

ANISOTROPÍA INDUCIDA POR DAÑO

Pablo Martín, Bibiana Luccioni, Rodolfo Danesi

CONICET

Instituto de Estructuras, Universidad Nacional de Tucumán
CC. 134, Correo Central, 4000 S.M. de Tucumán, Argentina

e-mail: bluccioni@herrera.unt.edu.ar

pemartin@herrera.unt.edu.ar

RESUMEN

El estudio del problema de la anisotropía inducida por el daño ha sido materia de estudio en los últimos años. La capacidad de predicción depende del tipo de variable macroscópica utilizada para modelar el fenómeno micromecánico subyacente. En general, los modelos desarrollados utilizan vectores o tensores de segundo o cuarto orden como variables de daño.

En este trabajo se presenta un modelo de daño direccionado obtenido a partir de un modelo de daño escalar. El modelo parte de admitir que el material está formado por un número finito de componentes ficticias con ortotropía elástica que se distribuyen uniformemente en el espacio. Cada una de ellas obedece a un modelo de daño escalar basado en la hipótesis de equivalencia de energía. El comportamiento resultante del sólido se obtiene mediante una homogeneización basada en la teoría de mezclas.

ABSTRACT

The study of damage induced anisotropy has been subject of study in last years. The prediction capacity depends on the macroscopic variable used to describe the underlying microscopic phenomenon. Generally, the models developed use vectors or second or fourth order tensors as damage variables.

A directional damage model obtained from a scalar damage model is presented in this paper. The model is based on the assumption that the solid is formed by a finite number of orthotropic elastic fictitious components uniformly distributed in the space. Each one of the components responds to scalar damage model based on the energy equivalence hypothesis. The resultant behavior of the solid is obtained through an homogeneization based on the the rule of mixtures.

INTRODUCCIÓN

Los materiales semifrágiles como el hormigón exhiben una respuesta tensión-deformación no lineal, principalmente debido a la microfisuración. En la mayoría de los casos, estas microfisuras están orientadas respecto a la historia de tensiones aplicada y traen como consecuencia un deterioro progresivo de la rigidez elástica del material. El material, inicialmente isotrópico, se torna gradualmente anisótropo. El estudio del problema del daño con direcciones preferentes, normalmente denominado daño anisótropo, ha sido materia de estudio de los últimos años, motivado por su aplicación a la representación del comportamiento de metales y geomateriales en general.

La capacidad predictiva de los modelos de daño, depende fuertemente de la particular elección de la variable de daño, que sirve como una aproximación macroscópica para describir el proceso micromecánico subyacente [1]. La variable de daño escalar que fue definida por Kachanov, es incapaz de representar el daño direccionado. Se han desarrollado numerosos modelos de daño anisótropo para materiales cuasi-frágiles, que utilizan vectores de daño [2], tensores de daño de 2^{do}. orden [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [15], [16] y tensores de daño de 4^{to} orden [7], [17], [18], [19] y [20]. A su vez todos estos modelos, están basados en distintas hipótesis, para la definición de la transformación producida por el daño [13], entre las que se pueden nombrar : la hipótesis de equivalencia de deformaciones [21],[22] y la hipótesis de la equivalencia de energía [5], [22].

En este trabajo, se propone modelar la anisotropía inducida por daño, utilizando una idealización del material, que permite trabajar con modelos de daño escalar, y obtener el comportamiento anisótropo a partir de una homogeneización, basada en la teoría de mezclas.

IDEALIZACIÓN DEL MATERIAL

Se supone que el material, está formado por un número finito de componentes ficticias, con ortotropía elástica uniformemente distribuidas en el espacio. En el caso de un material inicialmente isotrópico, estas componentes ficticias son idénticas entre sí. Se admite además que cada componente ficticia responde a un modelo de daño escalar. El comportamiento del material, idealizado de esta forma, se obtiene a partir de la teoría de mezclas.

