

# **ANALISIS DE LA INTEGRIDAD ESTRUCTURAL DE CABEZALES ELIPTICOS SOMETIDOS A PRESION INTERIOR DESARROLLADOS POR TEORIA DE LA ELASTICIDAD Y EL METODO DE ELEMENTOS FINITOS**

**Gustavo M. Sambucaro, Hector C. Sanzi**  
*Grupo de Ingeniería Estructural Universidad Tecnológica Nacional F.R.H.  
Paris 532, 1706 Haedo Buenos Aires Argentina*

## **RESUMEN**

En este trabajo se presentan los resultados obtenidos del análisis de integridad estructural de cabezales elípticos de recipientes contenedores de presión sometidos a presión interior, a través de un método simplificado, utilizando Teoría de la Elasticidad y Elementos Finitos.

La finalidad del trabajo se basa en la confección de curvas de diseño, las cuales permitirán conocer:

- a) El Estado Tensional referente a las tensiones circunferencial y meridional debido a efectos de membrana y flexión sobre dicho cabezal.
- b) Conociendo los factores de concentración de tensiones que se presentan en la intersección entre un recipiente cilíndrico o esférico con una conexión, cuya información se obtiene de bibliografía o normas existentes, es posible determinar en un primer análisis la integridad estructural de dicha unión, adoptando como límite de diseño para su verificación, las tensiones admisibles dada por los códigos.

Este tipo de trabajo de gran utilidad practica en el diseño y/o selección de diferentes cabezales y conexiones, permiten al proyectista o especialista en "Stress Analysis" obtener el estado tensional debido a efectos de membrana y flexión y utilizar los diferentes Códigos de Diseño en particular el Código ASME Sección VIII División 1<sup>3</sup> y División 2<sup>4</sup>.

## **ABSTRACT**

In the present work, we are presenting the Stresses occurred in Elliptical Head of pressure vessel under internal pressure. A simplified method by Elasticity Theory and Finite Element were carried out in order to determine the Stresses due to membrane and bending effect.

These Stresses are necessary to evaluate the structural integrity of this component when we use the Design Rules, specially ASME Code Section VIII, Division 1 and 2.

Design curves and most important conclusion are present in this work.

## **INTRODUCCIÓN**

El diseño de cabezales en recipientes a presión esta ampliamente desarrollado en las distintas normativas de cálculo y ensayos experimentales. Los recipientes contenedores de presión son equipos integrantes de una Planta Industrial, cumpliendo una función específica en el proceso. Estos equipos están formados principalmente por una sección cilíndrica (envoltura), dos cabezales, conexiones y soportes. En general los cabezales más utilizados en dichos recipientes son del tipo semiesféricos, semielípticos, toriesféricos y cónicos.

Los diferentes códigos de diseño permiten dimensionar estos equipos. Entre estos, el más utilizado es el Código ASME Sección VIII División 1<sup>3</sup> en donde se trabaja con las tensiones membranales y la División 2<sup>4</sup> donde es necesario separar los efectos de membrana y de flexión para proceder a su verificación mediante las tensiones admisibles establecidas para cada caso.

El trabajo presentado, se divide en 4 partes:

1-. A partir del tratamiento de cáscaras delgadas en la Teoría de la Elasticidad, con las ecuaciones de Huggenberger<sup>1</sup> y Coates<sup>1</sup>, considerando los efectos de membrana y de flexión, se determina el estado tensional para cabezales del tipo semielíptico.

2-. Se efectuará una modelización por Elementos Finitos, para un caso particular de cabezal semielíptico, confeccionado mediante el uso de un software de calculo.

3-. Se compararán los resultados obtenidos por Teoría de la Elasticidad y por la modelización de Elementos Finitos, considerando los efectos de membrana y el combinado de membrana + flexión. Esto permitirá ajustar el modelo de cálculo para futuros estudios.

4-. Con los resultados obtenidos, se confeccionarán las curvas de diseño en donde se presenta la siguiente información:

- a) Tensiones Circunferencial y Meridional debido a efecto de membrana y flexión sobre dicho cabezales.
- b) Valores máximos de tensiones que experimentan dichos cabezales para diferentes relaciones geométricas de lados ( $k = a/b$ ) y para una familia de espesores.

Mediante estas curvas, de gran utilidad práctica, permiten al proyectista o especialista en “Stress Analysis”:

- a) Conocer el Estado Tensional referente a las tensiones circunferencial y meridional debido a efectos de membrana y flexión sobre dichos cabezales.
- b) Conociendo los factores de concentración de tensiones que se presentan en la intersección entre un recipiente cilíndrico o esférico con una conexión y cuya información se obtiene de bibliografía o normas existentes, determinar en un primer análisis la integridad estructural de dicha unión, adoptando como límite de diseño para su verificación, las tensiones admisibles dado por los códigos.

