos, Barcelona 12 al 14 de setiembre de 1996, pp 1658-1664.
4. J.M. Rotter, J.M.F.G. Holst, J.Y. Ooi, A.M. Sanad; "Silo pressure predictions using discrete-element and finite-element analyses"; *Phil. Trans. R. Soc. Lond.*, **356**, 1998, pp 2685-2712.
5. J. Kmita; "An experimental analysis of internal silo loads", *Bulk solids handling*, **11**(2), Mayo 1991, pp 459-468.
6. A. Lévin; "Pressures exerted on the walls of silos. Comparison of the calculation Method of Janssen and that of Reimbert according to the tests carried out by Janssen"; *Bulk Solids Handling*, **7**(1), Febrero 1987, pp 147-155.
7. N. Jambú; "Soil compressibility as determined by oedometer and triaxial tests"; *Proceedings of European Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*, 1963, pp 19-25
8. J.M. Duncan and C.Y. Chang; "Nonlinear analysis of stress and strain in soils"; *Journal of the Soil Mechanics and Foundations Division (ASCE)*, **96**(SM5), Setiembre 1970, pp 1629-1653
9. H.R. Boyce; "A non-linear model for the elastic behaviour of granular materials under repeated loading", *International Symposium on Soils under Cyclic and Transient Loading*, Swansea, 7-11 Enero 1980, pp 285-294
10. P.V. Lade; "Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces"; *International Journal of Solids Structures*, **13**, pp 1019-1035, Pergamon Press
11. C.P. Wroth and G.T. Houlsby; "Soil mechanics - Property characterization and analysis procedures"; *Proceedings of the Eleventh International Conference on Soil Mechanics and Foundation Engineering*; 1985, pp 1-55
12. Z.H. Zhong; *Finite Element Procedures for Contact-Impact Problems*; Oxford University Press, Walton Street, Oxford OX2 6DP, 1993

13. R.A. Lohnes; "Lateral Stress Ratios for Particulate Materials"; *Powder Handling Processing*, 5(4), Noviembre 1993, pp 331-336