

SOLUCIÓN GENERALIZADA PARA UN MODELO SIMPLIFICADO CON CARGA DE SISMO

P.M. Bellés, M.B. Rosales y C. P. Filipich[†]

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina
e-mail: mrosales@criba.edu.ar

[†]Grupo de Análisis de Sistemas Mecánicos, FRBB, Universidad Tecnológica Nacional, 11 de abril 455,
8000 Bahía Blanca, Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo la carga de sismo es modelada con una excitación del soporte dada por una aceleración variable en el tiempo. Se utiliza el Método del Elemento Completo (MEC) para encontrar la respuesta dinámica de dos modelos estructurales: un sistema de un grado de libertad y una viga continua. En ambos casos se incluye el amortiguamiento del sistema. El MEC es planteado a través de una ecuación de *seudo* Trabajos Virtuales utilizando una secuencia particular. Dicho método ha sido originalmente desarrollado por los autores para problemas de borde en una, dos y tres dimensiones. En ambos modelos, debe realizarse una transformación previa del dominio tiempo para resolverlos como problemas de frontera. Las secuencias utilizadas tanto en el dominio espacial como temporal son sistemáticamente planteadas y consisten en series uniformemente convergentes. Los resultados pueden ser obtenidos con precisión arbitraria. Los valores de desplazamiento, velocidad y aceleración son comparados con el método numérico de "aceleración promedio constante". También se realizan verificaciones con el software ALGOR de elementos finitos. La utilización del MEC asegura la convergencia de resultados y resulta particularmente conveniente, y de allí su nombre, cuando existen discontinuidades, como en este caso la carga.

ABSTRACT

In the present work the seismic load is modeled by means of an excitation of the support given by an acceleration variable in the time domain. The Whole Element Method (WEM) is employed to find the dynamic response of two structural models: a SDOF system and a distributed parameter beam. In both cases the damping is taken into account. WEM consists in the statement of a pseudo Virtual Work using a particular sequence. The method has been previously developed by the authors for one-, two- and three-dimensional boundary-value problems. Here a previous transformation of the time domain has to be carried out to handle a problem with only boundary conditions. The sequences are systematically stated both in the space and temporal domains and are uniform convergent series. The results may be obtained with arbitrary precision. The values of displacement, velocity and acceleration are compared with results obtained with the numerical technique "average constant acceleration". Also verifications with results from the finite element software ALGOR are performed. The use of WEM ensures the convergence of the results and is particularly convenient to handling discontinuities, as is the case here with the load.

INTRODUCCIÓN

El MEC es un método variacional que consiste básicamente en extremar un funcional adecuado que está expresado en función de secuencias extremantes apropiadas. Está fundado en teoremas y corolarios [1, 2] que no se incluyen en este trabajo. Dentro de la amplia gama de problemas diferenciales que pueden resolverse con el MEC, han sido estudiados en particular diversos problemas con condiciones iniciales y de borde [3, 4]. Las series utilizadas son de convergencia uniforme, al menos para las funciones esenciales (son aquellas que involucran derivadas de orden $(k-1)$, si $2k$ es el mayor orden de derivación de la ecuación diferencial). Los resultados pueden ser hallados con precisión arbitraria. Esto es, se fija un número de dígitos deseados y la cantidad de términos en las secuencias se incrementa hasta que esa precisión es alcanzada.

Un problema con condiciones iniciales como el que aquí se presenta, debe ser previamente transformado en uno con condiciones de borde, con el fin de aplicar el método variacional propuesto para su solución. En este caso, se estudiará el comportamiento de sistemas dinámicos con amortiguamiento y excitación del soporte. El desarrollo consta de dos partes: en primer término se analiza un sistema con un grado de libertad. Posteriormente se estudia el problema de un sistema continuo consistente en una viga simplemente apoyada.

Sistema de un grado de libertad

En esta subsección se estudia la dinámica del sistema con un grado de libertad esquematizado en la Figura 1. Se introdujo la siguiente nomenclatura: m es la masa, k la constante elástica, c el amortiguamiento, $y(t)$ el desplazamiento transversal absoluto de la masa, $u(t)$ el desplazamiento transversal relativo de la masa con respecto al soporte, $u_s(t)$ desplazamiento transversal del soporte, $\ddot{u}_s(t)$ la aceleración del soporte.

