Mecánica Computacional Vol 20. pp. 187—194
Compilado por Fernando G. Flores
Córdoba, 30 de octubre - 2 de noviembre de 2001

# MODELOS CONSTITUTIVOS CONTINUOS BASADOS EN EORIAS MICROMECANICAS TERMOMECANICAS CONSISTENTES

Guillermo J. Etse
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad de Nacional Tucumán, C.P. 4000, Tucumán, Argentina
María M. Nieto, Juan M. Parnás
Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología
Universidad de Nacional de Santiago del Estero, C.P. 4200, Santiago del Estero, Argentina

## RESUMEN

La teoría constitutiva micropolar es reformulada en el marco general del concepto de microplanos con el fin de obtener ecuaciones constitutivas y modelos que incluyan información más precisa de la compleja microestructura de materiales ingenieriles como el hormigón y otros compuestos. El principal objetivo es el modelado macroscópico y la descripción del comportamiento de respuesta de materiales anisotrópicos por medio de la conocida teoría de microplanos cuando se aplica en continuos de Cosserat. Un concepto termodinámicamente consistente se considera para derivar la llamada *Teoría micropolar basada en microplanos*. La principal suposición de la presente propuesta es la relación integral entre la macroscópica y la microscópica energía libre de Carol, Jirasek y Bazant (2000) por medio de la cual las leyes de microplanos se eligen de forma que la desigualdad de Clausius-Duhem es totalmente satisfecha. De este marco teórico se derivan tanto modelos basados en microplanos elásticos como elastoplásticos micropolares.

## ABSTRACT

The micropolar constitutive theory is reformulated within the general framework of the microplane concept in order to obtain constitutive equations and models including available and more precise information of the complex microstructure of engineering materials like concrete and other composites. The main objective is the macroscopic modeling and description of anisotropic material response behaviors by means of the well-known microplane theory when applied to Cosserat continua. A thermodynamically consistent concept is considered to derive the so called *microplane-based micropolar theory*. The main assumption of the present proposal is the integral relation between the macroscopic and the microscopic free energy by Carol, Jirasek and Bazant (2000) whereby the microplane laws are chosen such that the macroscopic Clausius-Duhem inequality is fully satisfied. This theoretical framework is considered to derive both elastic and elastoplastic microplane-based micropolar models.

## INTRODUCCION

El desarrollo de formulaciones constitutivas para materiales ingenieriles ha experimentado un tremendo progreso en los últimos quince años. De esta evolución podemos estractar dos conclusiones principales. Por una parte, que el comportamiento de respuesta es fuertemente influenciado por la estructura microscópica y sus características mecánicas. Por otra parte y desde el punto de vista profesional, que modelos materiales macroscópicos eficientes y robustos son necesarios para simular computacionalmente el comportamiento de respuesta complejo de estructuras reales.

Como consecuencia observamos una tendencia definida a usar modelos macroscópicos basados en aspectos de la estructura miscroscópica de los materiales. Junto al aspecto positivo de incorporar información microscópica en la formulación material macroscópica por medio de consideraciones simples y consistentes, la contribución más importante de la teoría de microplanos viene de su capacidad superior de modelar los comportamientos materiales anisotrópicos. Actualmente, este es uno de los objetivos más importantes de la propuesta de Taylor [16] la cual se basa en la definición de relaciones totalmente independientes entre tensiones – deformaciones uniaxiales en varios planos en el material. La principal suposición de la teoría de microplanos es la relación entre las componentes de deformaciones o tensiones local o microscópica y el correspondiente tensor global o macroscópico. En consecuencia, deben considerarse dos aproximaciones, la restricción estática o la cinemática requiere que las deformaciones o las tensiones sobre cada microplano sean las componentes resueltas de sus contrapartes macroscópicas. La restricción estática ha sido usada extensivamente hasta la primera aplicación de la teoría de microplanos en mecánica de daño y en materiales cohesivos - friccionales [2] .

A pesar del progreso considerable de los modelos de microplanos y su excelente desempeño en materiales frágiles y cuasifrágiles, la falta de una aproximación termodinámicamente consistente para deducir formulaciones constitutivas basadas en microplanos es un déficit importante. En este sentido, el hecho de que la satisfacción del segundo principio de la termodinámica puede no estar garantizado [9], era una limitación crucial y fundamental para posteriores desarrollos de modelos de microplanos. Para resolver esta deficiencia, estos autores proponen un método para deducir formulaciones constitutivas de microplanos en un marco termodinámicamente consistente por medio de la incorporación de la energía libre de Helmholtz en cada microplano. Este concepto ha sido extendido exitosamente para comportamientos materiales inelásticos como daño y plasticidad [13]. Sin embargo estos trabajos como los previos [9] estan relacionados con continuos clásicos de Boltzmann, elásticos e inelásticos.