## MODELO DESARROLLADO POR TEORÍA DE LA ELASTICIDAD

En este trabajo se consideran los efectos de membrana y flexión, producto de la transición que experimenta este tipo de cabezal. En las figuras 1 y 2 se muestran las variables y parámetros que intervienen en la determinación de las tensiones que se presentan en un cabezal semielíptico. El equilibrio se plantea en un diferencial de elemento de dicho cabezal. La tensión  $f_m$ , es la tensión en el elemento, en la dirección meridional llamada “Tensión Meridional” y la tensión  $f_h$ , es la tensión que actúa circunferencialmente en el elemento denominada “Tensión Circunferencial”. Dichas tensiones son además tensiones principales existentes en los lados del elemento.

Las ecuaciones de Huggenberger<sup>1</sup> obtenidas para esfuerzos de membrana son las siguientes:

$$f_m = \frac{p}{2 \cdot t} \cdot \sqrt{(a \cdot k)^2 + r_o^2 \cdot (1 - k^2)} \quad (1)$$

$$f_h = \sqrt{(a \cdot k)^2 + r_o^2 \cdot (1 - k^2)} \cdot \left[ 1 - \frac{(a \cdot k)^2}{2 \cdot [(a \cdot k)^2 + r_o^2 \cdot (1 - k^2)]} \right] \cdot \frac{p}{t} \quad (2) \quad \text{siendo } k = a/b \quad (3)$$

Ante una sollicitación de presión interna, el cabezal y el cilindro (envoltura) experimentarán desplazamientos diferentes debido a su configuración geométrica. Como resultado de la unión, existirá una oposición a la libertad de desplazamiento, que se manifiesta en un esfuerzo de flexión. Para el modelo, se considera que el cabezal se comporta elásticamente y su espesor es despreciable en comparación con el diámetro del mismo, o sea, estamos frente a la Teoría de Cáscaras Delgadas.

Para determinar los efectos de flexión se usan las relaciones de Coates<sup>1</sup> desarrolladas para análisis de discontinuidad de tensiones, que se presentan a continuación:

$$\frac{\partial^4 y_2}{\partial x_2^4} + 4 \cdot \beta_2^4 \cdot y_2 = 0 \quad (4)$$

$$\beta_2 = \sqrt[4]{\frac{3 \cdot (1 - \mu^2)}{r_2^2 \cdot t^2}} \quad (5)$$

X<sub>2</sub> = distancia media a lo largo del meridiano, a partir de la unión ( fig. 2).

r<sub>2</sub> = radio de curvatura de la sección circunferencial del cabezal ( fig. 2).

α = ángulo entre la normal al cabezal y el plano de la unión ( fig. 2).

Sobre la unión del cabezal y el cilindro, se imponen restricciones, considerando ambos espesores iguales:

a - El desplazamiento radial del cilindro y el cabezal, deben ser iguales.

b - La tangente en la curva de desplazamiento para el cabezal y el cilindro, deben ser iguales.

Estas condiciones de borde permiten resolver la ecuación (4) y determinar las tensiones meridionales y circunferenciales debidas a flexión:

$$f_{mb} = -\frac{3 \cdot p \cdot k^2 \cdot a^2}{4 \cdot \sqrt{3 \cdot (1 - \mu^2)} \cdot t \cdot r_2} \cdot e^{\left[-\int_0^{x_2} \beta_2 \cdot \partial x_2\right]} \cdot \text{sen} \left[ \int_0^{x_2} \beta_2 \cdot \partial x_2 \right] \quad (6)$$

$$f_{hb} = \frac{p \cdot k^2 \cdot a^2}{4 \cdot t \cdot r_2} \cdot e^{\left[-\int_0^{x_2} \beta_2 \cdot \partial x_2\right]} \cdot \text{cos} \left[ \int_0^{x_2} \beta_2 \cdot \partial x_2 \right] \quad (7)$$

La solución de las ecuaciones (6) y (7) es muy compleja, a causa que el radio de curvatura de la sección circunferencial del cabezal “r<sub>2</sub>” (ver figura 2), es variable. Por esto, β<sub>2</sub> que depende de r<sub>2</sub>, también es una variable. El factor “x<sub>2</sub>”, es una distancia lineal, medida desde la unión. Esta distancia no es función de “r<sub>0</sub>” ( distancia radial del cabezal al meridiano) y solo puede ser evaluado gráficamente o por integrales elípticas ( se toma este caso). Esto impide la integración formal del termino “ β<sub>2</sub> · ∂x<sub>2</sub> “ en las ecuaciones (6) y (7).

El arco “s” por trigonometría, es igual a:

$$s = a \cdot \int_0^\alpha \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \cdot \partial \alpha \quad (8)$$

La ecuación (8) no se puede evaluar en forma finita en término de la función elemental de α. Por tal motivo, la función que esta dentro del integrando va a ser reemplazada por el uso de serie infinita.

$$f(\alpha) = \frac{s}{a} = \sqrt{1 - k^2 \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (9)$$

Como la función f(α), posee diferenciación “n” veces en el origen, esta se puede definir por un polinomio aproximador o “ Polinomio de Maclaurin” P<sub>n</sub>(α):

$$P_n(\alpha) = \sum_{t=0}^n \frac{f^{(t)}(0)}{t!} \cdot \alpha^t = f^{(0)} + f^{(1)} \cdot \alpha + \frac{f^{(2)}(0)}{2!} \cdot \alpha^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \cdot \alpha^n \quad (10)$$

Con el objeto de controlar el error en la aproximación y disminuir el costo del cálculo, el procedimiento se basa en un bucle de “optimización” del error “e”, definido por el usuario ( en este caso se optó por e ≤ 0.7%). En la figura 3 se muestra el esquema del procedimiento. Se debe tener en cuenta que por el tipo de función base, la derivada impar no contribuye en el polinomio aproximador. En la figura 4 se aprecia la curva del error en la aproximación descrita, dentro del campo de variación de los parámetros de estudio.