La teoría de mezclas clásica, propuesta originalmente por Truesdell y Toupin [23] se basa en la hipótesis de compatibilidad de deformaciones entre las distintas componentes:

$$(\varepsilon_{ij})_i = \dots = (\varepsilon_{ij})_c = \dots = (\varepsilon_{ij})_n = \varepsilon_{ij} \quad (1)$$

La densidad de energía libre del compuesto puede escribirse como[23]:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, p) = \sum_{c=1}^n k_c \Psi_c(\varepsilon_{ij}, p_c) \quad (2)$$

donde $\Psi_c(\varepsilon_{ij}, p_c)$ es la energía libre por unidad de volumen, correspondiente a cada una de las n sustancias componentes, ε_{ij} la deformación, $k_c = \frac{dV_c}{dV}$ la fracción de volumen y p_c un conjunto de variables internas correspondiente a dicha componente.

La ecuación constitutiva secante del compuesto, puede obtenerse a partir de las relaciones de Coleman que aseguran el cumplimiento de la desigualdad de Clasius-Duhem [24]:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{kl}, p)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \frac{\partial \Psi_c(\varepsilon_{kl}, p_c)}{\partial \varepsilon_{ij}} = \sum_{c=1}^n k_c \sigma_{ij}^c \quad (3)$$

donde σ_{ij} es la tensión en el compuesto y σ_{ij}^c las tensiones en cada una de las componentes obtenidas de las correspondientes ecuaciones constitutivas.

MODELO DE DAÑO ESCALAR

Bases Termodinámicas

El modelo de daño escalar propuesto para las componentes ficticias, se basa en admitir que existe un espacio ficticio no dañado, que se obtiene del real quitando el daño. Las relaciones entre las tensiones y deformaciones en ambos espacios, se obtienen a partir de la hipótesis de equivalencia de energía y resultan:

$$\bar{\varepsilon}_{ij}^c = \varepsilon_{ij}^c \left(\sqrt{1 - d_c} \right) \quad (4)$$

$$\bar{\sigma}_{ij}^c = \frac{\sigma_{ij}^c}{(\sqrt{1-d_c})} \quad (5)$$

Donde $\bar{\varepsilon}_{ij}^c$ y $\bar{\sigma}_{ij}^c$ son la deformación y la tensión correspondientes a la componente c , en el espacio ficticio no dañado respectivamente y d_c es la variable interna de daño.

La relación secante en el espacio ficticio no dañado, se puede expresar como:

$$\bar{\sigma}_{ij}^c = \bar{C}_{ijkl}^c \bar{\varepsilon}_{kl}^c \quad (6)$$

Donde \bar{C}_{ijkl}^c es el tensor elástico del material virgen.

Reemplazando las ecs. 4 y 6 en la ec. 5 se puede obtener la ecuación secante en el espacio real dañado.

$$\sigma_{ij}^c = (\sqrt{1-d_c}) \bar{C}_{ijkl}^c (\sqrt{1-d_c}) \varepsilon_{kl}^c = (1-d_c) \bar{C}_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c \quad (7)$$

De donde el tensor elástico secante de cada componente, C_{ijkl}^c puede escribirse como:

$$C_{ijkl}^c = (1-d_c) \bar{C}_{ijkl}^c \quad (8)$$

La energía libre de Helmholtz en el espacio no dañado se escribe como:

$$\bar{\psi}^c = \frac{1}{2} \bar{\varepsilon}_{ij}^c \bar{C}_{ijkl}^c \bar{\varepsilon}_{kl}^c \quad (9)$$

Reemplazando las ecs. 4, 5 y 8 en esta última ecuación 9, se comprueba la equivalencia de energía en ambos espacios, es decir:

$$\bar{\psi}^c = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^c C_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c = \psi_c \quad (10)$$

La disipación mecánica debida al daño se escribe como:

$$\Xi^c = \dot{d}_c \varepsilon_{ij}^c \bar{C}_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c = Y \dot{d}_c \quad (11)$$

De donde la fuerza termodinámica asociada a la variable de daño está dada por:

$$Y = -\frac{\partial \psi^c}{\partial d_c} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^c (1-d_c) \bar{C}_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c \right)}{\partial d_c} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^c \bar{C}_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij}^c [\bar{C}_{ijkl}^c]^{-1} \bar{\sigma}_{kl}^c \quad (12)$$

Siendo:

$$\bar{\sigma}_{ij}^c = \bar{C}_{ijkl}^c \varepsilon_{kl}^c \quad (13)$$

Umbral de Daño

Se define una función de daño, que marca el umbral del comportamiento elástico. Para ello se utiliza una forma paramétrica [26]:

$$\bar{F}(Y, q) = G[f(Y)] - G[c(d)] \leq 0 \quad (14)$$

Donde $G[x]$ es una función escalar, invertible, positiva y con derivada positiva, y monótona creciente. Y la función escalar $c(d)$ define la posición del umbral de daño.

