

## **ANÁLISE DA CONFIABILIDADE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO INCLUINDO CAMPOS ESTOCÁSTICOS**

**Herbert M. Gomes, Armando M. Awruch**  
Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil  
Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Osvaldo Aranha, 99, 3º andar,  
Tel.: +55-051-3316-3486, Fax.: +55-051-3316-3999, 90035-190, Porto Alegre, Brasil  
e-mail: [herbertmg@zipmail.com.br](mailto:herbertmg@zipmail.com.br); e-mail: [awruch@adufgrs.ufgrs.br](mailto:awruch@adufgrs.ufgrs.br)

### **RESUMO**

Neste trabalho é dada uma ênfase especial à inclusão das incertezas na avaliação do comportamento estrutural, objetivando uma melhor representação das características do sistema e uma quantificação da importância destas incertezas no projeto. É tratado o problema da análise da confiabilidade de estruturas de concreto armado incluindo o efeito da variabilidade espacial de suas propriedades. Para tanto é proposto um modelo de elementos finitos para a representação do comportamento do concreto armado, o qual inclui as principais características observadas neste material. Também é desenvolvido um modelo para a geração de campos estocásticos multidimensionais não Gaussianos para as propriedades do material e que é independente da malha de elementos finitos. Um exemplo de uma viga simplesmente apoiada de concreto armado é apresentado, analisando-se a confiabilidade em relação a uma função de estado limite que estabelece que a flecha na seção localizada no centro do vão não deve ultrapassar um valor prescrito, considerando-se o módulo de elasticidade do material como um campo estocástico.

### **ABSTRACT**

In this paper special emphasis is given to uncertainties in the evaluation of the structural behaviour, looking for a better representation of the system characteristics and quantification of the significance of these uncertainties in the structural design. The reliability analysis of reinforced concrete structures is considered taking into account the spatial variability of the material properties. A finite element algorithm is used to analyze the reinforced concrete structure. It is proposed and developed a multidimensional non-Gaussian stochastic field generation model (independent of the finite element mesh). An example is presented to study the reliability of a simple reinforced concrete beam with respect to a limit state function which establishes that the displacement of the mid span cross section does not exceed a prescribed value, considering the Young modulus as a stochastic field.

### **INTRODUÇÃO**

O termo confiabilidade estrutural é geralmente empregado para designar a medida de segurança de determinado sistema estrutural frente a um determinado desempenho esperado. Alternativamente, a confiabilidade pode ser entendida como o complemento da probabilidade de falha, ou seja, as chances ou a propensão de determinado sistema em violar um estado limite, quer seja por falha ou por não atender a seu desempenho esperado. Obviamente, a confiabilidade estrutural está relacionada com as variáveis que descrevem o sistema estrutural, e mais precisamente com a variabilidade das mesmas. Particularmente, esta variabilidade está presente nos sistemas estruturais sob a forma de incertezas. De acordo com Melchers[7], estas incertezas podem ser divididas nos seguintes tipos:

- Incertezas físicas: geralmente presentes nas avaliações de dimensões, valores de ações, valores de propriedades de materiais, etc.;
- Incertezas estatísticas: provenientes da extrapolação de parâmetros estatísticos extraídos de populações finitas do modelo empregado;
- Incertezas devido a fatores humanos: provenientes de ação do homem, quer seja intencional ou não, no comportamento do sistema estrutural;
- Incertezas de cunho fenomenológico: provenientes da existência de eventos não previsíveis e não levados em consideração;
- Incertezas de modelamento: provenientes das simplificações e das hipóteses adotadas para o modelamento do comportamento estrutural, o emprego de novos materiais e de novas técnicas construtivas.

Nem todas as incertezas levantadas anteriormente podem ser levadas em conta prontamente numa análise, de forma que se fala em uma confiabilidade “formal”, ou seja, uma confiabilidade condicionada à quantidade de incertezas adotadas. Portanto, esta confiabilidade “formal” não é exata, fazendo apenas sentido comparações entre confiabilidades de sistemas com as mesmas incertezas. Desta forma, a avaliação da confiabilidade estrutural surge como ferramenta de comparação entre procedimentos existentes de projeto estrutural, servindo também para a avaliação da validade de regras de projeto estabelecidas em códigos.