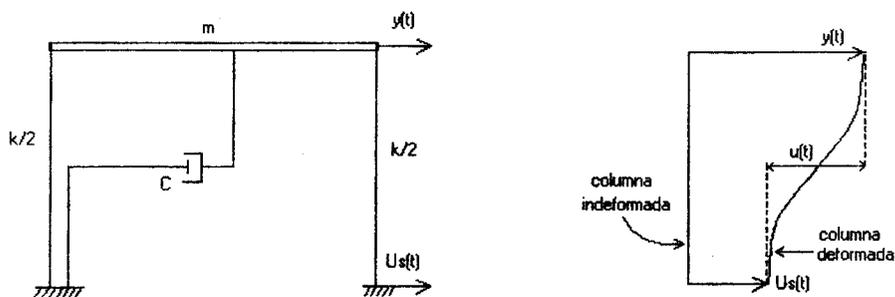


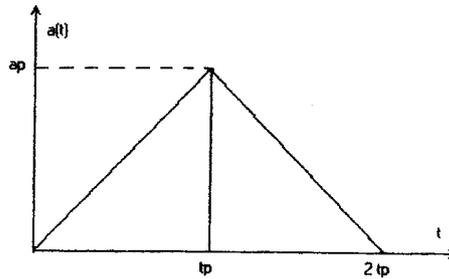
Figura 1. Modelo de un grado de libertad.

La acción externa a la que está sometido el sistema es una excitación del soporte que podría ser la

aceleración del soporte causada por un terremoto. La excitación consiste en una aceleración triangular (bilineal) mostrada en la Figura 2.

La ecuación de movimiento y las condiciones iniciales que gobiernan el problema de vibración forzada del sistema amortiguado con un grado de libertad son:

$$\ddot{u}(t) + \frac{c}{m}\dot{u}(t) + \frac{k}{m}u(t) = -a(t) \quad (1)$$



| | |
|--|------------------------|
| $a(t) = a_1(t) = (a_p/t_p) t$ | $0 \leq t \leq t_p$ |
| $a(t) = a_2(t) = -(a_p/t_p) t + 2 a_p$ | $t_p \leq t \leq 2t_p$ |
| $a(t) = 0$ | $t > 2t_p$ |

Figura 2. Función aceleración del soporte.

$$u(0) = 0; \quad \dot{u}(0) = \varphi_0 \quad (2)$$

Transformación del problema de condiciones iniciales (CI) en uno de condiciones de borde (CB)

Para aplicar una solución variacional, es necesario transformar el problema de CI en uno con CB. Dicha transformación se consigue a través del procedimiento que se describe a continuación. Se asume un intervalo de interés T arbitrario, y se definen: $x = t/T$; $(\cdot) = (\cdot)/T$, etc. Además: $u(t) = u(Tx) = v(x)$. Reemplazando en la ecuación (2) resulta:

$$v''(x) + \eta v'(x) + \rho^2 v(x) = -T^2 a(Tx) \quad (3)$$

donde $\eta = cT/m$; $\rho^2 = kT^2/m$ con las condiciones $v(0) = U_0$; $v'(0) = T\varphi_0$. Además se introduce la función $\Psi = \Psi(x) = [U_1 - U_0]x + U_0$, con U_1 desconocido por ahora. También se define $f = f(x) \equiv v(x) - \Psi(x)$. Luego la ecuación diferencial (3) se transforma en

$$f'' + \eta f' + \rho^2 f = q \quad (4)$$

donde $q = q(x) = -T^2 a(Tx) - \eta(U_1 - U_0) - \rho^2 [(U_1 - U_0)x + U_0]$ y con las condiciones esenciales (CBE)

$$f(0) = f(1) = 0 \quad (5)$$

Con esta transformación, el problema con condiciones iniciales se reduce a uno con condiciones de borde sobre el cual puede aplicarse el MEC.