Por lo tanto se llega a la siguiente función :

$$f(\alpha) \cong P_n(\alpha) \quad (11) \quad \text{o mejor} \quad f(\alpha) = P_n(\alpha) + e_{(k, \alpha)} \quad (12)$$

Una vez obtenido el polinomio aproximador, se procede a calcular las propiedades geométricas, presentando aquellas de mayor importancia y comenzando por x<sub>2</sub>.

$$x_2 = a \cdot \left[ \int_0^{90} P_n(\alpha) \cdot \partial\alpha - \int_0^\alpha P_n(\alpha) \cdot \partial\alpha \right] \quad (13)$$

Esta ecuación se resuelve para diferentes valores de “k”, para un “a” prefijado a elección del usuario.

La distancia “r2”, por trigonometría, es:

$$r_2 = a \cdot \sqrt{k^2 + (1 - k^2) \cdot \text{sen}^2 \alpha} \quad (14)$$

El ámbito de nuestro análisis comprende gran parte de los recipientes utilizados en la construcción de Plantas Industriales. A fin de evaluar estos equipos, el estudio se realiza conforme el análisis mencionado anteriormente, para valores de espesores que van de 0.25 in a 1.75 in utilizando un coeficiente de Poisson  $\mu = 0,3$  y para diferentes relaciones de  $k = a/b$  de 1 a 3. Procediendo al cálculo de  $\beta_2$  como se definió en (5), se obtiene:

$$\beta_2 = 1,2854 \cdot \frac{l}{\sqrt{r_2} \cdot t} \quad (15)$$

Siendo  $\beta_2$  una función  $f(r_2, t)$  o que es lo mismo  $\beta_2 = f(k, \alpha, t)$ .

Remplazando las ecuaciones (13), (14), (15) en (6) y (7) y operando se obtienen las tensiones  $f_{mb}$  y  $f_{hb}$ . Una vez calculadas las tensiones por efectos de flexión, se requieren las tensiones combinadas, esto se consigue de la suma algebraica entre ambas. En las figuras 5 se muestran los resultados obtenidos del análisis para un  $k = a/b = 2$  (recomendado por ASME). Debido a la extensión de la Información existente, solo se presentará en el estudio los resultados obtenidos para  $k=2$ .

## MODELIZACIÓN DE ELEMENTOS FINITOS

Con el objeto de comparar los resultados obtenidos anteriormente a través de Teoría de la Elasticidad, se preparó un modelo de Elementos Finitos utilizando un modelo axialsimétrico de cáscara de dos nodos por elemento, con tres grados de libertad por nodo. Este es un elemento basado en el estado axilsimétrico de tensiones y deformaciones cuando la carga y la geometría son axilsimétrica.

Teniendo en cuenta la simetría del cabezal con respecto a su eje de revolución, se modeló la mitad del mismo, colocando las condiciones de borde correspondientes. Para no afectar con las condiciones de borde los resultados en la zona de transición, se prolongó suficientemente la longitud del sector cilíndrico del recipiente.

Se efectuó un refinamiento del modelo en la zona de transición de cabezal denominado (en inglés) “knuckle” ya que allí se evidencian gradientes elevados de tensión (efectos de flexión). El modelo quedó conformado por 141 nodos, 140 elementos y 423 grados de libertad, el cual se presenta en la figura 6. Para el análisis se utilizó el programa de Elementos Finitos Nisa<sup>2</sup>.

Para comparar los resultados con el modelo desarrollado por Teoría de la Elasticidad, se utilizó un caso particular de cabezal semielíptico, en donde la relación de lados de dicha elipse  $k=a/b=2$  (ampliamente usado en los recipientes contenedores de presión) y para un espesor particular  $t=1,25$  in.

En la figura 7, se presentan las tensiones meridional y circunferencial por la línea media de la cáscara, MIDDLE que representa los efectos de membrana y superficie exterior e interior, TOP y BOTTOM representa flexión.

## COMPARACIÓN DE RESULTADOS

Se comparan los resultados obtenidos a partir de Teoría de la Elasticidad con los del Método de Elementos

Finitos. Las diferencias encontradas entre ambos estudios están en el orden del 5%, lo cual hace aceptable el modelo de cálculo propuesto. Esto permite ajustar el modelo para un análisis futuro, sobre cabezales toriesféricos en donde para este caso no hay suficiente información en bibliografía o normas.