### MODELO DE ELEMENTOS FINITOS PARA CONCRETO ARMADO

Para o modelamento do concreto armado são empregados elementos tridimensionais de 20 nós. O concreto é modelado como um material de comportamento elasto-viscoplástico com amolecimento e ruptura frágil, com seu comportamento pós-pico definido pelas curvas dadas no CEB 90[1]. Para o comportamento frágil, emprega-se um modelo de fissuras distribuídas ortogonais e fixas em três direções juntamente com um modelo de amolecimento à tração (*tension stiffening*). O critério do CEB 90[1] para a escolha do tipo de ruptura do material (se por deformação viscoplástica excessiva ou por fissuração) é utilizado. A superfície de quatro parâmetros de Ottosen[8] é empregada como superfície de falha e de carregamento (comportamento elasto-viscoplástico).

Para o modelamento das armaduras são disponibilizados elementos de treliça de 2, 3 ou 4 nós, as quais estão incorporadas à matriz de rigidez dos elementos de concreto, assumindo-se uma total aderência entre os dois materiais. Um modelo uniaxial elasto-viscoplástico com três ramos (um linear, um ramo com encruamento linear e um ramo com encruamento e amolecimento parabólicos) é empregado para modelar o comportamento das barras da armadura. O modelo incorporado de armaduras implementado, através da técnica do mapeamento inverso, permite a colocação das armaduras totalmente independente da malha de elementos finitos definida para o concreto reduzindo-se o esforço para a geração dos dados para a definição da geometria das armaduras. Este mesmo modelo melhora os já existentes na literatura pois há a possibilidade de captura de mais de um ponto de interseção da barra de aço com os elementos de concreto (Gomes *et al*[4]). Como sistema de solução, emprega-se o método do Controle dos Deslocamentos Generalizados, o qual possibilita a captura do comportamento pós-pico com precisão.

### CONFIABILIDADE ESTRUTURAL

A resposta de uma estrutura pode ser definida por um vetor de variáveis aleatórias básicas  $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ , que pode incluir parâmetros que definem ações, propriedades do material, tamanho das seções, etc. Para poder calcular a probabilidade de falha deve-se formular uma função de estado limite  $g(X)$  que depende das variáveis aleatórias, e tal que:

$$g(X) \geq 0 \quad (1)$$

seja satisfeita toda vez que haja segurança. Uma função de estado limite como  $g(\mathbf{X})$ , separa duas situações: uma de segurança e outra de falha. Se  $g(\mathbf{X}) \geq 0$ , considera-se que os requerimentos de projeto têm sido devidamente satisfeitos e corresponde a um ponto da região de segurança. Se  $g(\mathbf{X}) < 0$ , os requerimentos de projeto não foram satisfeitos e corresponde a um ponto da região de falha. A probabilidade de falha  $P_f$ , então vem dada por:

$$P_f = \int_{(g(\mathbf{X}) < 0)} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X}) d\mathbf{X} \quad (2)$$

onde,  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  é a função de densidade de probabilidade conjunta das variáveis aleatórias. A avaliação da integral da equação (2) é frequentemente impossível de se obter pois  $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{X})$  não é conhecida ou devido ao enorme trabalho que demanda em resolver a mesma para funções de estado limite gerais com a dimensão do espaço muito grande (superiores a 10 variáveis).

