Mecánica Computacional Vol 20. pp. 601--607
Compilado por Fernando G. Flores
Córdoba, 30 de octubre - 2 de noviembre de 2001

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE DISCRETIZACIÓN DE LÍNEAS AL PROBLEMA DE AIREACIÓN DE SUELOS

Adriana M. González
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto, (5800) Río Cuarto, Argentina
e-mail: agonzalez@exa.unrc.edu.ar

Juan C. Reginato
Departamento de Química y Física, Facultad de Ciencias Exactas, Físico-Químicas y Naturales
Universidad Nacional de Río Cuarto, (5800) Río Cuarto, Argentina
e-mail: jreginato@exa.unrc.edu.ar

Domingo A. Tarzia
Departamento de Matemática, Facultad de Ciencias Empresariales
Universidad Austral, Paraguay 1950, (2000) Rosario, Argentina
e-mail: tarzia@uaufce.edu.ar

RESUMEN

La producción de cultivos es afectada por la oxigenación insuficiente y la generación de anhídrido carbónico por actividad microbiana de los suelos. Diversos autores han estudiado los mecanismos de los problemas de aireación en los sistemas de producción mediante la formulación de modelos cuyas ecuaciones resultantes son resueltas sobre dominios fijos. Se presenta un modelo de frontera libre para la difusión y el consumo de oxígeno en agregados esféricos de suelo. Se calcula la solución exacta del estado estacionario y se presenta un algoritmo computacional basado en el método shooting para problemas de absorción-difusión unidimensionales. Se presentan algunos resultados preliminares y comparativos con aquellos obtenidos por métodos clásicos de elementos finitos.

ABSTRACT

The crops production is affected by the low aeration and the generation of anhidric carbonic resulting from biological activity in soils. Numerous authors have studied the mechanism of aeration problems in the production systems on fixed domains. A model of free boundary for the diffusion and consumption of oxygen in spherical aggregates of soil is presented. It is computed the exactly solution of the stationary state and a computational algorithm based in shooting method for problems of absorption-diffusion one-dimensional is presented. It is presented some preliminary and comparative results with those obtained by classic methods of finite elements

INTRODUCCIÓN

La producción de cultivos está afectada por la oxigenación insuficiente y la generación de anhídrido carbónico por actividad microbiana de los suelos. Diversos autores han estudiado los mecanismos de los problemas de aireación en los sistemas de producción mediante modelos de simulación donde se resuelven ecuaciones diferenciales sobre dominios fijos con variadas condiciones iniciales y de contorno [1,2,3].

Se describe a continuación el proceso físico que origina un modelo matemático de frontera libre para la difusión y el consumo de oxígeno en un medio esférico [4,5]. Primero se permite difundir el oxígeno en el medio de modo tal que parte de él es absorbido y eliminado del proceso de difusión [4]. La concentración de oxígeno en la superficie fija del medio se mantiene constante. La primera fase continúa hasta alcanzar un estado estacionario en el cual el oxígeno no penetra más lejos dentro del medio (segunda fase).

La provisión de oxígeno se corta y la superficie del medio se aísla de manera que no entre ni salga más oxígeno. El medio continúa absorbiendo el oxígeno disponible en su interior y por tanto, la frontera libre que establece una separación entre la zona de concentración positiva y la zona de concentración nula de oxígeno respectivamente, y que marca el ancho de penetración máximo en el caso estacionario, comienza a retroceder hacia la frontera aislada (tercera fase).

El problema consiste en localizar el movimiento de la frontera libre y determinar la distribución de oxígeno en el medio esférico. La ecuación que gobierna la difusión-reacción de un gas en un agregado esférico homogéneo y saturado con agua de radio $\mathbf{r_{ag}}$ es la ecuación de la difusión en coordenadas esféricas con una fuente constante negativa **M**, y coeficientes de difusión y porosidad **D** y ε respectivamente [1,2,3]; es decir,

$$\varepsilon \; C_t = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(D \; r^2 \; C_r \right) + M \tag{1}$$

donde: $\varepsilon > 0$ es la porosidad del agregado,
$C = C(r,t)$ es la concentración interna de gas transformada en concentración de equilibrio en aire [mol m^{-3}],
t es el tiempo [seg],
r es la distancia desde el centro de la esfera [m],
D es el coeficiente de difusión del gas disuelto en la solución suelo [m^2 seg^{-1}],
M es el término de reacción [mol m^{-3} seg^{-1}].