En el presente trabajo la aproximación termodinámicamente consistente para deducir modelos de microplanos es extendida además para el continuo micropolar de Cosserat, ver Cosserat [10]. El objetivo principal es enriquecer la cinemática microscópica y la resistencia de la formulación de microplanos para poder reproducir comportamientos particulares de la estructura interma de materiales compuestos cuasi frágiles como hormigón en el cual la presencia de agregados contribuye al desarrollo de microrotaciones en planos característicos de disipación de energía durante historias de carga mas allá del límite elástico.

En la sección 2 el concepto de microplanos se extiende para el continuo micropolar. De este modo, las restricciones cinemática y estática se redefinen para incluir las proyecciones de la curvatura macroscópica y de las cuplas tensionales macroscópicas a microplanos, respectivamente.

La Sección 3 se refiere a la aplicación del método termodinámicamente consistente propuesto para la formulación de modelos generales 3D elásticos lineales. En la Sección 4, elastoplasticidad, se derivan ecuaciones constitutivas para el caso general.

La teoría constitutiva propuesta en este trabajo permite la simulación de los procesos de degradación de materiales de ingeniería sobre la base de fenómenos microscópicos detallados que afectan fuertemente el comportamiento de respuesta. Es más, los resultados demuestran la capacidad de la aproximación termodinámicamente consistente para deducir modelos inelásticos micropolares basados en microplanos.

## TEORIA DE MICROPLANOS

### *Deformaciones y curvaturas en Microplanos*

En el caso de restricciones cinemáticas las componentes microscópicas de deformación simétricas y antisimétricas en la dirección normal y tangencial de los microplanos del continuo de Cosserat son definidas por

$$\boldsymbol{\varepsilon}_N^{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}^{sym} : \mathbf{N} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_N^{skw} = \boldsymbol{\varepsilon}^{skw} : \mathbf{N} = 0 \tag{1}$$

(2)

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} = \mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{sym} = \mathbf{T}^{sym} : \boldsymbol{\varepsilon} \qquad \boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw} = -\mathbf{T} : \boldsymbol{\varepsilon}^{skw} = -\mathbf{T}^{skw} : \boldsymbol{\varepsilon}$$

mientras que las componentes de curvatura correspondientes son

$$\boldsymbol{\kappa}_N = \boldsymbol{\kappa} : \mathbf{N} \qquad \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} = \mathbf{T}^{sym} : \boldsymbol{\kappa} \qquad \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} = -\mathbf{T}^{skw} : \boldsymbol{\kappa} \tag{3}$$

En el caso de restricción estática las tensiones y momentos tensionales microscópicos en lugar de deformaciones y curvaturas microscópicas, se obtienen como proyección de la contraparte macroscópica de acuerdo con las relaciones

$$\begin{aligned} \sigma_N &= \mathbf{N} : \boldsymbol{\sigma} \qquad & \mu_N &= \mathbf{N} : \boldsymbol{\mu} \\ \sigma_T &= \mathbf{T} : \boldsymbol{\sigma} \qquad & \mu_T &= \mathbf{T} : \boldsymbol{\mu} \end{aligned} \tag{4}$$

De manera similar a la nomenclatura usada antes, $\sigma_N$ y $\mu_N$ representa la tensión normal y el momento tensional normal proyectados, respectivamente, mientras $\sigma_T$ y $\mu_T$ los vectores de tensión tangencial y de momentos tensionales proyectados. Como en el caso de deformaciones y curvaturas microscópicas también las tensiones y momentos tensionales microscópicas normal y tangencial pueden descomponerse en partes simétrica y antisimétrica de acuerdo con la estrategia usual de descomposición de continuos Cosserat.
Basados en [13] desarrollamos aquí una forma general de leyes constitutivas termodinámicamente consistentes micropolares basadas en microplanos. La desigualdad macroscópica de Clausius-Duhem para procesos isotermales es

$$D^{mac} = \boldsymbol{\sigma} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \boldsymbol{\mu} : \dot{\boldsymbol{\kappa}} - \dot{\varphi}^{mac} \geq 0 \tag{5}$$