#### Método de Confiabilidade de 1ª Ordem (FORM- *First Order Reliability Method*)

Para a análise de confiabilidade de 1ª ordem, o cálculo do índice de confiabilidade é feito no espaço Gaussiano padrão não correlacionado. Assim uma transformação probabilística  $S$  é feita nas variáveis básicas  $\mathbf{X}$  de forma a transformá-las ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado  $\mathbf{Z}$ . Assim o problema fica resumido ao problema de otimização com uma restrição:

$$\text{Minimizar } \beta = \|\mathbf{Z}\| \text{ sujeito a } G(\mathbf{Z}) = 0 \quad (3)$$

onde  $\beta$  é a distância mínima da origem deste espaço à função de estado limite, conhecido também como Índice de Confiabilidade,  $\mathbf{Z}$  é a variável transformada,  $G(\mathbf{Z})$  é a função de estado limite transformada ao espaço Gaussiano padrão não correlacionado e  $\|\cdot\|$  indica a distância (norma Euclidiana). A Probabilidade de Falha se relaciona com o Índice de Confiabilidade, aproximadamente, através da relação:

$$P_f \approx \phi(-\beta) \quad (4)$$

onde  $\phi$  é a função de distribuição acumulada Gaussiana. No método modificado de Hasofer e Lind - Rackwitz e Fiessler (MHL-RF) (Hasofer *et al*[5]), para se resolver o problema de otimização com uma restrição, colocado na equação (3) e obter o valor do índice de confiabilidade  $\beta$  (e as correspondentes coordenadas do ponto de projeto  $\mathbf{Z}^*$  - *design point*), uma seqüência de aproximações para este ponto são geradas na seguinte forma:

$$\mathbf{Z}_{k+1} = \mathbf{Z}_k + s \mathbf{d}_k \quad (5)$$

onde  $\mathbf{Z}_k$  é o vetor que contém as coordenadas do ponto de projeto numa iteração  $k$ ,  $\mathbf{d}_k$  é o vetor de direção de procura e  $s$  é um parâmetro que define o comprimento do passo. Para o cálculo do vetor de direção de procura, a seguinte equação é empregada, na qual implicitamente está imposta a restrição  $G(\mathbf{Z})=0$ :

$$\mathbf{d}_k = \frac{1}{\|\nabla G(\mathbf{Z}_k)\|} [\mathbf{Z}_k^T \nabla G(\mathbf{Z}_k) - \nabla G(\mathbf{Z}_k)] \nabla G(\mathbf{Z}_k) - \mathbf{Z}_k \quad (6)$$

onde  $\nabla G$  é o gradiente da função de estado limite, avaliado em  $\mathbf{Z}_k$ . Neste trabalho, este gradiente é avaliado através de diferenças finitas à vante aplicadas ao programa de elementos finitos de concreto armado.

## GERAÇÃO DE CAMPOS ESTOCÁSTICOS MULTIDIMENSIONAIS

A geração de campos estocásticos com distribuições não Gaussianas segue a técnica do mapeamento inverso usada para a geração de variáveis simples com função de densidade de probabilidade prescrita. Assim como no caso de variáveis aleatórias simples, é necessário gerar variáveis com média zero e desvio padrão unitário. A técnica do mapeamento inverso é então empregada para impor a correta função de densidade de probabilidade requerida.

### Método da Representação Espectral

Pode-se começar por gerar números aleatórios uniformemente distribuídos ( $u$ ) entre 0 e 1 na mesma quantidade do campo discreto. Então, a inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana padrão é usada para obter o campo Gaussiano padrão (média zero e desvio padrão unitário,  $Z$ ) como descrito na equação seguinte:

$$Z = \Phi^{-1}(u) \quad (7)$$

onde  $\Phi^{-1}$  é a inversa da função de distribuição acumulada Gaussiana padrão. Na análise estatística de campos reais, as estatísticas obtidas a respeito das variáveis estão no espaço real das variáveis. Portanto, os dados disponíveis a respeito de uma dada variável são o seu tipo de função de distribuição e sua matriz de autocorrelação neste espaço. Se, por exemplo, uma variável tem um tipo de distribuição log-normal, então a descrição em termos de sua média, desvio padrão e matriz de autocorrelação ( $R_{xy}$ ) no espaço real é suficiente. O modelo de Nataf pode ser usado para a transformação desta matriz para o espaço não correlacionado Gaussiano padrão como descrito em Liu *et al*[6]. Basicamente, dada a matriz de coeficientes de correlação no espaço real ( $\rho_{ij} = R_{xy} / \sigma_{x_i} \sigma_{x_j}$ , onde  $\sigma_{x_i}$  é o desvio padrão da variável  $i$ ), a matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão ( $\rho'_{ij}$ ) pode ser encontrada através da solução numérica da integral dada abaixo:

