

UN MODELO ELASTOPLASTICO PARA GEOMATERIALES CON GRANDES DEFORMACIONES

Ricardo Schiava

Grupo de Mecánica Computacional-Facultad de Ciencias Exactas y Tecnologías
Universidad Nacional de Santiago del Estero Avda. Belgrano (s) 1912-(4200) Santiago del Estero.
Argentina
e-mail: schiava@unse.edu.ar

Guillermo Etse

Universidad Nacional de Tucumán
Avda. Independencia 1400-(4000) Tucumán .Argentina
e-mail : getse@herrera.unt.edu.ar

RESUMEN

Los geomateriales presentan un comportamiento de alta complejidad y variabilidad lo que ha motivado la formulación de gran número de modelos constitutivos que dependen de diferentes idealizaciones matemáticas.

Los modelos elastoplásticos “presión dependientes” son considerados los que más apropiadamente representan ese comportamiento por la existencia de deformaciones inelásticas debidas a tensiones de corte y/o presiones volumétricas. Debido a la complejidad matemática de estos modelos, tal como ley elastoplástica y ley de endurecimiento-ablandamiento dependiente del trabajo de disipación plástica resultan de una naturaleza compleja no trivial de implementarse.

El objetivo de este trabajo es desarrollar un modelo elastoplástico para medios cohesivos friccionales en el marco del régimen de deformaciones finitas, basado en el modelo tipo “cono-capa” de MRS-Lade.

ABSTRACT

The mechanical behavior of geomaterials have high complexity and variability, which have been reported a large number of constitutive models, depending on different mathematical idealizations.

The pressure – dependent elasto-plastic models are considered as the most appropriate representations this behavior because of the existence of inelastic deformation of the materials subjected to shear stress or/and volumetric pressure. Because the mathematical complexities this models, such as nonlinear elastic law and work plastic dissipation dependent hardening/softening law, resulting from the complex nature implementation is not trivial.

The objective of this paper is development an elasto-plastic models for frictional cohesive materials within the regime of finite deformation based in the “cone-cap” MRS-Lade models.

1. INTRODUCCION

En los últimos años se implementaron varios modelos para geomateriales formulados para el caso de pequeñas deformaciones y más recientemente se aplicaron modelos elastoplásticos en grandes deformaciones a criterios de fluencia tipo Cam-clay realizadas por Simo y Meschke y Meschke y otros[1].

En este trabajo se presenta la implementación de un modelo elastoplástico para materiales cohesivos friccionales en el marco del régimen de deformaciones finitas con desarrollo de una total integración implícita.

Al igual que en la teoría elastoplástica para pequeñas deformaciones, en la formulación para grandes deformaciones se considera la descomposición aditiva del gradiente de deformación F en sus partes elástica F^e y plástica F^p . La respuesta tensional se obtiene definiendo el material como hipoeástico donde las componentes del tensor velocidad de tensión son funciones lineales de las componentes del tensor velocidad de deformaciones.

El modelo considera el dominio elástico definido por: $f(\sigma, \kappa) < 0$ y $f(\sigma, \kappa) = 0$ determina una superficie de fluencia convexa en el espacio de tensiones en la configuración actual.

Esta función se expresa de la misma manera que para pequeñas deformaciones, con σ el tensor de tensiones de Cauchy en la configuración deformada y k es un conjunto de variables internas que caracterizan el endurecimiento plástico del material, que se asumen como función escalar.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

2.1 En la configuración original :

El tensor gradiente de deformación F definido como :

$$F = \frac{\partial x}{\partial X} \quad (1)$$

Al igual que en la teoría elastoplástica en deformaciones infinitesimales, se considera la descomposición aditiva del tensor de deformaciones, el que se divide en su parte elástica F^e y en la plástica F^p por medio de :

$$F = F^e + F^p \quad (2)$$

El tensor de Cuachy-Green : $C = F^T F$ (3)

y el tensor de Green Lagrange :

$$E = \frac{1}{2}(C - I) \quad (4)$$

será :

$$E = E^e + E^p \quad (5)$$

Los tensores velocidad de deformación en la configuración indeformada ${}^0\Omega$ son:

$$\dot{E} = \dot{E}^e + \dot{E}^p \quad (6)$$

Se define el material como hipoeástico donde las componentes del tensor velocidad de tensión son funciones lineales de las componentes del tensor velocidad de deformaciones.