Evolución de la Variable Interna de Daño

La ley de evolución de la variable de daño, viene dada por la siguiente expresión: [26]

$$\dot{d} = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{F}(Y; d)}{\partial [f(Y)]} \equiv \dot{\mu} \frac{\partial G[f(Y)]}{\partial [f(Y)]} \quad (15)$$

Donde $\dot{\mu}$ es un escalar no negativo denominado parámetro de consistencia de daño. Las condiciones de carga / descarga se describen a través de las condiciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad ; \quad \bar{F}(Y; d) \leq 0 \quad ; \quad \dot{\mu} \bar{F}(Y; d) = 0 \quad (16)$$

El factor de consistencia de daño $\dot{\mu}$ puede deducirse de las condiciones de consistencia de daño de Il'ushim. Cuando $\dot{\mu} \geq 0$, se debe cumplir:

$$\bar{F}(Y; d) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G[f(Y)]}{\partial [f(Y)]} = \frac{\partial G[c(d)]}{\partial c(d)} \quad (17)$$

Y además:

$$\dot{\bar{F}}(Y; d) = 0 \quad ; \quad \frac{\partial G[f(Y)]}{\partial f(Y)} \dot{f}(Y) - \frac{\partial G[c(d)]}{\partial c(d)} \dot{c}(d) = 0 \quad ; \quad \dot{f}(\sigma_0) = \dot{c}(d) \quad (18)$$

De las ecs. 15 y 18 resulta:

$$\dot{d} \equiv \dot{G}[f(Y)] \quad ; \quad \dot{\mu} \equiv \dot{f}(Y) \quad (19)$$

Integrando en el tiempo el incremento de la variable interna de daño \dot{d} , se obtiene la siguiente expresión explícita para la misma:

$$d = G[f(\sigma_0)] \quad (20)$$

y el umbral de daño en un tiempo $t = s$ puede calcularse como:

$$c = \max \{c^{max}, \max [f(Y)_s]\} \quad \forall \quad 0 \leq s \leq t \quad (21)$$

PROPIEDADES MECÁNICAS DE LAS COMPONENTES

Para simular el material real, se supone que está compuesto de n_{mat} componentes ortótropas, rotadas entre sí un ángulo $\alpha = \frac{\pi}{n_{mat}}$.

Las propiedades mecánicas de las componentes, se obtienen a partir de las del sólido real, en función del número de componentes y del grado de direccionalidad del daño que presenta el mismo. A continuación se presentan las expresiones obtenidas para las constantes elásticas y el umbral de daño de las componentes.

Módulo Elástico

$$E_{xx}^{fic} = \frac{n_{mat} (h - \nu_{xy}^2) (\bar{C}_{1111} + \bar{C}_{1212})}{n_{mat} (1 + \nu_{xy}) + (h - 1) \sum_{c=1}^{n_{mat}} \cos^2 \alpha_c} \quad ; \quad E_{yy}^{fic} = \frac{E_{xx}^{fic}}{h} \quad ; \quad E_{zz}^{fic} = \frac{E_{xx}^{fic}}{h} \quad (22)$$

Donde h es la relación de anisotropía de cada componente.

Módulo de Poisson

$$\nu_{xy}^{fic} = \nu_{xy} \quad ; \quad \nu_{yx}^{fic} = \frac{\nu_{xy}^{fic}}{h} \quad ; \quad \nu_{xz}^{fic} = \nu_{xz} \quad ; \quad \nu_{zx}^{fic} = \frac{\nu_{xz}^{fic}}{h} \quad ; \quad \nu_{yz}^{fic} = \nu_{yz} \quad ; \quad \nu_{zy}^{fic} = \nu_{yz}^{fic} \quad (23)$$