Con la suposición siguiente, (6)

$$\varphi^{mac} = \frac{3}{2\pi} \int_\Omega \varphi^{mic} \, d\Omega$$

y considerando un formato conveniente desacoplado

$$\varphi^{mic} = \varphi_u^{mic}(\varepsilon_N, \boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym}, \boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw}, \mathbf{q}_u) + \varphi_u^{mic}(\kappa_N, \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}, \mathbf{q}_\omega) \tag{7}$$

La ley de evolución de la energía microscópica libre deviene de la restricción cinemática eqs. (1) a (3)

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}^{mic} = &\left[\sigma_N \mathbf{N} + \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}.\mathbf{T}^{sym} - \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}.\mathbf{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \\ &\left[\mu_N \mathbf{N} + \boldsymbol{\mu}_T^{sym}.\mathbf{T}^{sym} - \boldsymbol{\mu}_T^{skw}.\mathbf{T}^{skw}\right] : \boldsymbol{\kappa} - D_u^{mic} - D_\omega^{mic} \end{aligned} \tag{8}$$

Debido a la suposición de desacoplamiento de ``membrana-flexión", las componentes del tensor de tensiones puede ser derivadas de la porción de la energía macroscópica total la cual solo esta relacionada con el movimiento de translación $\varphi_u^{mic}$, mientras que las componentes del tensor de momentos tensionales devienen de la otra porción de la energía microscópica total, relacionada con las microrotaciones $\varphi_\omega^{mic}$ .
El tensor de tensiones y el tensor de momentos tensionales macroscópicos se obtienen de las componentes de tensiones y momentos tensionales microscópicas, como sigue

(8)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\mathbf{N}\sigma_N + \left[\mathbf{T}^{sym}\right]^T.\boldsymbol{\sigma}_T^{sym} - \left[\mathbf{T}^{skw}\right]^T.\boldsymbol{\sigma}_T^{skw}\right] d\Omega$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\mathbf{N}\mu_N + \left[\mathbf{T}^{sym}\right]^T.\boldsymbol{\mu}_T^{sym} - \left[\mathbf{T}^{skw}\right]^T.\boldsymbol{\mu}_T^{skw}\right] d\Omega$$

La ley de evolución de la energía libre microscópica en la eq.(8) puede ser entendida como la forma microscópica de la desigualdad de para el caso isotérmico, el cual puede ser ahora re escrito como

$$D^{mic} = D_u^{mic} + D_\omega^{mic} = P_u^{mic} - \dot{\varphi}_u^{mic} + P_\omega^{mic} - \dot{\varphi}_\omega^{mic} \geq 0 \tag{9}$$

## ELASTICIDAD MICROPOLAR BASADA EN MICROPLANOS

En caso de comportamiento elástico las componentes de rigidez de ``membrana" y ``viga" de las variables internas son cero ($\mathbf{q}_u$ =0, $\mathbf{q}_\omega$ =0) y la energía libre microscópica se reduce a

$$\varphi^{mic} = \varphi_u^{mic}(\varepsilon_N, \boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym}, \boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw}) + \varphi_u^{mic}(\kappa_N, \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}) \tag{10}$$

La energía libre microscópica membrana y viga puede ser expresadas alternativamente en la forma (11)

$$\hat{\varphi}_u^{mic} = W_{Nu}(\varepsilon_N) + W_{Tu}^{sym}(\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym}) + W_{Tu}^{skw}(\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw})$$

$$\hat{\varphi}_\omega^{mic} = W_{N\omega}(\kappa_N) + W_{T\omega}^{sym}(\boldsymbol{\kappa}_T^{sym}) + W_{T\omega}^{skw}(\boldsymbol{\kappa}_T^{skw})$$

de donde los módulos elásticos $E_{Nu}$, $\mathbf{E}_{Tu}^{sym}$, $\mathbf{E}_{Tu}^{skw}$, $E_{N\omega}$,$\mathbf{E}_{T\omega}^{sym}$ y $\mathbf{E}_{T\omega}^{skw}$ que son introducidos como funciones de energía microscópica, son