Solución del problema transformado a través del MEC

Aplicando trabajos virtuales puede definirse el funcional

$$F[f] = \int_0^1 |f'|^2 - (\eta f', f) - |\rho f|^2 + 2(q, f) = 0 \quad (6)$$

Se adopta la siguiente secuencia extremante del MEC

$$f_M = \sum_i^M A_i b_i / \beta_i + A_0 x + B \quad (7)$$

donde $s_i = \text{sen}(\beta_i x)$; $\beta_i = i\pi$. Las secuencias f_M y f'_M convergen hacia f y f' respectivamente. Una vez aplicadas las CBE (5), se plantea el extremo del funcional con la condición $\delta F[f_M] = 0$ resultando en el *seudo* trabajo virtual en las secuencias extremantes

$$(f'_M, \delta f'_M) - (\eta f'_M, \delta f_M) - (\rho^2 f_M, \delta f_M) + (q, \delta f_M) = 0 \quad (8)$$

Para eliminar U_1 debe hacerse uso de la condición inicial $v'_M(0) = T\varphi_0$, quedando así expresado en función de las incógnitas A_i del problema. Finalmente luego del álgebra se halla

$$A_j = \frac{1}{D_j} [\eta S_j + Q_j S - R_j] \quad (9)$$

donde

$$D_j = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta_j^2 - \rho^2}{\beta_j^2} \right); \quad S_j = \sum_{i \neq j} \frac{A_i [(-1)^{i+j} - 1]}{\beta_i^2 - \beta_j^2}; \quad S = \sum_{i=1}^M A_i$$

$$R_j = \frac{1}{\beta_j} (C_1 \gamma_{j1} + C_2 \gamma_{j2} + C_3 \gamma_{j3} - C_4 \gamma_{j4} - C_5 \gamma_{j5});$$

$$C_1 = -T^3 \begin{pmatrix} a_p \\ t_p \end{pmatrix}; \quad C_2 = -C_1; \quad C_3 = -2T^2 a_p; \quad C_4 = \rho^2 T \varphi_0; \quad C_5 = \eta T \varphi_0 + \rho^2 U_0$$

$$\gamma_{j1} = \int_0^a x s_j dx, \quad \gamma_{j2} = \int_a^b x s_j dx, \quad \gamma_{j3} = \int_a^b s_j dx, \quad \gamma_{j4} = \int_0^1 x s_j dx, \quad \gamma_{j5} = \int_0^1 s_j dx$$

El proceso de cálculo es iterativo. Se introduce un conjunto inicial de A_i . Con ellos se calculan las sumas S y S_j que a su vez se introducen en la expresión (9) para obtener un nuevo conjunto de A_j . El procedimiento se repite hasta lograr la convergencia de los coeficientes. Para volver a las funciones iniciales del problema se plantea $v_M(t/T) = f_M(t/T) + \psi(t/T)$. Es importante destacar que el MEC, a diferencia de la solución clásica, provee una única solución exacta en todo el intervalo de interés.

Se resolvió numéricamente el ejemplo No. 5 de la sección 2.6 de la referencia [5]. En esta referencia se utiliza el método de *aceleración promedio constante* (Constant Average Acceleration, CAA), que asume una aceleración constante en cada intervalo. La magnitud de la aceleración que utiliza para el cálculo es igual al promedio de las aceleraciones al principio y final de dicho intervalo. Datos: $m=1$ k-s²/in; $\hat{t}=0.05$, período y frecuencia fundamental: $T_n=1$ seg, $\hat{u}_n=2\delta$. Se calcularon los parámetros: $\zeta = cT/m = 2\hat{u}_n T$; $\bar{n}^2 = kT^2/m = \hat{u}_n^2 T^2$.

En la Tabla I se muestran los valores numéricos obtenidos para el desplazamiento transversal y sus derivadas, utilizando MEC y comparando con los valores hallados con CAA de referencia [5]. En particular también se resolvió un modelo de un grado de libertad utilizando el código de elementos finitos ALGOR [6] utilizando un elemento viga.