Módulo de elasticidad transversal

$$G_{xy} = \frac{n_{mat} N_G}{4D_G} \quad (24)$$

Donde:

$$N_G = (1 + h - 2\nu_{xy}) (\bar{C}_{1111} + \bar{C}_{1212}) \sum_{c=1}^{n_{mat}} \sin^4 \alpha_c - \\ - ((1 + h - 2\nu_{xy}) \bar{C}_{1111} + 2(h - \nu_{xy}) \bar{C}_{1212}) \sum_{c=1}^{n_{mat}} \sin^2 \alpha_c + \\ + n_{mat} (h \bar{C}_{1212} - \nu_{xy} \bar{C}_{1111}) \quad (25)$$

$$D_G = \left(\sum_{c=1}^{n_{mat}} \sin^2 \alpha_c - \sum_{c=1}^{n_{mat}} \sin^4 \alpha_c \right) \left((h - 1) \sum_{c=1}^{n_{mat}} \sin^2 \alpha_c - (h + \nu_{xy}) n_{mat} \right) \quad (26)$$

Umbral de daño

Para el cálculo de la tensión umbral, se simula un ensayo de tracción y se adopta como valor umbral de cada componente, al valor de tensión que alcanza la componente mas solicitada, cuando el compuesto alcanza el valor umbral.

$$\sigma^{*(c)} = \frac{\sigma^*}{D_S} \quad (27)$$

Siendo:

$$D_S = A_1 \sum_{c=1}^{n_{mat}} \cos^4 \alpha_c + A_2 \sum_{c=1}^{n_{mat}} \cos^2 \alpha_c + A_3 \quad (28)$$

$$A_1 = k^c \frac{\bar{C}_{1111} (\bar{C}_{2222} + \bar{C}_{2211}) - 2 \bar{C}_{1122}^2 - \bar{C}_{2222} \bar{C}_{1122} + \bar{C}_{2222}^2 - 4 \bar{C}_{1212} (\bar{C}_{2211} + \bar{C}_{2222})}{\bar{C}_{1111} \bar{C}_{2222} - \bar{C}_{1122}^2} \quad (29)$$

$$A_2 = k^c \frac{4 \bar{C}_{2211} \bar{C}_{1212} - 2 \bar{C}_{2222}^2 + 4 \bar{C}_{2222} \bar{C}_{1212} + \bar{C}_{2222} \bar{C}_{1122} + 2 \bar{C}_{1122}^2 - \bar{C}_{2211} \bar{C}_{1111}}{\bar{C}_{1111} \bar{C}_{2222} - \bar{C}_{1122}^2} \quad (30)$$

$$A_3 = k^c \frac{-\bar{C}_{1122}^2 + \bar{C}_{1111} \bar{C}_{2222} + (n_{mat} - 1) \bar{C}_{2222}^2 - (n_{mat} - 1) \bar{C}_{1122}^2}{\bar{C}_{1111} \bar{C}_{2222} - \bar{C}_{1122}^2} \quad (31)$$

EJEMPLOS DE APLICACIÓN**Tracción Uniaxial**

En la fig. 1 se grafican los resultados del análisis de una probeta sometida a tracción uniaxial, modelada con distinto número componentes ficticias. Es claro que la respuesta, se suaviza tendiendo a la de un material homogéneo, a medida que se aumenta el número de componentes ficticias.

Tracción Uniaxial en Dos Direcciones Ortogonales

En la fig. 2, se muestran las curvas tensión-deformación obtenidas para un material inicialmente isotrópico, cuando se lo tracciona en la dirección x, se descarga y luego se lo tracciona en la dirección y. Puede observarse que se produce una pérdida de rigidez y resistencia orientada en la dirección de la carga.

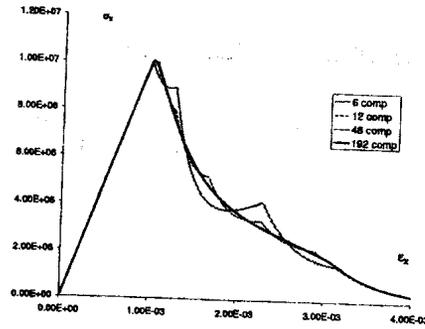


Figura 1: Ensayo de tracción uniaxial con distinto número de componentes ficticias