Los modelos matemáticos para las tres fases del problema planteado son

Etapa Difusiva (Problema D)

Consiste en determinar la concentración transiente $C = C(r,t)$ y la frontera de separación $S = S(t)$ que satisfacen el siguiente problema de frontera libre parabólico

$$\begin{cases} \varepsilon \; C_t = D \left(C_{rr} + \dfrac{2}{r} C_r \right) + M \; , & S(t) \le r \le r_{ag} \; , \; t > 0 \; ; \\ C(r,0) = C_{ini} \; , \quad S(0) \le r \le r_{ag} \; ; \\ C(r_{ag},t) = C_{ext} \; , \quad t > 0 \; ; \\ C(S(t),t) = C_r(S(t),t) = 0 \; , \quad t > 0 \; ; \\ S(0) = b \; . \end{cases}$$

Etapa Estacionaria (Problema E)

Consiste en determinar la concentración estacionaria $\mathbf{C = C(r)}$ y la frontera libre $\mathbf{s}$ que satisfacen el siguiente problema de frontera libre elíptico

$$\begin{cases} -\,D\left(C'' + \dfrac{2}{r}\,C'\right) = M\,, & s \le r \le r_{ag}\ ; \\ C(r_{ag}) = C_{ext}\ ; & \\ C(s) = C'(s) = 0\ . & \end{cases}$$

Etapa de Consumo (Problema C)

Consiste en determinar la concentración transiente $C = C(r,t)$ y la frontera de separación $s = s(t)$ que satisfacen el siguiente problema de frontera libre parabólico

$$\begin{cases} \varepsilon\ C_t = D\left(C_{rr} + \dfrac{2}{r}\,C_r\right) + M\,, & s(t) \le r \le r_{ag}\ ,\ t > 0\ ; \\ C(r,0) = C^*(r)\,, & s^* \le r \le r_{ag}\ ; \\ C_r(r_{ag},t) = 0\,, & t > 0\ ; \\ C(s(t),t) = C_r(s(t),t) = 0\,, & t > 0\ ; \\ s(0) = s^*\ . & \end{cases}$$

donde: $C_{ini} > 0$ es la concentración inicial de gas en la Etapa Difusiva [mol m^{-3}],
$C_{ext} > 0$ es la concentración externa de gas en la Etapa Difusiva [mol m^{-3}],
$S = S(t)$ es la frontera libre en la Etapa Difusiva [m],
$s = s(t)$ es la frontera libre en la Etapa de Consumo [m],

$\left(C^*, s^*\right)$ es la solución de la Etapa Estacionaria.

Se calculó la solución exacta del estado estacionario bajo una adecuada restricción y se estudió la convergencia de un algoritmo numérico basado en el método de discretización de líneas para la etapa difusiva mostrando que el procedimiento está bien definido. Por otro lado, se verificó que el estado estacionario se alcanza sólo cuando el tiempo tiende a ∞.

En este trabajo, utilizando coordenadas esféricas y un término de reacción constante, se generalizan resultados obtenidos en [6] para el caso unidimensional.