$$\rho'_{ij} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \right) \left( \frac{x_j - \mu_j}{\sigma_j} \right) \varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij}) dz_i dz_j \quad (8)$$

onde  $\mu_i$  e  $\sigma_i$  são a média e desvio padrão da  $i$ -ésima variável e  $\varphi_2(z_i, z_j, \rho'_{ij})$  é a função de densidade Gaussiana bidimensional de média zero e desvio padrão unitário. Como os coeficientes de correlação aparecem dentro da integral, uma integração numérica ou mesmo fórmulas empíricas podem ser usadas para resolver este tipo de problema (Liu *et al*[6]). Neste trabalho  $\rho'_{ij}$  é calculado através de integração numérica.

Uma vez que a matriz de coeficientes de correlação ( $\rho$ ) no espaço real seja obtida e a matriz de coeficientes de correlação no espaço Gaussiano padrão ( $\rho'$ ) seja calculada, o método da Decomposição Modal é utilizado. Vantagens quanto ao uso deste tipo de decomposição são justificadas pela precisão e rapidez da geração (Gomes *et al*[2]). Assim,

$$\rho' = \Theta \Lambda \Theta^T \quad (9)$$

onde  $\Lambda$  é a matriz diagonal de autovalores em ordem decrescente,  $\Theta$  é a matriz de autovetores associada correspondente. A seguir, números Gaussianos padrão correlacionados são diretamente gerados pela representação espectral, usando os autovetores e autovalores do procedimento anterior e séries de cosseno (Shinazuka *et al*[9]), como indicado na equação seguinte:

$$\mathbf{Z}' = \mathbf{Z}'_i = \sqrt{2} \sum_{i=1}^M \sum_{m=1}^{N_f} \theta_{s,i} \sqrt{\frac{\lambda_i}{N_f}} \cos\left(\frac{\pi T_{nm}}{2 T_k} + \psi_k\right) \quad (10)$$

$(s = 1, 2, \dots, n) \quad (k = 1, 2, \dots, nN_f) \quad k = (m-1)M + i$

onde  $\lambda_i$  é o  $i$ -ésimo autovalor da matriz de coeficientes de correlação (em ordem decrescente),  $\theta_{s,i}$  é a  $s$ -ésima componente do vetor  $\theta_i$ ,  $\psi_k$  é o  $k$ -ésimo ângulo de fase uniformemente distribuído entre 0 e  $2\pi$  ( $\psi = 2\pi Z$ ),  $M$  é o número de modos da matriz de autovalores que serão retidos,  $N_f$  é o número de funções coseno a serem adicionadas à série,  $n$  é o tamanho do campo discreto e  $T_k = l/k$ . Uma vez que o campo Gaussiano padrão correlacionado seja gerado, estes valores são mapeados ao espaço real das variáveis através da inversa da função de densidade de probabilidade acumulada desejada, originando:

$$\mathbf{X} = \mathbf{F}_z^{-1}(\mathbf{Z}) \quad (11)$$

onde  $\mathbf{F}_z^{-1}$  e  $\mathbf{X}$  são a função inversa acumulada e o campo gerado, respectivamente.