En la figura 8 se muestran los resultados del estado tensional en la superficie media e interior de un cabezal semielíptico para  $k = 2$  y espesor de 1,25 in obtenidos por ambos procedimientos. En las figuras 8a y 8b se muestran la tensión circunferencial, obtenidas por efecto de membrana y de flexión, respectivamente. En las figuras 8c y 8d se muestran la tensión meridional, obtenidas por efecto de membrana y de flexión, respectivamente. A partir de dichos resultados se verifica el grado de aceptabilidad del modelo propuesto en el presente análisis.

## CURVAS DE DISEÑO

Basándonos en los resultados obtenidos en este trabajo sobre las tensiones circunferencial y meridional, se confeccionan las siguientes curvas de diseño, además de las presentadas en la figura 5, para relaciones de  $k$  que van de 1 hasta 3 y para el rango de espesores anteriormente definido (de 0,25 a 1,75 in). Por lo tanto:

Figura 9 (a),(b),(c) Curvas de Diseño debido a efectos de membrana.

Figura 10 (a),(b),(c) Curvas de Diseño debido a efectos de membrana más flexión.

## CONCLUSIONES

Este tipo de trabajo de gran utilidad práctica permite al proyectista o especialista en “Stress Analysis” obtener el estado tensional de un cabezal semielíptico debido a efectos de membrana y flexión, necesarios para determinar su integridad estructural y dimensionamiento, utilizando los Códigos de Diseño, en particular el Código ASME.

La Sección VIII División 1 del Código ASME<sup>3</sup>, trabaja con las tensiones membranales y la División 2<sup>4</sup> separa los efectos de membrana y flexión para proceder a su verificación mediante las tensiones admisibles establecidas para cada caso.

Por otro lado estas curvas permiten, en particular las presentadas en la figura 5, y conociendo los factores de concentración de tensiones que se presentan en la intersección entre un recipiente cilíndrico o esférico con una conexión (información existente en bibliografía y normas), determinar en un primer análisis la integridad estructural de dicha unión, adoptando como parámetro de diseño para su verificación, las tensiones admisibles dadas por los Códigos.

De esta manera es sencillo proceder a la selección y ubicación de distintos tamaños de conexiones sobre estos cabezales, a partir de las curvas de diseño y de los factores de concentración de tensiones que introducen estas conexiones.

Actualmente se está trabajando en esta línea con cabezales del tipo toriesféricos cuya información sobre su estado tensional no está divulgada en la literatura y/o normas.

## REFERENCIAS

- [1] Equipment Process: Brownell and Young.
- [2] Numerical Integrated Elements for System Analysis - NISA- . Computer Program Realise N° 93.0.
- [3] ASME Sección VIII División 1. Edición 1998.
- [4] ASME Sección VIII División 2. Edición 1998.

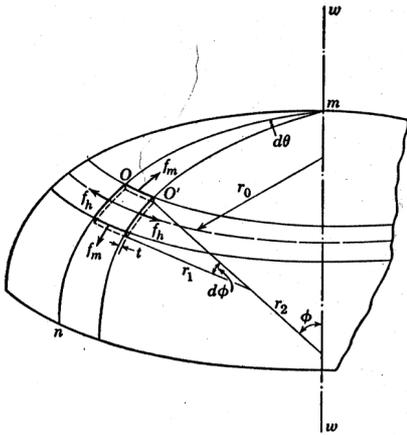


Figura 1. Tensiones que actúan en un elemento diferencial, en un cabezal elíptico

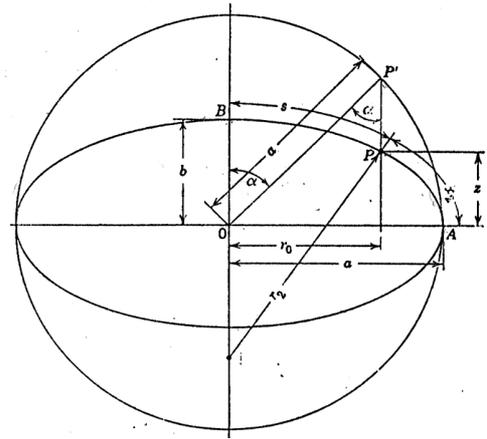


Figura 2. Variables trigonométricas para la elipse.

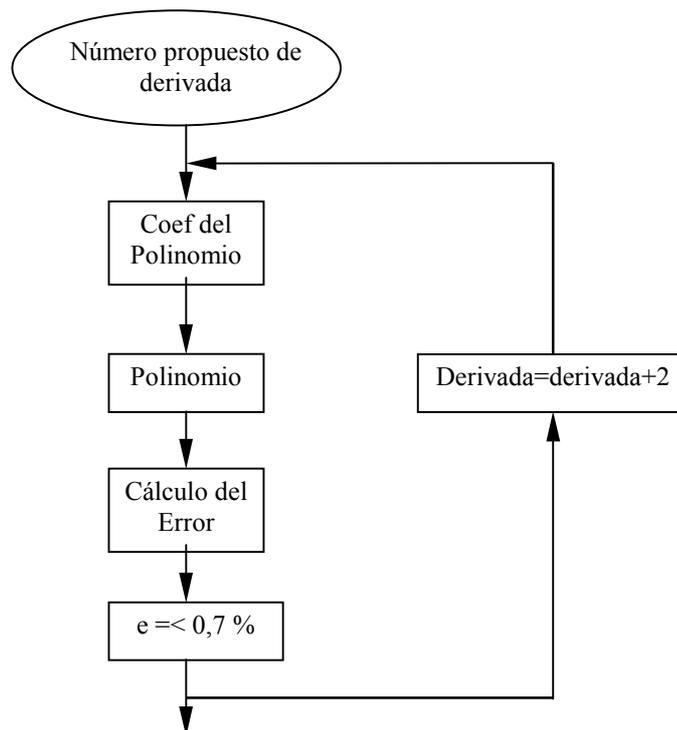


Figura 3. Esquema de procedimiento iterativo para cálculo del error.