DESARROLLO

Efectuando cambios de variables los Problemas D y E se transforman en los siguientes adimensionales

Etapa Difusiva (Problema DA)

$$\begin{cases} u_\tau = u_{\rho\rho} - \dfrac{2}{\rho_{ag} - \rho} u_\rho - M^* , & 0 \le \rho \le s(\tau) , \tau > 0 ; \\ u(\rho,0) = u_{ini} , & 0 \le \rho \le \rho^*_{ag} ; \\ u(0,\tau) = \dfrac{1}{2} , & \tau > 0 ; \\ u(s(\tau),\tau) = u_\rho(s(\tau),\tau) = 0 , & \tau > 0 ; \\ s(0) = \rho^*_{ag} . \end{cases}$$

Etapa Estacionaria (Problema EA)

$$\begin{cases} u^{*\,''}(\rho) - \dfrac{2}{\rho_{ag} - \rho} u^{*\,'}(\rho) - M^* = 0 , & 0 \le \rho \le s^* ; \\ u^*(0) = \dfrac{1}{2} ; \\ u^*(s^*) = u^{*\,'}(s^*) = 0 . \end{cases}$$

Fijado un paso de tiempo constante k, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$ se definen

$$\begin{cases} \tau_n = n \ k \\ s_n = s(\tau_n) \\ u_n(\rho) = u_n(\rho,\tau_n) \end{cases}$$

es decir; en cada paso, s_n es la posición de la frontera libre y $u_n = u_n(\rho)$ es la solución de la fase difusiva cuando $\tau = \tau_n$.

La derivada respecto del tiempo se aproxima utilizando el método de Euler hacia atrás

$$u_\tau \approx \frac{u_n - u_{n-1}}{k} \tag{2}$$

y la ecuación diferencial en derivadas parciales

$$u_\tau = u_{\rho\rho} - \frac{2}{\rho_{ag} - \rho} u_\rho - M^* \tag{3}$$

adopta la siguiente forma discreta usando el método de líneas

$$\frac{u_n - u_{n-1}}{k} = u''_n - \frac{2}{\rho_{ag} - \rho} u'_n - M^* . \tag{4}$$

Definiendo $q^2 = \dfrac{1}{k}$ y g_n la función real dada por

$$g_n(\rho) = \begin{cases} - M^* & \text{si} \quad n = 1 \\ - M^* + q^2 \; u_{n-1}(\rho) & \text{si} \quad n > 1 \end{cases}$$

el Problema DA se reemplaza por la siguiente sucesión de problemas de frontera libre (Problemas (P_n))

$$\begin{cases} - u_n''(\rho) + \dfrac{2}{\rho_{sg} - \rho} u_n'(\rho) + q^2 \; u_n(\rho) = g_n(\rho) \, , & 0 \leq \rho \leq s_n \; ; \\ u_n(0) = \dfrac{1}{2} \; ; \\ u_n(s_n) = u_n'(s_n) = 0 \, . & n = 1, \, 2, \, 3, \, \ldots \end{cases}$$

Se justifica teóricamente que cada uno de los Problemas (P_n) tiene una única solución garantizando que el procedimiento de aproximación está bien definido. Para ello se prueban resultados de existencia y unicidad, y se verifica que la solución obtenida es positiva y decreciente en su dominio.

Con este procedimiento se han obtenido dos sucesiones $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ y $(u_n)_{n=1}^{\infty}$ que poseen las siguientes características

$$s_n < s_{n+1} \;\; \forall \; n \in N \qquad \text{y} \qquad u_n < u_{n+1} \; \text{en} \; \left(0, s_n\right) .$$

La solución explícita del Problema EA $\left(s^*, u^*\right) \in \left(0, \rho_{sg}^*\right) \times C^2\left(0, s^*\right)$ está dada por la siguiente expresión

$$u^*(\rho) = \frac{1}{2} + \frac{M^*}{3} \left(\frac{(\rho_{sg} - \rho)^2 - \rho_{sg}^2}{2} + \frac{(\rho_{sg} - s^*)^3 \; \rho}{(\rho_{sg} - \rho) \; \rho_{sg}} \right) , \qquad \rho \in (0, s^*)$$

donde s^* es la única solución de la ecuación

$$(\rho_{sg} - x)^2 \left(\frac{1}{2} + \frac{x}{\rho_{sg}} \right) = \frac{\rho_{sg}^2}{2} - \frac{3}{2 \; M^*} \, , \qquad x \in (0, \rho_{sg}^*) \tag{5}$$

bajo la restricción

$$\frac{- M}{6 \; D \; C_{ext}} > \frac{r_{sg}}{r_{sg}^3 - 3 \; r_{sg} \; b^2 + 2 \; b^3} > 0 .$$

En procesos físicos, la etapa difusiva culmina en la etapa estacionaria. El procedimiento de discretización puede continuarse para n tendiendo a infinito permitiendo mostrar que

- $\lim\limits_{n \to \infty} s_n = s^*$,
- $\lim\limits_{n \to \infty} u_n = u^*$ en $\left(0, s^*\right)$.