### CONFIABILIDADE DE UMA VIGA DE CONCRETO ARMADO COM UM CAMPO ESTOCÁSTICO BIDIMENSIONAL DO MÓDULO DE ELASTICIDADE

Neste exemplo será analisado a confiabilidade de uma viga simplesmente apoiada de concreto armado com as seguintes propriedades:  $f_c = 21.14$  MPa (resistência à compressão do concreto),  $f_t = 1.67$  MPa (resistência à tração do concreto),  $G_f = 0.506 \times 10^{-4}$  MN/m (energia de fratura do concreto),  $E_c = 227565$  MPa (módulo de elasticidade do concreto), sujeita a um carregamento determinístico uniforme ao longo de seu vão de  $(Q+G) = 3.04$  KN/m (onde  $G$  é a parcela de carga permanente e  $Q$  a parcela de carga acidental). Um esquema da viga analisada é mostrado na Figura 1. A viga foi discretizada até a metade de seu vão com 10 elementos tridimensionais de 20 nós (cinco no comprimento e dois na altura) e também na totalidade de seu vão, com 20 elementos (dez no comprimento e dois na altura). Foi especificado para esta viga um campo estocástico bidimensional para seu módulo de elasticidade, representado no centróide de cada elemento utilizado na discretização da viga. A função de estado limite é a ultrapassagem de um valor máximo admitido para a flecha no vão central de  $\delta < 1.219 \times 10^{-2}$  m. Na Tabela I são apresentadas as características estatísticas para o campo considerado do módulo de elasticidade (admitido como log-normal).

Tabela I- Características estatísticas das variáveis aleatórias para a viga de concreto armado.

Variável	Denominação	Unidade	Média $\mu$	Coefficiente de Variação V
$E_c$	$x$	MPa	227565	0.10

Considerou-se o campo com matriz de autocorrelação do tipo exponencial dada pela seguinte equação:

$$\rho(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \exp\left(-\frac{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}{d}\right) \quad (12)$$

onde  $\mathbf{x}$  é o vetor posição entre dois centróides de elementos finitos da discretização da viga,  $d$  é o comprimento de correlação para o campo (em metros). As demais propriedades relacionadas com o módulo de elasticidade foram postas totalmente correlacionadas através da avaliação de seus valores por relações determinísticas dadas no CEB 90[1].

Na Figura 2 mostra-se a configuração final das fissuras, assumindo-se os valores médios das propriedades da viga e carregamento ( $G+Q = 3.04$  KN/m).

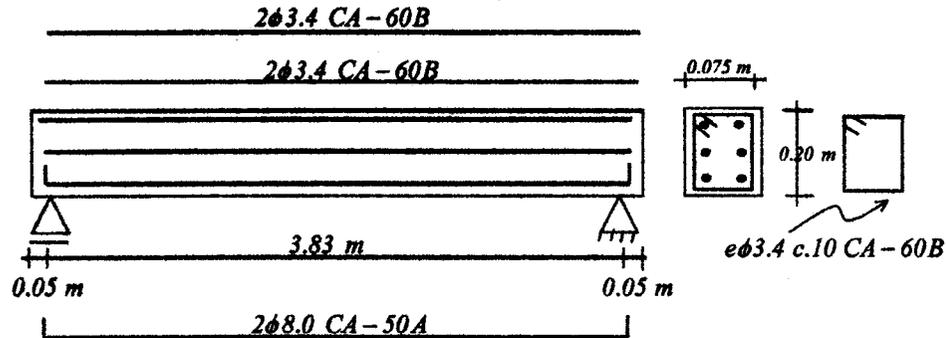


Figura 1- Dados geométricos da viga simplesmente apoiada de concreto armado.

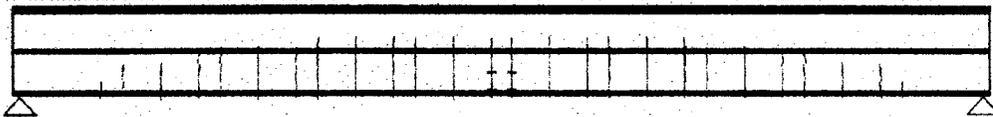


Figura 2 - Configuração final das fissuras para a carga de serviço, representada pelo fator de carga de  $\lambda=1.0$  ( $G+Q=3.04$  KN/m).

Na Figura 3, apresenta-se uma comparação entre os valores da flecha na face inferior da seção localizada no centro do vão central da viga, observada experimentalmente e aquelas obtidas numericamente com o modelo de elementos finitos utilizando apenas os valores médios das propriedades. Pode-se observar que há uma boa concordância entre os resultados experimentais e os numéricos.