$$W_{Nu} = \frac{1}{2}\varepsilon_N E_{Nu}\varepsilon_N \qquad W_{Tu}^{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym}\,.\,\mathbf{E}_{Tu}^{sym}\,.\,\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} \qquad W_{Tu}^{skw} = \boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw}\,.\,\mathbf{E}_{Tu}^{skw}\,.\,\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw} \tag{12}$$

$$W_{N\omega} = \frac{1}{2}\kappa_N E_{N\omega}\kappa_N \qquad W_{T\omega}^{sym} = \boldsymbol{\kappa}_T^{sym}\,.\,\mathbf{E}_{T\omega}^{sym}\,.\,\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \qquad W_{T\omega}^{skw} = \boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\,.\,\mathbf{E}_{T\omega}^{skw}\,.\,\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}$$

La definición previa de la forma micróscópica de la desigualdad de Clausius-Duhem en la eq.(5) conduce a las tensiones y momentos tensionales microscópicas constitutivas como variables termodinámicamente conjugadas de las componentes de deformaciones y microcurvaturas, respectivamente,

$$\sigma_N := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\varepsilon_N} = E_{Nu}\varepsilon_N \qquad \boldsymbol{\sigma}_T^{sym} := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym}} = \mathbf{E}_{Tu}^{sym}.\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} \qquad \boldsymbol{\sigma}_T^{skw} := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw}} = \mathbf{E}_{Tu}^{skw}.\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw} \tag{13}$$

$$\mu_N := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\kappa_N} = E_{N\omega}\kappa_N \qquad \boldsymbol{\mu}_T^{sym} := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\kappa}_T^{sym}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{sym}.\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} \qquad \boldsymbol{\mu}_T^{skw} := \frac{\partial\varphi^{mic}}{\partial\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{skw}.\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}$$

De la versión macroscópica de la desigualdad de Clausius-Duhem se tienen los tensores macroscópicos de tensiones y momentos tensionales como funciones de las componentes microscópicas. (14)

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\mathbf{N}E_{Nu}\varepsilon_N + \left[\mathbf{T}^{sym}\right]^T.\mathbf{E}_{Tu}^{sym}.\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} - \left[\mathbf{T}^{skw}\right]^T.\mathbf{E}_{Tu}^{skw}.\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw}\right] d\Omega$$

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[\mathbf{N}E_{N\omega}\kappa_N + \left[\mathbf{T}^{sym}\right]^T.\mathbf{E}_{T\omega}^{sym}.\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} - \left[\mathbf{T}^{skw}\right]^T.\mathbf{E}_{T\omega}^{skw}.\boldsymbol{\kappa}_T^{skw}\right] d\Omega$$

La última ecuación puede ser re escrita alternativamente como

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{E}_u : \boldsymbol{\varepsilon} \\ \boldsymbol{\mu} &= \mathbf{E}_\omega . \boldsymbol{\kappa}\end{aligned} \tag{15}$$

y el módulo constitutivo macroscópico membrana y viga definido como sigue

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[E_{Nu}[\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}] + [\mathbf{T}^{sym}]^T . \mathbf{E}_{Tu} . \mathbf{T}^{sym} + [\mathbf{T}^{skw}]^T . \mathbf{E}_{Tu}^{skw} . \mathbf{T}^{skw}\right] d\Omega \\ \mathbf{E}_\omega &= \frac{3}{2\pi}\int_\Omega \left[E_{N\omega}[\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}] + [\mathbf{T}^{sym}]^T . \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} . \mathbf{T}^{sym} + [\mathbf{T}^{skw}]^T . \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} . \mathbf{T}^{skw}\right] d\Omega\end{aligned} \tag{16}$$

Bajo la suposición de isotropía de los microplanos los vectores de deformación tangencial y de tensión tangencial permanecen paralelos durante la historia completa de carga..
Asumiendo también que el módulo constitutivo es independiente de la orientación de modo que

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \frac{3}{2\pi}\left[E_{Nu}\int_\Omega [\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}] d\Omega + E_{Tu}\int_\Omega \left[[\mathbf{T}^{sym}]^T . \mathbf{T}^{sym}\right] d\Omega + \mathbf{E}_{Tu}^{skw}\int_\Omega \left[[\mathbf{T}^{skw}]^T \mathbf{T}^{skw}\right] d\Omega\right] \\ \mathbf{E}_\omega &= \frac{3}{2\pi}\left[E_{N\omega}\int_\Omega [\mathbf{N}\otimes\mathbf{N}] d\Omega + \mathbf{E}_{T\omega}^{sym}\int_\Omega \left[[\mathbf{T}^{sym}]^T . \mathbf{T}^{sym}\right] d\Omega + \mathbf{E}_{T\omega}^{skw}\int_\Omega \left[[\mathbf{T}^{skw}]^T . \mathbf{T}^{skw}\right] d\Omega\right]\end{aligned} \tag{17}$$