Para hallar la solución del Problema DA se utiliza un algoritmo numérico basado en la combinación del método shooting para localizar el movimiento de la frontera libre y en la resolución de una ecuación diferencial ordinaria para determinar la distribución de oxígeno en el medio esférico.

Al computar (s_n, u_n) se combina el método de la secante con el método de Runge-Kutta de cuarto orden a través del siguiente proceso: se resuelve un problema del tipo

$$(P_s) \qquad \begin{cases} -\ u''(\rho) + \dfrac{2}{\rho_{sg} - \rho}\ u'(\rho) + q^2\ u(\rho) = g(\rho)\ , & 0 \leq \rho \leq s\ ; \\ u(s) = u'(s) = 0. \end{cases}$$

(donde s es conocida), se calcula $u(0) - \frac{1}{2}$ y se obtiene un nuevo valor de s usando el método de la secante hasta que el cero s_n se encuentre de acuerdo con la precisión de la máquina. De esta manera, u_n es la solución del último problema con valores en la frontera.

Datos Iniciales

k, paso del tiempo en la discretización
e, tolerancia
s_1 y s_2, valores iniciales de la frontera libre

Primer Paso

$$n = 1$$
$$s = s_1$$

Subrutina para resolver el Problema (P_s) mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden denotando a la solución $u = u(\rho)$

$$u_1(\rho) = u(\rho)$$

si $\left| u_1(0) - \frac{1}{2} \right| < e$ entonces finalizar

Comienzo de la Iteración

$$n = n + 1$$
$$s = s_n$$

Subrutina para resolver el Problema (P_s) mediante el método de Runge-Kutta de cuarto orden denotando a la solución $u = u(\rho)$

$$u_n(\rho) = u(\rho)$$

si $\left| u_n(0) - \frac{1}{2} \right| < e$ entonces finalizar

$$s_{n+1} = s_n - \left(u_n(0) - \frac{1}{2} \right) \frac{s_n - s_{n-1}}{u_n(0) - u_{n-1}(0)}$$

Fin de la Iteración
Finalizar

RESULTADOS

El algoritmo se implementó en MATLAB y se realizaron cálculos con los siguientes datos extraídos de la literatura [3]

$$
\begin{aligned}
r_{ag} &= 0.012 \ \text{m} \\
\varepsilon &= 0.396 \\
D &= 1.43 \ \text{x} \ 10^{-11} \ \text{m}^2/\text{seg} \\
M &= -\ 3.1825 \ \text{x} \ 10^{-5} \ \text{mol}/\text{m}^3 \ \text{seg} \\
C_{ext} &= 9.375 \ \text{mol}/\text{m}^3.
\end{aligned}
$$

Para 8 días el radio anaeróbico resultó de 0.011739 m (93,6% del volumen total del agregado) y para 40 días de 0.011736 m (93,5% del volumen total del agregado) lo que muestra una variación prácticamente nula en el tiempo transcurrido. Sin embargo estos cálculos son preliminares y el modelo puede ser generalizado incluyendo la producción de anhídrido carbónico debida a la respiración en el agregado.

REFERENCIAS

[1] **Sierra, J.**, *Etude de l' Anoxie dans les Sols á Structure Agrégée en relation avec la Respiration Microbienne*. Ph. D. Thesis, Université Claude Bernard – Lyon I, France (1994).

[2] **Renault, P. – Stengel, P.**, *Modelling Oxygen Diffusion in Aggregated Soils: I. Anaerobiosis inside the Aggregates*. Soil Science Society of American Journal, 58 (1994), 4, págs. 1017-23.