Tabla I: Valores de u , u' y u'' obtenidos con el MEC ($M=1500$). Comparación con CAA [5] y MEF (hallados con ALGOR).

| t | a_k | u | | | u' | | u'' | |
|------|--------|----------|----------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| | | CAA | MEC | MEF | CAA | MEC | CAA | MEC |
| 0.00 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.00 | 0.0 | 0.0 | 0.0 | 0.0 |
| 0.02 | 38.64 | -0.00382 | -0.02566 | -0.00433 | -0.38221 | -0.38428 | -38.2211 | -38.2947 |
| 0.04 | 77.28 | -0.02283 | -0.02041 | -0.02505 | -1.51812 | -1.52469 | -75.3693 | -75.5214 |
| 0.06 | 115.92 | -0.07181 | -0.06842 | -0.07637 | -3.38058 | -3.39393 | -110.8774 | -111.0784 |
| 0.08 | 154.56 | -0.16493 | -0.16078 | -0.17254 | -5.93146 | -5.95358 | -144.2105 | -144.4834 |
| 0.10 | 193.20 | -0.31547 | -0.31084 | -0.32743 | -9.12231 | -9.15493 | -174.8748 | -175.0986 |
| 0.12 | 154.56 | -0.52800 | -0.52573 | -0.54506 | -12.13088 | -12.17121 | -125.9818 | -126.1772 |
| 0.14 | 115.92 | -0.79791 | -0.79105 | -0.81301 | -14.14798 | -14.19212 | -75.7279 | -75.7478 |
| 0.16 | 77.28 | -1.08382 | -1.08665 | -1.11310 | -15.15441 | -15.19843 | -24.9152 | -24.8655 |
| 0.18 | 38.64 | -1.38683 | -1.39220 | -1.4250 | -15.14701 | -15.18702 | 25.6548 | 25.9117 |
| 0.20 | 0.0 | -1.67968 | -1.68743 | -1.72790 | -14.13852 | -14.17079 | 75.1948 | 75.4157 |

Los resultados del MEC publicados fueron hallados con 1500 términos. Previamente se hicieron estudios de convergencia. El método permite obtener los valores con precisión arbitraria. Esto es, se fija una precisión deseada a través de un número de dígitos y se incrementa el número de términos de las sumas hasta lograrlo. Esto es posible dado que las series son convergentes.

Viga simplemente apoyada

En esta sección se estudia la dinámica de una viga simplemente apoyada. La excitación aplicada al sistema consiste en la aceleración triangular (bilineal) del soporte como fue descrita en la primera parte de este trabajo. La ecuación de movimiento y las condiciones iniciales que gobiernan el problema

de vibración forzada del sistema amortiguado continuo son:

$$EI \frac{\partial^4 v}{\partial X^4} + C_s I \frac{\partial^5 v}{\partial X^4 \partial t} + m \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -m(X)a(t) \quad (10)$$

donde X es la variable espacial, t es el tiempo, E es el módulo de elasticidad, I es el momento de inercia de la sección transversal de la viga, m es la masa distribuida, C_s es el coeficiente de amortiguamiento interno y el desplazamiento transversal es $v=v(X,t)$. La aceleración en todo punto de la viga es $a(t)$. Además debe cumplir condiciones de borde correspondientes a una viga simplemente apoyada y condiciones iniciales del tipo $v(X,0)=U_0(X)$ y $(\partial v/\partial t)|_{t=0}=\varphi_0(X)$.

Para transformar el problema de condiciones iniciales y condiciones de borde a uno de condiciones de borde, se asume como antes, un intervalo de interés arbitrario y se adimensionalizan las variables para obtener un dominio unitario $(0,1)$. O sea, introducimos $x = X/L$, $y = t/T$ con lo cual $u(x,y)=v(Lx,Ty)$. La ecuación (10) puede ahora escribirse

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \eta \frac{\partial^5 u}{\partial x^4 \partial y} + a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \alpha a(yT); \quad (11)$$

donde se introdujeron las siguientes definiciones:

$$\eta = \frac{C_s}{ET}; \quad a^2 = \frac{mL^4}{EIT^2}; \quad \alpha = -\frac{L^4 m}{EI} \quad (\cdot)' = \frac{\partial(\cdot)}{\partial x}; \quad (\cdot)\bar{\cdot} = \frac{\partial(\cdot)}{\partial t}$$

y las condiciones adicionales de "borde" son: $u(x,0) \equiv U_0(x)$; $\dot{u}(x,0) \equiv T\varphi_0(x)$. Además llamaremos $u(x,1) \equiv U_1(x)$; las condiciones de borde originales son $u(0,y)=0$; $u(1,y)=0$. El procedimiento es similar al anterior tratando ahora con un dominio bidimensional. Se introduce la función $\vartheta = \mathcal{A}(x,y) = [U_1(x) - U_0(x)]y + U_0(x)$ y se define $f = f(x,y) = u(x,y) - \mathcal{A}(x,y)$. Finalmente la ecuación diferencial puede escribirse como