Integrando se puede evaluar analíticamente las ecuaciones

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \mathbf{I}_{vol}\frac{3}{5}\left[E_{Nu} - E_{Tu}^{sym}\right] + \mathbf{I}^{sym}\left[\frac{2}{5}E_{Nu} + \frac{3}{5}E_{Tu}^{sym}\right] + \mathbf{I}^{skw}\left[\frac{2}{5}E_{Nu} + E_{Tu}^{skw}\right] \\ \mathbf{E}_\omega &= \mathbf{I}_{vol}\frac{3}{5}\left[E_{N\omega} - E_{T\omega}^{sym}\right] + \mathbf{I}^{sym}\left[\frac{2}{5}E_{N\omega} + \frac{3}{5}E_{T\omega}^{sym}\right] + \mathbf{I}^{skw}\left[\frac{2}{5}E_{N\omega} + E_{T\omega}^{skw}\right]\end{aligned} \tag{18}$$

El análisis comparativo de las eqs. (18) con los tensores elásticos generales isotrópicos no simétricos para comportamiento desacoplado membrana-flexión

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_u &= \alpha_1\mathbf{I}_{vol} + [\alpha_2 + \alpha_3]\mathbf{I}^{sym} + [\alpha_2 - \alpha_3]\mathbf{I}^{skw} \\ \mathbf{E}_\omega &= \beta_1\mathbf{I}_{vol} + [\beta_2 + \beta_3]\mathbf{I}^{sym} + [\beta_2 - \beta_3]\mathbf{I}^{skw}\end{aligned} \tag{19}$$

## ELASTOPLASTICIDAD MICROPOLAR BASADA EN MICROPLANOS

El tipo elastoplástico de comportamiento inelástico del continuo micropolar está caracterizado por la descomposición aditiva del tensor de deformación y curvatura macroscópico total en las componentes elásticas y plásticas como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_p \qquad\qquad \boldsymbol{\kappa} = \boldsymbol{\kappa}_e + \boldsymbol{\kappa}_p \tag{20}$$

La suposición de restricción cinemática extiende la aplicabilidad de la descomposición aditiva al nivel microscóopico. Como consecuencia, las componentes de deformación y curvatura total en los microplanos pueden ser expresadas como

$$\varepsilon_N = \varepsilon_{Ne} + \varepsilon_{Np} \qquad\qquad \kappa_N = \kappa_{Ne} + \kappa_{Np} \tag{21}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} = \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{sym} + \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{sym} \qquad \boldsymbol{\kappa}_T^{sym} = \boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{sym} + \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{sym}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw} = \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{skw} + \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{skw} \qquad \boldsymbol{\kappa}_T^{skw} = \boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{skw} + \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{skw}$$

En el caso mas general el tensor de las variables internas incluye todas las partes plásticas de las componentes de deformación y curvatura las cuales caracterizan el campo cinemático en microplanos

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}(\varepsilon_{N\,p}, \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{sym}, \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{skw}, \kappa_{pN}, \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{sym}, \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{skw}, \boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}, \boldsymbol{\xi}_{\boldsymbol{\omega}}) \tag{22}$$

donde las variables internas $\boldsymbol{\xi}_{\mathbf{u}}$ y $\xi_\omega$ tienen en cuenta la respuesta plástica endurecimiento / ablandamiento isotrópico membrana-viga , respectivamente.
La energía libre microscópica obtenida de la definición de la energía libre elástica y de las funciones de energía libre microscópica como

$$\varphi^{mic} = W_{Nu}(\varepsilon_N - \varepsilon_{N\,p}) + W_{Tu}^{sym}(\boldsymbol{\varepsilon}_T^{sym} - \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{sym}) + W_{Tu}^{skw}(\boldsymbol{\varepsilon}_T^{skw} - \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,p}^{skw}) +$$
$$+ W_{N\omega}(\kappa_N - \kappa_{N\,p}) + W_{T\omega}^{sym}(\boldsymbol{\kappa}_T^{sym} - \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{sym}) + W_{T\omega}^{skw}(\boldsymbol{\kappa}_T^{skw} - \boldsymbol{\kappa}_{T\,p}^{skw}) + \int_0^{\xi_u} \phi(\xi_u) d\bar{\xi}_u + \int_0^{\xi_\omega} \phi(\xi_\omega) d\bar{\xi}_\omega \tag{23}$$