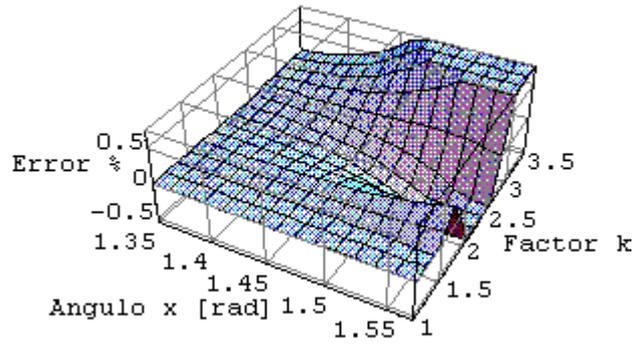


Figura 4. Variación del error “e” en porcentaje, con respecto al factor “k” y al ángulo “ $\alpha = x$ ”

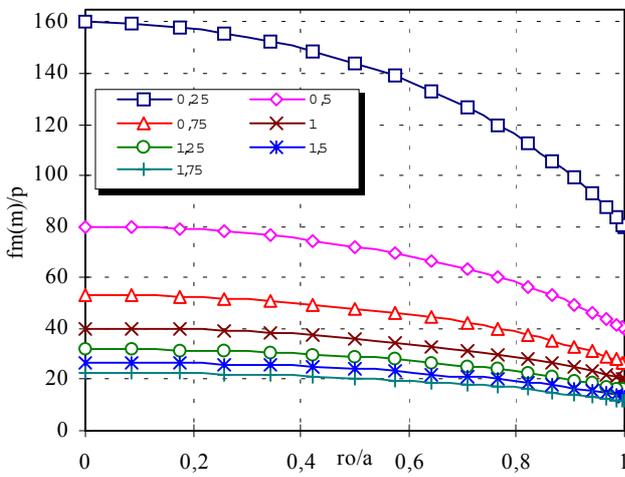


Figura 5a. Variación de la tensión meridional por efecto de membrana, en función de ro/a para diferentes espesores.

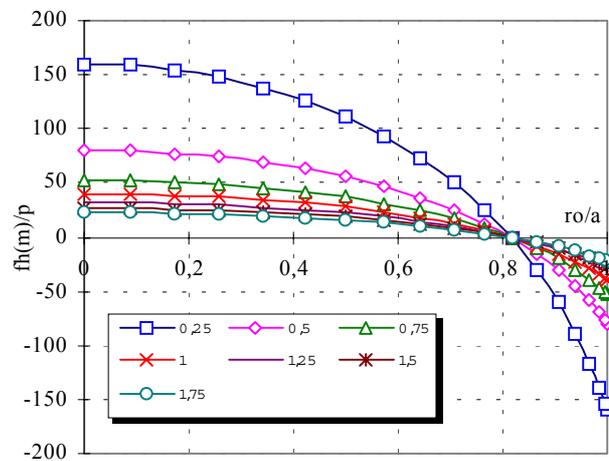


Figura 5b. Variación de la tensión circunferencial por efecto de membrana, en función de ro/a para diferentes espesores.

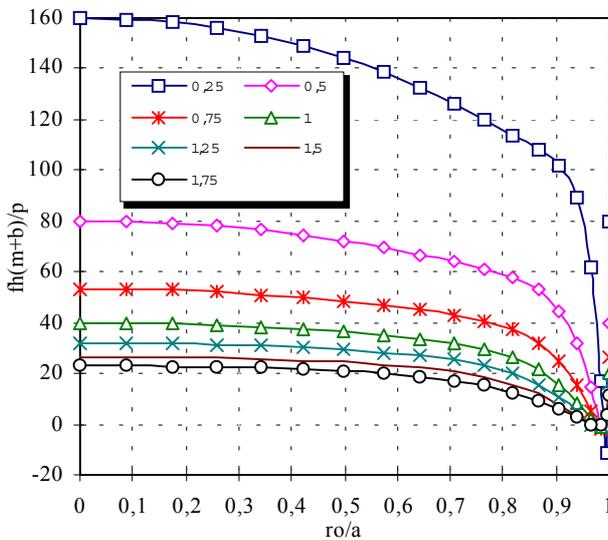


Figura 5c. Variación de la tensión meridional por efecto combinado (membrana+flexión), en función de ro/a para diferentes espesores.