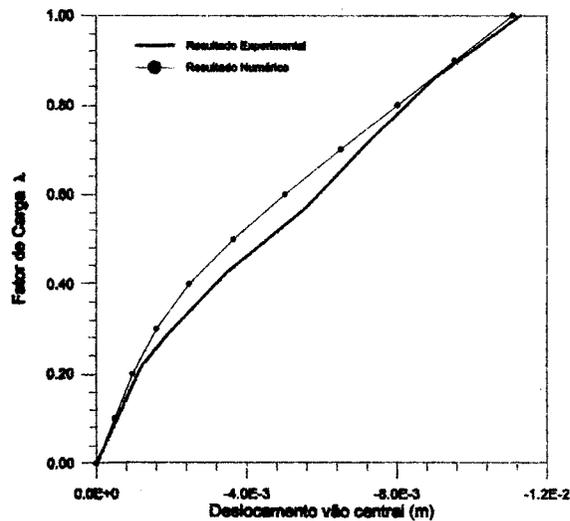


Figura 3 - Comparação entre resultados numérico e experimental da flecha no vão central da viga para os valores médios das propriedades.

A seguir são apresentados alguns resultados referentes à análise desta usando FORM (*First Order Reliability Method*), para o caso da discretização com 10 elementos e 20 elementos, respectivamente. Uma vez que há poucos dados disponíveis a respeito do comprimento de correlação de campos ( $d$ ) em estruturas de concreto armado, fez-se variar o comprimento de correlação para o campo do módulo de elasticidade. Na Figura 4 é apresentado a curva de comprimento de correlação ( $d$ ) versus índice de confiabilidade ( $\beta$ ) para a discretização com 10 elementos. O mesmo gráfico é feito para o caso da viga discretizada completamente com 20 elementos e apresentado na Figura 5.

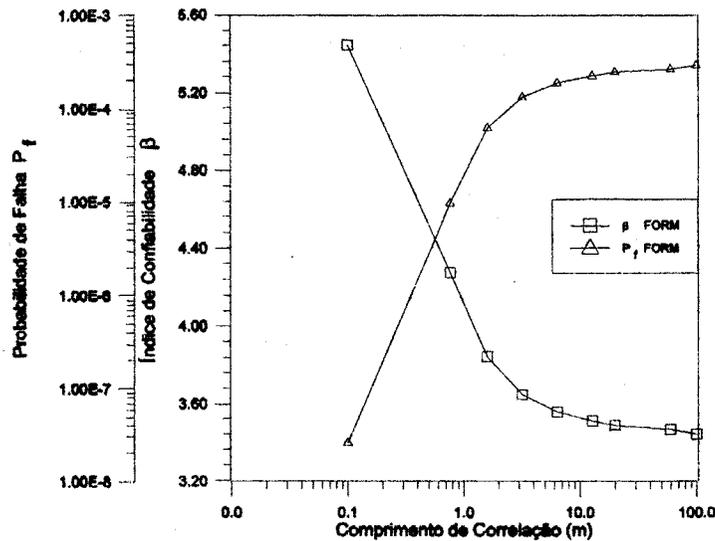


Figura 4- Curvas de comprimento de correlação versus índice de confiabilidade/probabilidade de falha para o caso da viga discretizada pela metade.

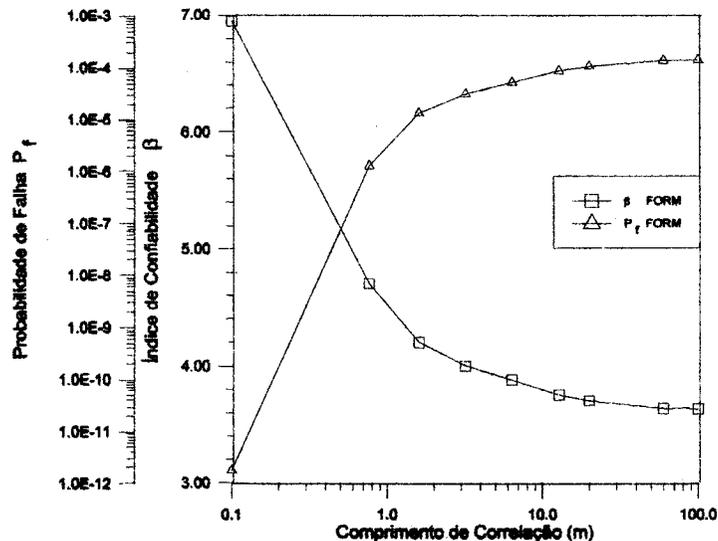


Figura 5- Curvas de comprimento de correlação versus índice de confiabilidade/probabilidade de falha para o caso da viga discretizada completamente.