[3] **Sierra, J. – Renault, P.**, *Oxygen Consumption by Soil Microorganisms as affected by Oxygen and Carbon Dioxide Levels*. Applied Soil Ecology, 2 (1995), págs. 175-84.

[4] **Crank, J.**, *Free and Moving Boundary Problems*. Claredon Press, Oxford (1984).

[5] **Tarzia, D.**, *A Bibliograghy on Free-Moving Boundary Problems for the Heat-Diffusion Equation. The Stefan and Related Problems*. MAT, Nro. 2, Universidad Austral – Rosario (1999), with 5869 references on the subject.

[6] **Martínez, V.; Marquina, A.; Donat, R.**, *Shooting Methods for one-dimensional Diffusion-Absorption Problems*. SIAM Journal on Numerical Analysis, 31 (1994), 2, págs. 572-89.

[7] **Hanselman, D. ; Littlefield, B.** *Mastering MATLAB 5. A Comprehensive Tutorial and Reference*. Prentice –Hall, U.S.A. (1998).

Mecánica Computacional Vol 20. pp. 608 — 614
Compilado por Fernando G. Flores
Córdoba, 30 de octubre - 2 de noviembre de 2001

OPTIMIZACIÓN DE LA RESISTENCIA INDUCIDA DE UN PLANEADOR DE LA CLASE 15 METROS POR APLICACIÓN DEL MÉTODO DE LOS PANELES

Gustavo Bono, Eugenio Bonvin
Universidad Nacional de Córdoba
Av. Vélez Sarsfield 1601, 5000 - Córdoba, Argentina

RESUMEN

Este informe muestra como es usado el código computacional del Método de los Paneles para lograr una mejora aerodinámica durante el diseño del ala. El esfuerzo fue hecho para reducir la resistencia inducida del ala y evitar la pérdida en la puntera.

ABSTRACT

This paper presents how to use a Panel Method computational code as a way to achieve an aerodynamic improvement during the wing design. The effort was made to reduce the wing induced drag and to avoid the wing tip stall.

INTRODUCCION

La optimización del rendimiento aerodinámico en los planeadores es un problema muy importante, dado que las performances [1] (máxima relación de planeo, mínima veloc. descenso y veloc. media cross country, etc.) dependen principalmente de la magnitud de la resistencia aerodinámica. A esta última la podemos dividir básicamente en 3 tipos: resistencia inducida, resistencia de perfil y resistencia parásita. En la fig. 1 se muestra el porcentaje de variación de la resistencia para un rango de coeficiente de sustentación (C_L) típico de operaciones.

Este estudio se centrará exclusivamente en la resistencia inducida, dado que esta es aproximadamente el 60 % de la resistencia total para altos C_L. Los veleros invierten un 50 % del tiempo de vuelo en las térmicas [2], es decir, durante el vuelo a baja velocidad (C_L entre 0.8 y 1.2). Este vuelo por lo general se desarrolla con deflexión de alerones, pero en este caso se analizará la condición de vuelo longitudinal, o sea el bastón de mando centrado.

De acuerdo a la teoría de la línea sustentadora de Prandtl [3] el mínimo valor de resistencia inducida se obtiene con una distribución de circulación Γ elíptica, este tipo de distribución puede originarse con un ala de planta alar elíptica sin alabeo o con una planta alar arbitraria y alabeo geométrico y/o aerodinámico. Por lo tanto el problema de la optimización se reduce a obtener una distribución de sustentación elíptica sobre el ala.

Actualmente en la industria aeronáutica el Método de los Paneles (MP) es usado rutinariamente durante la etapa de prediseño para el análisis en flujo subsónico de cuerpos de forma compleja, tales como configuraciones ala(W)-fuselaje(F)-empenajes(E). Esta técnica numérica simple y de probada capacidad, consiste en resolver el problema estacionario suponiendo un fluido sin viscosidad, incompresible e irrotacional, es decir, un problema de flujo potencial. No obstante, los resultados obtenidos con la teoría de flujo potencial son aplicables sin restricciones a numerosos casos reales