$$f'''' + a^2 \bar{f} + \eta \bar{f}'''' - p = 0 \quad (12)$$

donde $p = \alpha a(yT) - \psi'''' - \eta \psi''''$ y con las siguientes condiciones de borde $f(x,0)=f(x,1)=f(0,y)=f(1,y)=0$. Con esta transformación estamos en condiciones de aplicar MEC.

Solución del problema transformado

Se propone la siguiente secuencia extremante

$$f_{MN}(x,y) = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j \quad (13)$$

donde $s_i = \text{sen}(\beta_i x)$; $s_j = \text{sen}(\gamma_j y)$; $\beta_i = i\pi$; $\gamma_j = j\pi$. Las condiciones de borde esenciales son satisfechas idénticamente. Aplicando ahora la condición de nulidad del funcional se obtiene

$$\left(\bar{f}_{MN} \delta f_{MN} \right) - \left(a^2 \bar{f}_{MN} \delta \bar{f}_{MN} \right) + \left(\eta \bar{f}_{MN} \delta \bar{f}_{MN} \right) - (p, \delta f_{MN}) = 0 \quad (14)$$

Luego de algunos pasos algebraicos se encuentra la expresión para las incógnitas A_i

$$A_{ij} = \frac{4}{D_{ij}} [\gamma_i S_i + R_{ij}] \quad (15)$$

en la cual

$$\begin{aligned} Q_j &= [(-1)^j + \eta[(-1)^j - 1]]; \quad S_1 = \sum_j^N A_{ij} Q_j; \quad V_i = -\frac{\beta_i^4}{2}; \quad D_{ij} = \beta_i^4 - a^2 \gamma_j^2 \\ K_i &= \frac{[(-1)^i - 1]}{\beta_i \gamma_j}, \quad K_j = \frac{[(-1)^j - 1]}{\beta_j \gamma_i}; \quad I_1 = \frac{1}{4}; \quad I_2 = \frac{1}{4}; \quad I_3 = 0; \quad I_4 = K_i \left\{ a \cos(\pi a j) - \frac{\sin(\pi a j)}{\gamma_j} \right\} \\ I_5 &= -I_4 + K_i \left\{ b \cos(\pi b j) - \frac{\sin(\pi b j)}{\gamma_j} \right\}; \quad I_6 = K_i \{ \cos(\pi b j) - \cos(\pi a j) \}; \\ I_7 &= -\frac{(-1)^j}{\gamma_j}; \quad I_8 = \frac{1}{\gamma_j} [1 - (-1)^j]; \quad R_{ij} = (C1I_4 + C2I_5 + C3I_6) \end{aligned}$$

Para volver a la función original del problema, una vez obtenidos los coeficientes A_i se escribe

$$u(x, y) = f_{MN} + \psi = \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N A_{ij} s_i s_j - \sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^N \gamma_j A_{ij} s_i y. \quad (16)$$

REFERENCIAS

- [1] **Rosales, M.B.**, A non-classical variational method and its application to statics and dynamics of structural elements. Tesis Doctoral, Universidad Nacional del Sur, B.Blanca, 1997.
- [2] **Filipich, C.P. y Rosales, M.B.** An initial-boundary value problem of a beam via a space-time variational method. Appl. Mech.in the Americas, Vol 6, 361-364,1999.
- [3] **Filipich, C.P. , Rosales, M.B. y Bellés, P.M.** Natural vibrations of rectangular plates considered as tridimensional solids. Journal of Sound and Vibration **212** (4), 599-610. 1998.
- [4] **Filipich, C.P. y Rosales, M.B.** A variational solution for an initial conditions problem. Applied Mechanics Review, Vol 50(11), S50-S55,1997.
- [5] **Hart, G.C. and Wong, K.** Structural Dynamics for Structural Engineers, John Wiley & Sons, N.Y., 2000.
- [6] ALGOR Version 12.04. Pittsburg, Pennsylvania, EEUU. Algor Inc., 2000.