No caso da viga discretizada pela metade, o número médio de avaliações da função de estado limite para o cálculo de cada ponto no gráfico da Figura 4, foi de aproximadamente. Já para o caso da viga discretizada completamente, o número médio de avaliação da função de estado limite para o cálculo de cada ponto no gráfico da Figura 5, foi de aproximadamente 273 e o tempo de processamento, no mesmo equipamento, foi de aproximadamente 3.5 vezes maior que no caso anterior.

## CONCLUSÕES

Analisando-se os resultados do índice de confiabilidade, por exemplo, para o caso de campo sem correlação ( $d=0$ ), com discretização da metade e de toda a viga, percebe-se que há uma diferença significativa nos valores. Este tipo de hipótese, discretização da metade da viga, deve ser descartada, pois devido à presença de um campo estocástico para o módulo de Young, apesar de haver simetria para carga e geometria, não há simetria sob o ponto de vista da análise de confiabilidade. O fato do valor ser maior com a discretização de toda a viga é em parte explicada pelo fato de que, por se tratar de um sistema mais complexo, quanto mais variáveis aleatórias são consideradas, menores são as chances de que o módulo de Young em uma certa região contígua seja baixa, impedindo que a flecha no meio de vão seja afetada. Isto será mais pronunciado quanto maior for a dispersão (desvio padrão) da propriedade. Neste caso, o cálculo da confiabilidade sem a adoção de um campo (o que significa correlação total do campo do módulo de Young,  $d \rightarrow \infty$ ) implica em resultados que de certa forma serão mais conservadores, uma vez que fornecerão índices de confiabilidade menores do que aqueles com a adoção de um campo com alguma correlação (situação mais real).

## REFERÊNCIAS

- [1] Comité Euro-Internacional du Béton, *CEB-FIP model code 1990*. CEB Bulletin d'Information No. 213/214, 437 p., 1993.
- [2] Gobetti, L. C. W; Campos Filho, A.; Campagnolo, J. L. *Análise teórico experimental das deformações em vigas de concreto armado*. Porto Alegre: CPGEEC/UFRGS, 1983, 56p. (Caderno Técnico, 48).
- [3] Gomes, H. M.; Awruch, A. M., *Geração multidimensional de campos estocásticos não gaussianos para a análise estrutural via elementos finitos*. In: Proceedings of the XXIX-Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Punta del Este, Uruguay, CD-ROM, 2000.
- [4] Gomes, H. M.; Awruch, A. M., *Some aspects on three-dimensional numerical modelling of reinforced concrete structures using the finite element method*, Advances in Engineering Software, v.32, n.4, p.257-277, 2001.
- [5] Hasofer, A. M.; Lind, N. C., *Exact and invariant second moment code format*, Journal of Engineering Mechanics Division, New York, ASCE. V.100, No.1, pp.111-121, 1984.
- [6] Liu, P. L.; Der Kiureghian, A., *Multivariate distribution models with prescribed marginal and covariances*, Probabilistic Engineering Mechanics, V.1, No.2, 1986.
- [7] Melchers, R. E., *Structural reliability analysis and prediction*, Chichester: John Wiley, 400p., 1987.
- [8] Ottosen, N. S., *Constitutive model for short-time loading of concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division, V.105, No.1, pp. 127-141, 1979.
- [9] Shinozuka, M.; Deodatis, G., *Simulation of multi-dimensional Gaussian stochastic fields by spectral representation*, Applied Mechanics, V.49, No.1, 1996.