donde la forma restringida del comportamiento endurecimiento/ablandamiento es tenido en cuenta por medio de los términos $\int_0^{\xi_u} \phi(\xi_u) d\bar{\xi}_u$ y $\int_0^{\xi_\omega} \phi(\xi_\omega) d\bar{\xi}_\omega$.
Las tensiones y momentos tensionales constitutivos en microplanos son obtenidos de la evaluación de la desigualdad microscópica de Clausius-Duhem

$$\sigma_N := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \varepsilon_{N\,e}} = E_{Nu}\varepsilon_{N\,e} \qquad \mu_N := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \kappa_{N\,e}} = E_{N\omega}\kappa_{N\,e}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_T^{sym} := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{sym}} = \mathbf{E}_{Tu}^{sym}.\boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{sym} \qquad \boldsymbol{\mu}_T^{sym} := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{sym}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{sym}.\boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{sym}$$
$$\boldsymbol{\sigma}_T^{skw} := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{skw}} = \mathbf{E}_{Tu}^{skw}.\boldsymbol{\varepsilon}_{T\,e}^{skw} \qquad \boldsymbol{\mu}_T^{skw} := \frac{\partial \varphi^{mic}}{\partial \boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{skw}} = \mathbf{E}_{T\omega}^{skw}.\boldsymbol{\kappa}_{T\,e}^{skw} \tag{24}$$

La evolución de las variables internas es restringida por la desigualdad de la disipación microscópica

$$D^{mic} = \sigma_N \dot{\varepsilon}_{pN} + \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{T\,p}^{sym} + \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}.\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{T\,p}^{skw} - \phi\,\dot{\xi}_u +$$
$$+ \mu_N \dot{\kappa}_{N\,p} + \boldsymbol{\mu}_T^{sym}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{T\,p}^{sym} + \boldsymbol{\mu}_T^{skw}.\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{T\,p}^{skw} - \phi\,\dot{\xi}_\omega \geq 0 \tag{25}$$

La función de fluencia puede ser definida en la forma

$$\Phi^{mic} = \psi(\sigma_N, \boldsymbol{\sigma}_T^{sym}, \boldsymbol{\sigma}_T^{skw}, \mu_N, \boldsymbol{\mu}_{T\,p}^{sym}, \boldsymbol{\mu}_{T\,p}^{skw}) - \phi(\xi_u, \xi_\omega) \leq 0 \tag{26}$$

donde la función $\vartheta$ de las tensiones y momentos tensionales constitutivos microscópicos esta caracterizada por los gradientes

$$v_{Nu} \doteq \partial\psi / \partial\sigma_N \qquad v_{T\,u}^{sym} \doteq \partial\psi / \partial\sigma_T^{sym} \qquad v_{T\,u}^{skw} \doteq \partial\psi / \partial\sigma_T^{skw} \tag{27}$$

$$v_{N\omega} \doteq \partial\psi / \partial\mu_N \qquad \mathbf{v}_{T\omega}^{sym} \doteq \partial\psi / \partial\boldsymbol{\mu}_T^{sym} \qquad \mathbf{v}_{T\omega}^{skw} \doteq \partial\psi / \partial\boldsymbol{\mu}_T^{skw}$$

Las leyes de evolución de las deformaciones y curvaturas plásticas son obtenidas del problema variacional definido por la desigualdad de disipación bajo la consideración de la condición de convexidad, conduce a las soluciones

$$\begin{array}{llll} \dot{\varepsilon}_{N\,p} = \dot{\gamma}\, v_{N\,u} & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{T\,p}^{sym} = \dot{\gamma}\, \mathbf{v}_{T\,u}^{sym} & \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{T\,p}^{skw} = \dot{\gamma}\, \mathbf{v}_{T\,u}^{skw} & \dot{\xi}_u = \dot{\gamma} \\ \dot{\kappa}_{N\,p} = \dot{\gamma}\, v_{N\,\omega} & \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{T\,p}^{sym} = \dot{\gamma}\, \mathbf{v}_{T\,\omega}^{sym} & \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{T\,p}^{skw} = \dot{\gamma}\, \mathbf{v}_{T\,\omega}^{skw} & \dot{\xi}_\omega = \dot{\gamma} \end{array} \tag{28}$$