Por lo tanto se define el incremento del segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff como :

$$\dot{S} = D : \dot{E} \quad (7)$$

donde D es el tensor de elasticidad tangente en la configuración original

2.2 En la Configuración Deformada :

La expresión espacial ó euleriana del modelo es :

$$e = e^e + e^p \quad (8)$$

donde : $e = \frac{1}{2}(I - b^{-1})$ (9)

es el tensor de deformaciones de Almansy,

y $b = F F^T$ (10)

que es el Tensor Izquierdo de Cauchy-Green

El Tensor de tensiones de Cauchy viene dado por :

$$\sigma = \frac{1}{J} \phi_* S \quad (11)$$

donde es: ϕ_* la transformación push-forward, [2] por lo tanto será :

$$\sigma = \frac{1}{J} F S F^T \quad (12)$$

y el incremento del tensor de tensiones en la configuración deformada vendrá dado por :

$$\dot{\sigma} = \frac{1}{J} \phi_* \dot{S} \quad (13)$$

De acuerdo con el criterio de carga y descarga de Kuhn Tucker las condiciones que deben cumplir los procesos elastoplásticos son :

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad f(\sigma, \kappa) \leq 0 \quad f \dot{\lambda} = 0 \quad (14)$$

El tensor velocidad de deformación en la configuración deformada viene dado por :

$$d = L_*(e) = \frac{1}{2} \phi_* E \quad (15)$$

$$d = d^e + d^p \quad (16)$$

donde : d^e y d^p son las componentes elásticas y plásticas del tensor velocidad de deformaciones.

En el proceso elastoplástico, la componente plástica del tensor velocidad de deformación viene definida por :

$$d^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma} \quad (17)$$

con g función de potencial plástico .

Se tendrá que , las ecuaciones de la evolución local (ley de fluencia) en la forma de una ley no asociativa y ley de endurecimiento se obtiene partiendo de la relación hipoeástica espacial:

$$\dot{\sigma} = a^e : (d - d^p) \quad (18)$$

donde : $a = J \phi_* D \quad (19)$

$$d^e = (d - d^p) \quad (20)$$

$$d^p = \dot{\lambda} m \quad (21)$$

Con $m = \frac{\partial g}{\partial \sigma}$ es el gradiente de la función potencial

Y la evolución de la ley de endurecimiento: $\kappa = h(d^p)$

Utilizando la regla de fluencia se la puede expresar como :

$$\dot{\sigma} = \dot{\sigma}^e - \dot{\lambda} a^e : m \quad (22)$$

donde : $\dot{\sigma}^e$ es el incremento del predictor elástico que se obtiene asumiendo $d^p = 0$

3. EL CPPM EN EL ESPACIO GENERAL DE TENSIONES

El Método de Proyección al Punto más cercano (CPPM : Closet-Point Projection Method), corresponde a la minimización de la energía de disipación plástica en el espacio métrico definido por el operador elástico modificado mediante el tensor de cuarto orden A , Etse y Willam [2], que describe

la relación entre el gradiente a la superficie de fluencia y el gradiente del potencial plástico. Partiendo de las relaciones constitutivas generales para ley de fluencia no asociada:

$$\begin{aligned} \sigma &= a^e : (d - d^p) \\ A : d^p &\in \partial F\{\sigma, \kappa\} \end{aligned} \quad (23)$$

$$\kappa = h(d^p)$$

Asumimos que la dirección de potencial plástico m , es calculada en relación al gradiente de la función de fluencia n vía la transformación A , expresada de la forma: $m_i = A^{-1} n_i$, y por lo tanto de considera una variación volumétrica no asociada mediante la expresión:

$$A = I + \frac{1}{3} \beta \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad , \quad A^{-1} = I - \frac{\beta}{3(\beta+1)} \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} \quad (24)$$

donde: β es el parámetro de dilatación e I es el tensor identidad de cuarto orden, se observa que si: si $\beta = 0$ se tiene regla de fluencia asociada y cuando $\beta > 0$ es no asociada.

Aplicando el primer postulado de Drucker:

$$\Delta \sigma : \Delta d > 0 \quad (25)$$

Para una superficie de fluencia convexa y para una valor particular de las variables de endurecimiento y ablandamiento κ y aplicando la condición de normalidad se obtiene la desigualdad variacional:

$$({}^{n+1} \sigma - \sigma^*) : {}^{n+1} c_A^e : ({}^{n+1} \sigma^e - {}^{n+1} \sigma) \geq 0 \quad \forall \sigma^* \in B(\kappa) \quad (26)$$

donde: ${}^{n+1} c_A^e = {}^{n+1} A : c^e$ y con el tensor elástico complementario: $c^e = (a^e)^{-1}$

Se puede observar que la solución a la desigualdad anterior, sujeta a la condición de consistencia plástica, se la obtiene como un problema de encontrar para un ${}^{n+1} \sigma$ que satisfaga la condición de mínima [3]:

$$\min E_A(\sigma^*) \quad \forall \sigma^* \in B({}^{n+1} \kappa) \quad (27)$$

donde $E_A(\sigma^*)$ representa la distancia desde ${}^{n+1} \sigma^e$, al conjunto $B({}^{n+1} \kappa)$, medida como la norma de la energía complementaria transformada.