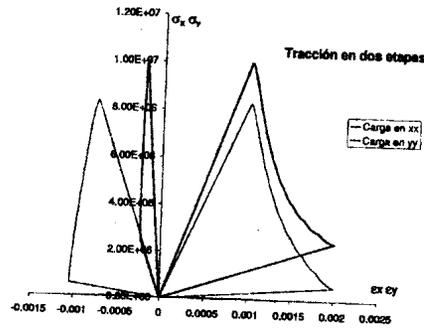


Figura 2: Ensayo de tracción uniaxial en dos direcciones ortogonales

Rotación de las Direcciones Principales de Tensión

Se presentan los resultados del ensayo numérico propuesto por Willam [12], que consiste en una primera etapa de tracción uniaxial en la dirección x hasta alcanzar el umbral de daño, y una segunda etapa en la que se aplican incrementos de deformación en las proporciones $\varepsilon_x; \varepsilon_y; \varepsilon_z$ 1; 1.5; 1, manteniendo la carga aplicada en la primera etapa. A continuación se muestran las curvas tensión deformación obtenidas para distinto grado de anisotropía h de las componentes.

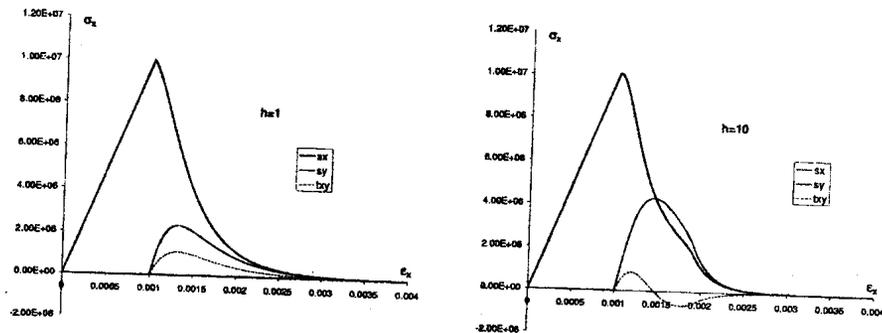


Figura 3: Ensayo de Willam, 48 componentes

Es claro que cuando las componentes son isotropas, el modelo da resultados idénticos a los de

un modelo de daño escalar. Sin embargo, al aumentar el grado de ortotropía elástica de las componentes, las curvas tensión - deformación tienen el mismo aspecto que las obtenidas por [12], evidenciando inversión en el signo de las tensiones tangenciales y sustancial aumento de la tensión en la dirección y respecto del modelo de daño escalar.

CONCLUSIONES

En este trabajo se ha presentado un método alternativo para la simulación del comportamiento mecánico de materiales con daño direccionado. El mismo tiene la ventaja de que, partiendo de modelos relativamente sencillos, permite reproducir comportamientos muy complejos. Por otro lado, la idealización del material propuesta permite simular plasticidad y daño acoplados, descargas inelásticas, etc. [25].

La implementación numérica de la formulación propuesta en un programa de elementos finitos no lineal es directa. Se requieren sólo unos pocos cálculos adicionales.

Los ejemplos de aplicación desarrollados muestran la capacidad de modelo para predecir el daño direccionado, tanto en problemas de carga proporcional como en problemas con rotación de las direcciones principales de deformación o tensión. Los resultados obtenidos en estos ejemplos son similares a los obtenidos por otros investigadores con modelos más complejos.