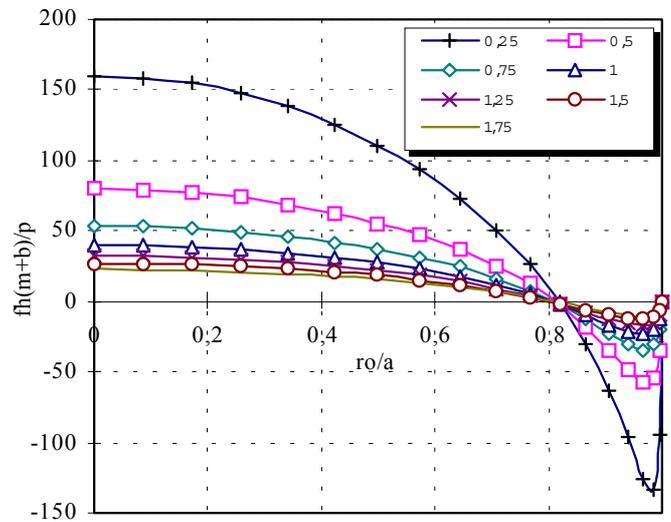


Figura 5d. Variación de la tensión circunferencial por efecto combinado (membrana+flexión), en función de ro/a para diferentes espesores.

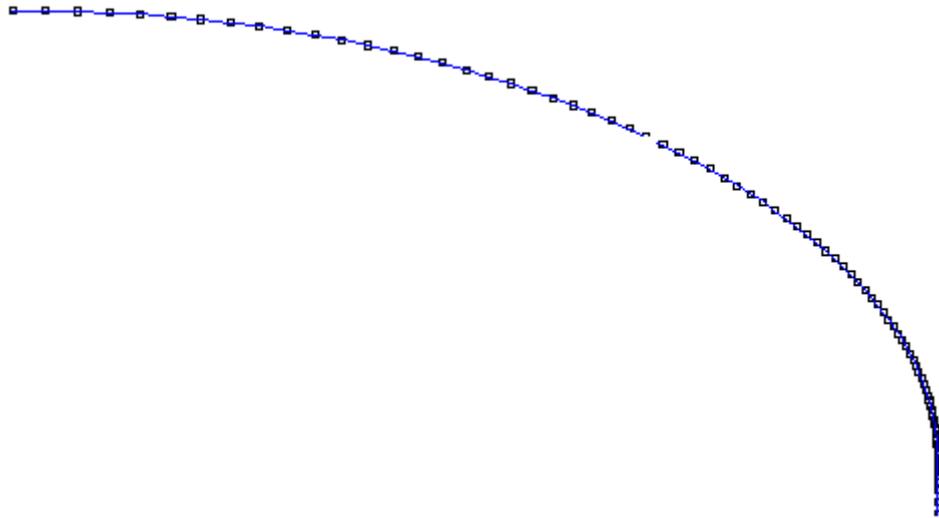


Figura 6. Discretización de Elementos Finitos. Solo se muestra el cabezal.

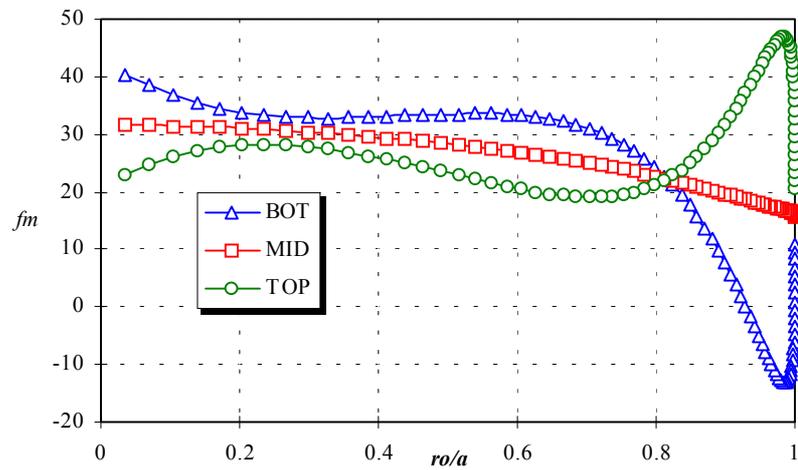


Figura 7a. Tensión meridional en función de  $ro/a$ . Obtenida por modelización de Elemento Finitos.

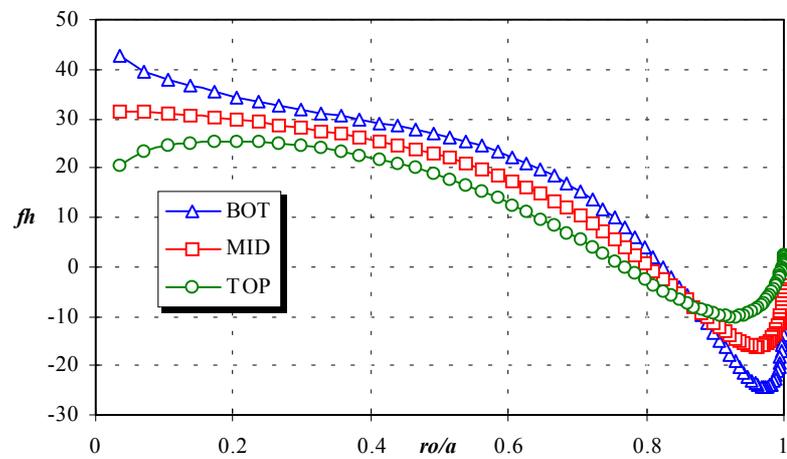


Figura 7b. Tensión circunferencial en función de  $ro/a$ . Obtenida por modelización de Elemento Finitos.