4. SUPERFICIES DE FLUENCIA

El modelo consiste en un fragmento de superficie de fluencia curva alisada constituida por la superficie de fluencia movible del cono hasta alcanzar la última superficie de falla y otra superficie extendida entre el cono y el eje hidrostático que también evoluciona con el trabajo de endurecimiento[4][5]. La superficie de fluencia tiene la forma de un cono asimétrico, con el vértice localizado a la izquierda del origen del espacio de tensiones, dependiendo de las características cohesivas del material en cuestión y representada por la ecuación:

$$F_{cono}\{p, q, \theta, \kappa_{cono}\} = f\{q, \theta\} - \eta_{cono}\{\kappa_{cono}\} (p - p_c) = 0 \quad (28)$$

$$\text{con:} \quad f\{q, \theta\} = q \left(1 + \frac{q}{q_a} \right)^m g\{\theta\} \quad (29)$$

$$p = \frac{I_1}{3} \quad ; \quad q = \sqrt{3J_{2D}} \quad ; \quad \cos 3\theta = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_{3D}}{\sqrt{(J_{2D})^3}} \quad (30)$$

donde q_a , m , η_{cono} y la cohesión p_c son parámetros del modelo y κ_{cono} es la variable de endurecimiento, calculada en base al trabajo plástico acumulado.

La superficie de capa, que involucra principalmente la respuesta volumétrica, viene dada por una superficie elíptica en plano meridiano expresada en términos de los invariantes de tensiones como:

$$F_{capa}(p, q, \kappa_{capa}) = \left(\frac{p - p_m}{p_r} \right)^2 + \left(\frac{f}{f_r} \right)^2 - 1 = 0 \quad (31)$$

en donde se han introducido las siguientes variables:

La presión de fluencia isotrópica p_{cap} es una función del parámetro de endurecimiento κ_{cap} . El parámetro α determina la forma de la superficie elíptica y η_{cap} representa la inclinación de la superficie de capa en intersección con el cono [6][7].

5. FUNCIONES DE POTENCIAL PLÁSTICO

El modelo emplea dos funciones de potencial plástico. La ley de fluencia ideada por Sture y otros asume una ley de fluencia no asociada para el cono en correspondencia con un comportamiento expansivo, viene dada por la expresión:

$$Q_{cono}(p, q) = f(q, \theta) - n \eta_{cono} (p - p_c) \quad (32)$$

con $n = \gamma \frac{p - \alpha p_{cap}}{p + \alpha p_{cap}}$ donde: γ parámetro del material a determinar

Para la superficie de capa la regla de fluencia es asociada, por lo que la función de fluencia coincide con la función de potencial plástico que viene dada por:

$$Q_{capa}(p, q, \theta, \kappa_{capa}) = \left(\frac{p - p_m}{p_r} \right)^2 + \left(\frac{f}{f_r} \right)^2 - 1 = 0 \quad (33)$$

6. LEY DE ENDURECIMIENTO Y ABLANDAMIENTO

Los parámetros de endurecimiento y ablandamiento κ_{cono} y κ_{cap} se definen en término del trabajo plástico acumulado w^p que es disipado durante la carga en el actual camino de tensiones:

$$w^p = \int \sigma : d^p dt \quad (34)$$

y en término de la ley incremental:

$$\kappa_{cono} = \frac{1}{c_{cono} p_a} \left(\frac{p}{p_a} \right)^l w^p \quad \kappa_{cap} = \frac{1}{c_{cap} p_a} \left(\frac{p_{cap,0}}{p_a} \right)^r w^p \quad (35)$$

donde: c_{cono} , c_{cap} , p_a , $p_{cap,0}$, l y r son constantes del material [3] [5].

7. SIMULACIÓN NUMÉRICA

En esta sección se simula la respuesta de suelos en ensayos de laboratorio convencionales como el ensayo de compresión triaxial y un típico problema geotécnico de una base superficial en condiciones de deformación plana, implementando el modelo en programa de elementos finitos.