con

$$\begin{array}{lll} \vartheta_{Nu} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\sigma_N & \vartheta_{T\,u}^{sym} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\sigma_T^{sym} & \vartheta_{T\,u}^{skw} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\sigma_T^{skw} \\ \vartheta_{N\,\omega} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\mu_N & \vartheta_{T\,\omega}^{sym} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\boldsymbol{\mu}_T^{sym} & \vartheta_{T\,\omega}^{skw} \doteq \partial\breve{\Phi} / \partial\boldsymbol{\mu}_T^{skw} \end{array} \tag{29}$$

en términos del *Lagrangeano* o multiplicador plástico $\gamma$ y de los gradientes de potenciales plásticos microscópicos.

Las condiciones de carga- descarga de Kuhn-Tucker así como la condición de consistencia pueden ser definidas como

$$\Phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}) \le 0 \qquad \dot{\gamma} \ge 0 \qquad \Phi(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma} = 0 \qquad \dot{\Phi}(\boldsymbol{\sigma},\boldsymbol{\mu}).\dot{\gamma} = 0$$

Una solución implícita para el multiplicador plástico puede ser obtenida de la condición de consistencia

$$\begin{aligned} \dot{\gamma} = {} & \frac{1}{h}\left[v_{N\,u} E_{Nu} \mathbf{N} + \mathbf{v}_{T\,u}^{sym} . \mathbf{E}_{Tu}^{sym} . \mathbf{T}^{sym} - \mathbf{v}_{T\,u}^{skw} . \mathbf{E}_{Tu}^{skw} . \mathbf{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} + \\ & + \frac{1}{h}\left[v_{N\,\omega} E_{N\omega} \mathbf{N} + \mathbf{v}_{T\,\omega}^{sym} . \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} . \mathbf{T}^{sym} - \mathbf{v}_{T\,\omega}^{skw} . \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} . \mathbf{T}^{skw}\right] : \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{aligned} \tag{30}$$

donde

$$\begin{aligned} h = {} & v_{N\,u} E_{Nu} \vartheta_{N\,u} + \mathbf{v}_{T\,u}^{sym} . \mathbf{E}_{Tu}^{sym} . \vartheta_{T\,u}^{sym} - \mathbf{v}_{T\,u}^{skw} . \mathbf{E}_{Tu}^{skw} . \vartheta_{T\,u}^{skw} + H_u + \\ & + v_{N\,\omega} E_{N\omega} \vartheta_{N\,\omega} + \mathbf{v}_{T\,\omega}^{sym} . \mathbf{E}_{T\omega}^{sym} . \vartheta_{T\,\omega}^{sym} - \mathbf{v}_{T\,\omega}^{skw} . \mathbf{E}_{T\omega}^{skw} . \vartheta_{T\,\omega}^{skw} + H_\omega \end{aligned} \tag{31}$$

y

$$H_u = \frac{\partial\phi(\xi_u)}{\partial\xi_u} \qquad H_\omega = \frac{\partial\phi(\xi_\omega)}{\partial\xi_\omega} \tag{32}$$

Finalmente, las ecuaciones constitutivas macroscópicas elastoplásticas pueden ser expresadas como

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\sigma}} \\ \dot{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{ep}^{uu} & \mathbf{E}_{ep}^{u\omega} \\ \mathbf{E}_{ep}^{\omega u} & \mathbf{E}_{ep}^{\omega\omega} \end{bmatrix} : \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}} \end{bmatrix} \tag{33}$$