REFERENCIAS

- [1] **Ju J. W.**, *Isotropic and anisotropic damage variables in continuum damage mechanics*, ASCE Journal of Engineering Mechanics, Vol16, No.12, Dec. 1990, 2764-2770.
- [2] **Krajcinovic, D., Fonseka, G. U.**, *The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part I and II*, Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol.48, 1981, pp. 809-824.
- [3] **Dragon A. And Mroz Z.**, *A continuum damage model for plastic-brittle behaviour of concrete*, Int. J. Engng ci. 17, 121-137, 1979.
- [4] **Cordebois J. P. and Sidoroff F.**, *Damage Induced Elastic Anisotropy*, Mechanical Behavior of Anisotropic Solids, Colloque Euromech 115, J.P. Boehler, de., Villard de Lans, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands, pp. 761-774, 1979.
- [5] **Sidoroff F.**, *Description of Anisotropic Application to Elasticity*, Physical Non-Linearities in Structural Analysis, J.Hult and J. Lemaitre eds. IUTAM Series, Springer-Verlag, New York, pp. 237-244, 1980.
- [6] **Murakami S., Ohno N.**, *A Continuum Theory of creep and Creep Damage*, 3 IUTAM Symposium on Creep in Structure, Leicester, 1980.
- [7] **Krajcinovic D.**, *Continuous damage mechanics revisited: Basic concepts and definitions*, J. Appl. Mech. 52, 829-834, 1985
- [8] **Mazars J. and Pijaudier-Cabot G.**, *Continuum damage theory -application to concrete*, J. Engng Mech. ASCE, 115, 345-365, 1989.
- [9] **Valanis K. C.**, *A global damage theory and the hyperbolicity of the wave problem*, J. Appl. Mech. ASME, 58, 311-316, (1991)
- [10] **Chaboche J.L.**, *Continuum Damage Mechanics, Anisotropy and Damage Deactivation for Brittle Materials like Concrete and Ceramic Composites*, International Journal of Damage Mechanics 4, 1995, pgs. 5-22.
- [11] **Voyiadjis G. Z., Park T.**, *Anisotropic Damage Effect Tensors for the Symmetrization of the Effective Stress Tensor*, Transactions of the ASME, Vol.64, 106-110, 1997

- [12] Carol I., Rizzi E., Willam K., *On the Formulation of Anisotropic Degradation using a pseudo-logarithmic damage tensor*, Structural Engineerin and Structural Mechanics Research Series, repor CU/SR-98/1, Univ. of Colorado al Boulder, 1998.
- [13] Voyiadjis G.Z. and Park T., *Kinematics of Large Elastoplastic Damage Deformation, Damage Mecchanics in Engineering Materials*, G. Z. Voyiadjis, J.W.W. Ju and J. L. Chaboche (Eds.), Elsevier Science, pp. 45-63, 1998.
- [14] Yang Q., Zhou W.Y. and Swoboda G., *Micromechanical identification of anisotropic evolution laws*, International Journal of Fracture 98, pp. 55-76, 1999.
- [15] Voyiadjis G. Z., Deliktas B., *A coupled anisotropic damage model for the inelastic response of composite materials*, Compt. Methos Appl. Mech. Engrg. 183 (2000) pp. 159-199.
- [16] Lemaitre, Desmorat R., Sauzy M., *Anisotropic damage law of evolution*, Eur. J. Mech. A /Solids 19(2000) pp. 187-208.
- [17] Ortiz, M., *A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete*, Mechanics of Materials 4, 1985, pp. 67-93.
- [18] Simo C., Ju J., *Stress and Strain Based Continuum Damage Models. Part I and II*. Int. J. Solids Structures 23, pp. 375-400. 1987.
- [19] Voyiadjis, G. Z and Kattan, P. I, *A plasticity-damage theory for large deformation of solids-I. Theoretical formulation*, Int. Journal Engng Sci. Vol.30, No.9, 1992, pp. 1089-1108.
- [20] Carol I., Rizzi E. and Willam K., *A unified description of elastic degradation and damage based on loading surface*, Int. J. Solids Struct., 31, pp. 2835-2865, 1994
- [21] Lemaitre J. and Chaboche J.L., *Aspecta Phenoménologique de la Rupture par Endommagement*, Journal of Mecanique Théorique et Apliquée, pp.317-365, 1978.
- [22] Ju J. W., *On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects*, Int. Journal Solids Structures Vol.25, No.7 pp. 803-833, 1989.
- [23] Truesdell, C. and Toupin, R., *The classical field theories*. Ed. by S.Flugge Handbuch der Physik II/I Springer Verlag Berlin, 1960.
- [24] Lubliner, J., *Plasticity Theory*, Mc. Millan Publishing U.S.A. , 1990.
- [25] Luccioni, B., Martín, P. *Simulación de Procesos Multidisipativos a través de la Teoría de Mezclas*, trabajo publicado en las Memorias del X ENIEF 97.
- [26] Oller, S., *Fractura Mecánica - Un enfoque global, Cap 10 Modelo de Daño Isótropo* en colaboración con E. Car., CIMNE, 2000, pp. 199-213.