7.1 Ensayos de Laboratorio

La simulación numérica que a continuación se realiza corresponde a ensayo de compresión triaxial con distintos niveles de confinamiento. La estructura se discretizó mediante dos elementos planos triangulares de tres nodos isoparamétrico [9]. Las simulaciones numéricas se realizaron al igual que en

los ensayos experimentales siguiendo la secuencia de aplicar primero una compresión volumétrica ó presión de cámara y luego desplazamientos verticales en los nodos superiores. En la Figura N°1 se puede observar la respuesta que se obtiene con el modelo original MRS-Lade y el modelo implementado para grandes deformaciones.

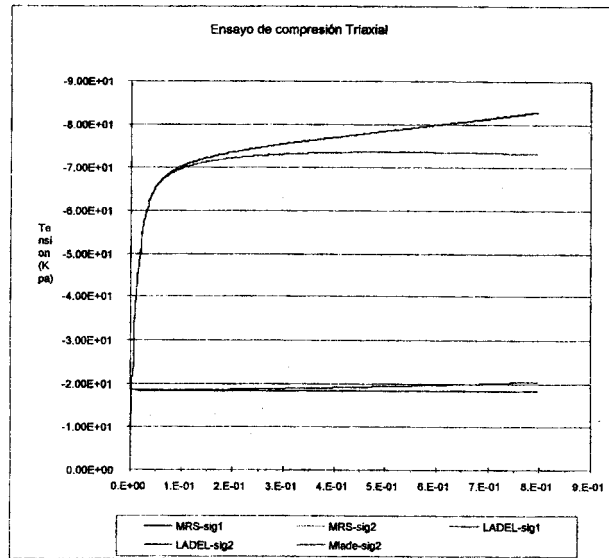


Figura 1 Modelación ensayos triaxiales

7.2 Problema geotécnico clásico

Se propone comparar la respuesta del modelo propuesto del comportamiento de bases superficiales con simulaciones realizadas aplicando otros modelos y con los valores de carga última que se obtiene con la teoría clásica de la capacidad de carga de Terzaghi.

En el ejemplo resuelto el comportamiento no lineal de una base continua es analizado mediante el método de elementos finitos en dos dimensiones en condiciones de deformación plana utilizando elementos cuadriláteros isoparamétricos de cuatro nodos para el modelo propuesto de MRS-Lade en grandes deformaciones. Luego la condición de deformación plana es simulada en un análisis con malla de elementos finitos tridimensional cuadriláteros isoparamétricos de ocho nodos, utilizando el modelo de Drucker-Prager. Detalles de la malla utilizada, condiciones de borde y aplicación de los desplazamientos en la dirección vertical se observan en la Figura N°2.

La modelación utilizada es similar a la que se encuentra desarrollada en Chap. 10-Example 10-6-Figuras N°10-23/24 de Desai[8]

Las curvas respuesta tensión vertical- desplazamiento obtenidas para los tres modelos utilizados se grafican en la Figura N°3.

Se observa la buena correlación de resultados obtenidos sobre todo las simulaciones con el modelo MRS-Lade en grandes deformaciones. Además la carga última predicha en la simulación con el modelo propuesto para deformaciones finitas muestra una concordancia con el valor obtenido usando la fórmula clásica de capacidad de carga de Terzaghi que resulta de : 265 psi (1828.5 kN/m²).