## CONCLUSIONES

En este trabajo la aproximación termodinámicamente consistente para derivar formulaciones constitutivas de microplanos de [9] y [13] ha sido reformulada para continuos micropolares de Cosserat elásticos e inelásticos. Como en trabajos previos, la principal suposición es la incorporación de la energía libre microscópica de Helmholtz en todos los microplanos, los cuales, encluyen en el presente caso las contribuciones de los grados de libertad adicionales y la rigidez de los continuos de Cosserat, representados por las micro rotaciones y los momentos

tensionales. También, se considera una forma desacoplada de la energía libre en términos de las contribuciones ``membrana" y ``viga".
De las ecuaciones constitutivas resultantes para el modelo micropolar elástico basado en microplanos se obtiene una solución explícita para la longitud característica en términos de la relación entre el módulo de viga elástico tangencial y el módulo de corte de Cosserat. Las soluciones para el modelo micropolar elastoplástico basado en microplanos incluye la formulación explícita macroscópica del módulo constitutivo tangencial en términos de las contribuciones microscópicas. Las ecuaciones constitutivas propuestas permiten la formulación de modelos materiales basados en diferentes y relevantes aspectos de la microestructura de los materiales de la Ingeniería. Estos exceden la capacidad del marco teórico desarrollado hasta ahora por el modelado macroscópico de comportamientos anisotrópicos de materiales heterogéneos cohesivos-friccionales como el hormigón.

## REFERENCIAS

*[1].* Batdorf, S.B. \& B. Budiansky [1949]. ``A mathematical theory of plasticity based on the concept of slip." Technical Note 1871. *National Advisory Committee for Aeronautics (NACA), Washington, D.C.*

[2]. Bazant, Z.P. \& P.G. Gambarova [1984]. ``Crack shear in concrete: Crack band microplane model." *J. Struct. Eng.*, ASCE, 110, pp. 2015-2036.

[3]. Bazant, Z.P. \& B.H. Oh [1985]. ``Microplane model for progressive fracture of concrete and rock." *J. Eng. Mech.*, 111, pp. 559-582.

[4]. Bazant, Z.P. \& B.H. Oh [1986]. ``Efficient numerical integration on the surface of a sphere." *ZAMM*, 66(1), pp. 37-49.

[5]. Bazant, Z.P. \& P. Prat [1988]. ``Microplane model for brittle plastic material: Part I - Theory, Part II - Verification." *J. Eng. Mech.*, 114, pp. 1672-1702.

[6]. \Carol, I., Z.P. Bazant \& P. Prat [1991]. ``Geometric damage tensor based on microplane model." *J. Eng. Mechanics*, 117, pp. 2429-2448.

[7]. Carol, I., Z.P. Bazant \& P. Prat [1992]. ``New explicit microplane model for concrete: Theoretical aspects and numerical implementation." *Int. J. Solids & Structures*, 29, pp. 1173-1191.

[8]. Carol, I. \& Z.P. Bazant [1997]. ``Damage and plasticity in microplane theory." *Int. J. Solids & Structures*, 34, pp. 3807-3835.

[9]. Carol, I., M. Jirasek \& Z.P. Bazant [2000]. ``A thermodynamically consistent approach to microplane theory. Part I: Free energy and consistent microplane stresses." *Int. J. Solids & Structures*

[10]. Cosserat, E. \& F. Cosserat [1909]. ``Theory des corps deformables." *Herman et fils*, Paris.

[11]. de Borst, R. [1991]. ``Simulation of strain localization: A reappraisal of the Cosserat Continuum." *Engg. Comp.*, Vol. 8, pp. 317-332.

[12]. Eringen, A.C. [1968]. ``Theory of Micropolar Elasticity." *Fracture, an Advanced Treatise*. Ed. L. Liebowitz, Academic Press, New York.

[13]. Kuhl, E., I. Carol \& P. Steinmann [2000]. ``A thermodynamically consistent approach to microplane theory."

[14]. M\"uhlhaus, H-B. [1989]. ``Application of Cosserat theory in numerical solutions of limit load problems." *Ing. Archive*, Vol. 59, pp. 124-137.

[15]. Steinmann, P. [1994]. ``An improved FE expansion for micropolar localization analysis." *Comm. Num Meth. Engr.*

[16]. Taylor, G. I. [1938]. ``Plastic strain in metals." *J. Inst. Metals*, 62, pp. 307-324.

[17]. Willam, K. \& A. Dietsche [1992]. ``Regularization of localized failure computations." In Proc. of *Int. Conf. Computational Plasticity, COMPLAS III*. Edt. E. Onate, E. Hinton and R. Owen, Pineridge Press Swansea, pp. 2185-2204.

[18]. Willam, K., A. Dietsche, M-M. Iordache \& P. Steinmann [1995]. ``Localization in Micropolar Continua." *Continuum Models for Mat. with Microstructure*. Ed. H-B. M\"uhlhaus. J.Wiley \& Sons Ltd., pp. 297-339.