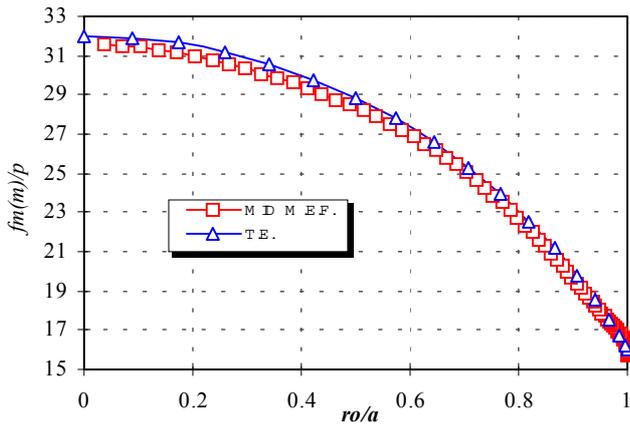


Figura 8a. Tensión Meridional, por efecto de membrana, en función de  $ro/a$ . Comparación de resultados obtenidos por M.E.F. y T. de la E.

Figura 8b. Tensión Meridional, por efecto combinado (membrana + flexión), en función de  $ro/a$ . Comparación de resultados obtenidos por M.E.F. y T. de la E.

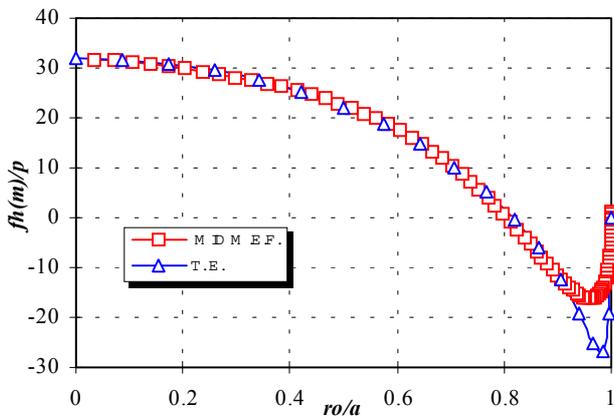
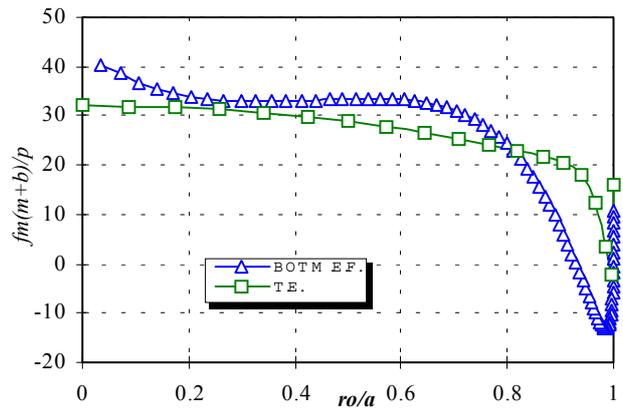
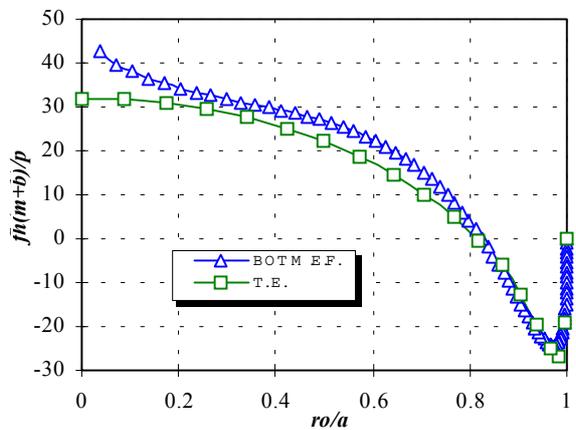


Figura 8c. Tensión Circunferencial, por efecto de membrana, en función de  $ro/a$ . Comparación de resultados obtenidos por M.E.F. y T. de la E.

Figura 8d. Tensión Circunferencial, por efecto combinado (membrana + flexión), en función de  $ro/a$ . Comparación de resultados obtenidos por M.E.F. y T. de la E.