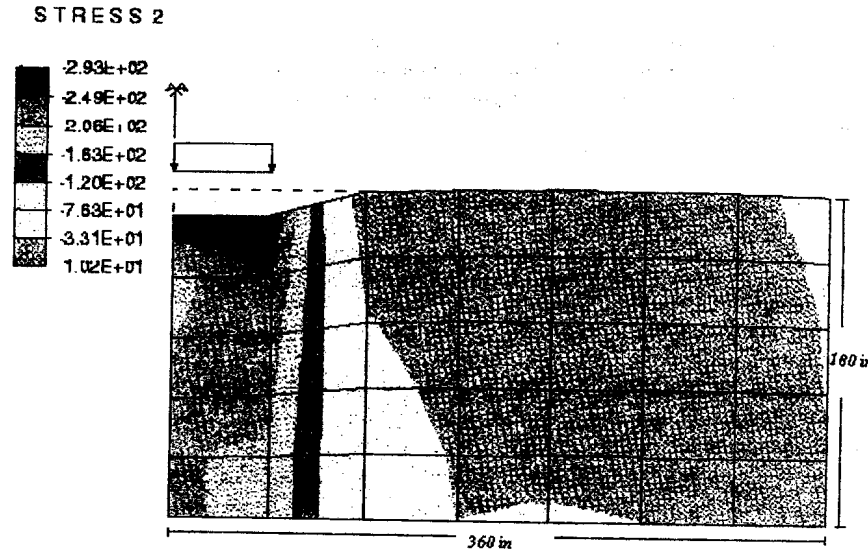


Figura 2. Malla deformada y tensiones verticales

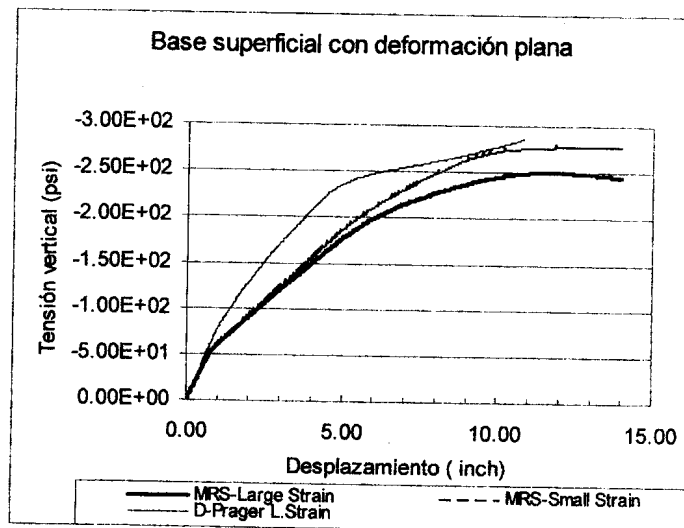


Figura 3. Curvas carga desplazamiento comparativas

CONCLUSIONES

Se ha propuesto un modelo elastoplástico para geomateriales en el regimen de grandes deformaciones en el que al igual que en la teoría elastoplástica en deformaciones infinitesimales, se considera la descomposición aditiva del tensor gradiente de deformaciones. Además se define el material como

hipoelástico donde las componentes del tensor velocidad de tensión son funciones lineales de las componentes del tensor velocidad de deformaciones. Los resultados preliminares obtenidos a la resolución de un problema clásico geotécnico muestra importante similitud con el modelo de Drucker-Prager en grandes deformaciones y mayor concordancia con los valores de capacidad de carga de la teoría clásica.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Liu C. H., Wong J. Y.; "Large Strain FE-Analysis of Sand Using Marc". Computacional Plasticity , Fundamentals and Applications, D.R.J. Owen, E. Oñate and E. Hinton (Eds). CIMNE, Barcelona.1997.
- [2] Garcia Garino Carlos ; "Un modelo Numérico para el Análisis de Sólidos Elastoplásticos sometidos a Grandes Deformaciones" . Tesis Doctoral . Universitat Politècnica de Catalunya-Escola Tecnica Superior D'Enginyers de Camins, Canals I Ports .Barcelona. 1993.
- [3] Weihe, Stefan ; Thesis : " Implicit integration schemes for multi-surface yield criteria subjected to hardening/softening behavior" University of Colorado, Boulder.1990.
- [4]Macari E. J., Weihe S., Arduino P. ; "Implicit Integration of elastoplastic constitutive models for frictional materials with highly non-linear hardening functions"Mechanics of Cohesive-Frictional Materials. Volume 2,Issue N°1.1997.
- [5] Schiava R., Etse G. " Modelo elastoplástico para medios cohesivos friccionales parcialmente saturados" 6º Congreso de Mecánica Computacional-Mecom 99-Mendoza-Argentina-1999.
- [6] Boris Jeremic ; Thesis " Implicit Integration Rules in Plasticity : Theory and Implementation " . Thesis Master of Science. University of Colorado .1994.
- [7] Schiava R. ; Etse G. ; "Modelación numérico computacional de suelos parcialmente saturados"XIX Jornadas Sudamericanas de Ingeniería Estructural "Jubileo don Julio Ricaldoni"-Punta del Este-Uruguay.2000
- [8] Desai S. Ch. , Siriwardane H. J. ; "Constitutive Laws for Engineering Materials with Emphasis on Geologic Materials" . Prentice-Hall , Inc., Englewood Cliffs, New Jersey 07632.1984.
- [9] Zienkiewicz O. ; Taylor R. L. ; "The Finite Element method" . McGraw Hill, New York ,Vol. I 1989, Vol. II 1991.