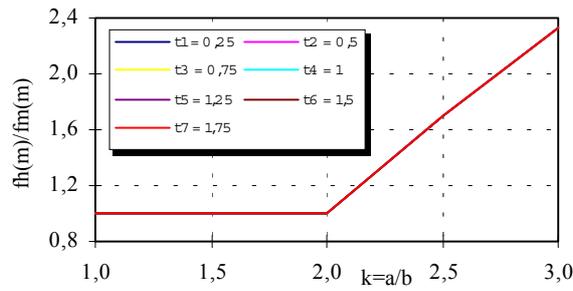


Figura 9a. Relación entre las Tensiones Circunferencial y Meridional por efecto de membrana y unidad de presión.

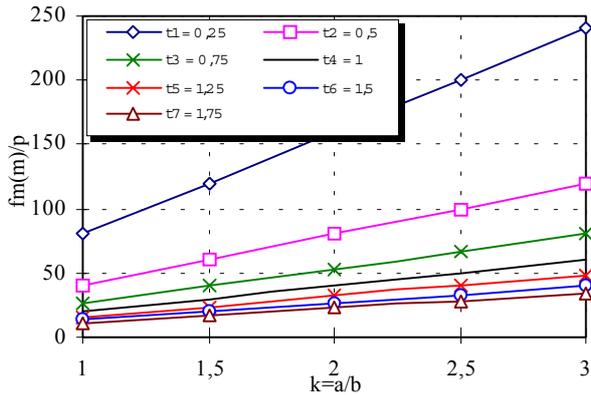


Figura 9b. Curva de Diseño para la Tensión Meridional por efecto de membrana y unidad de presión.

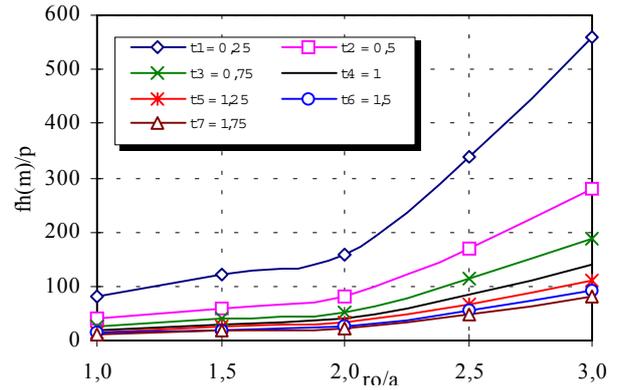


Figura 9c. Curva de Diseño para la Tensión Circunferencial por efecto de membrana y unidad de presión.

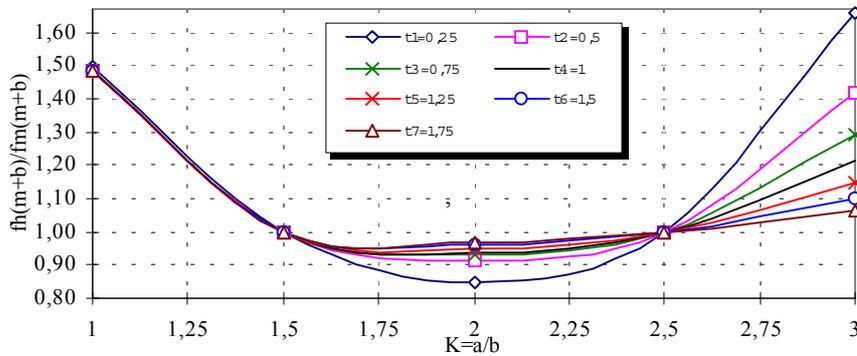


Figura 10a. Relación entre las Tensiones Circunferencial y Meridional por efecto combinado (membrana+flexión) y unidad de presión.

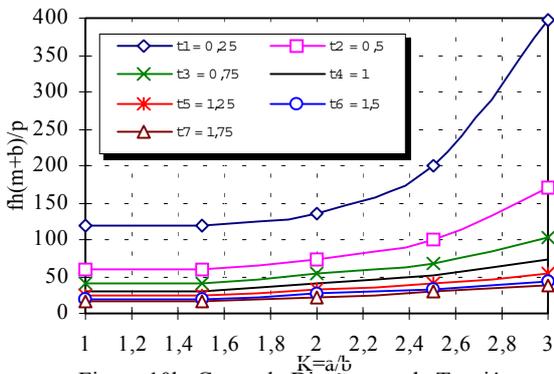


Figura 10b. Curva de Diseño para la Tensión Meridional por efecto combinado ( membrana + flexión) y unidad de presión.

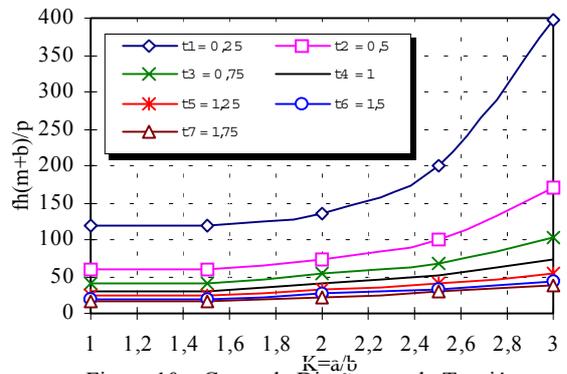


Figura 10c. Curva de Diseño para la Tensión Circunferencial por efecto combinado ( membrana + flexión) y unidad de presión.