

## UN ESTIMADOR DE ERROR SIMPLE PARA TRIÁNGULOS LINEALES

**Claudio E. Jouglard**

Laboratorio de Mecánica Computacional. Departamento de Física.  
Facultad de Ingeniería. Universidad de Buenos Aires.  
Paseo Colón 850, (1063) Buenos Aires, Argentina  
e-mail: [jouglard@comnet.com.ar](mailto:jouglard@comnet.com.ar)

### RESUMEN

Se presenta un estimador de error para triángulos lineales basado en recuperación superconvergente de las derivadas en puntos medios de los lados. Se muestra la aplicación del estimador para el análisis adaptativo de problemas de tensiones. Este estimador está basado en promediar las fuerzas resultantes de integrar las tensiones que actúan en el lado común de dos elementos adyacentes. Esto facilita la consideración de fuerzas impuestas en el contorno y de discontinuidades de material entre elementos.

La interpolación lineal en cada elemento de los valores promediados nos permite obtener un campo mejorado de tensiones discontinuo entre elementos. Esta discontinuidad puede ser usada como un indicador visual de la calidad de la solución. Se presenta además una comparación con algunos estimadores de error bien conocidos.

### ABSTRACT

An error estimator for linear triangles based on superconvergent recovery of derivatives at mid-side locations is presented. We show the application of this error estimator to the adaptive analysis of stress problems. This estimator is based on the averaging of the resultant forces obtained by integration of the stresses acting on the common side of adjacent elements. This facilitates the consideration of prescribed forces on the boundary and material discontinuities between elements.

The linear interpolation in each element of the averaged quantities gives an enhanced stress field, which is discontinuous between elements. This discontinuity can be used as a visual indicator of the quality of the solution. Also, a comparison with some well-known error estimator is presented.

### INTRODUCCIÓN

Para obtener la respuesta de un modelo matemático de un problema físico mediante el método de elementos finitos debemos utilizar una discretización caracterizada por una malla de elementos finitos y el tipo de elemento utilizado. La respuesta numérica presenta tres tipos de errores: 1) los errores de modelización debidos a las simplificaciones asumidas en el modelo matemático, 2) los errores de discretización debidos a la aproximación del modelo matemático continuo por un modelo discreto y 3) los errores numéricos debidos a cálculos aproximados en el modelo discreto.

El objetivo de un análisis adaptativo es controlar el error de discretización incrementando el número de grados de libertad en las regiones donde un modelo previo de elementos finitos no alcanzó una precisión especificada. Luego, es esencial tener una medida cuantitativa de la calidad de la solución

aproximada y del refinamiento necesario de cada elemento. Por lo tanto un método adaptativo debe contar un esquema robusto de estimación de error que dé una buena indicación del error, aún en mallas gruesas ó poco densificadas, y además debe proveer una estimación asintóticamente exacta del error, esto es, la estimativa del error debe converger al valor verdadero del error a medida que los grados de libertad se incrementan adaptativamente.

Se presentará en este trabajo un estimador de error para problemas de tensiones basado en el postprocesamiento de los campos de deformaciones obtenidos de la solución original de elementos finitos. Estos campos de deformaciones, los cuales se esperan que sean más precisos que aquellos obtenidos por derivación directa de los campos de desplazamientos de cada elemento, pueden ser usados para aproximar a los campos de deformaciones exactos. La diferencia, medida en una norma adecuada entre estos dos campos, el original y el mejorado, nos servirá como indicador del error de discretización.

### ERROR DE DISCRETIZACIÓN Y MEDIDAS DE ERROR

Para problemas planos de elasticidad las ecuaciones diferenciales de equilibrio definidas sobre un dominio  $\Omega$  son

$$\mathbf{S}^T \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{b}$  es un vector de fuerzas de volumen y  $\mathbf{S}$  es un operador diferencial de primer orden que define las deformaciones  $\boldsymbol{\varepsilon}$  como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (2)$$

siendo  $\mathbf{u}$  el campo de desplazamientos. El vector de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se puede expresar como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (3)$$

donde  $\mathbf{D}$  es la matriz de constantes elásticas.

Las condiciones de contorno son

$$\begin{aligned} \mathbf{n}^T \boldsymbol{\sigma} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{en } \Gamma_t \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{en } \Gamma_u \end{aligned} \quad (4)$$

siendo  $\mathbf{n}$  el vector unitario normal al contorno y  $\Gamma_t, \Gamma_u$  son porciones del contorno donde se encuentran prescritas las tensiones ó los desplazamientos, respectivamente.

Consideremos una aproximación por elementos finitos  $\mathbf{u}_h$  a la solución  $\mathbf{u}$  de este problema. El error de discretización  $\mathbf{e}$  se define como la diferencia

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h \quad (5)$$

La especificación del error local en esta manera no es conveniente para identificar la calidad general de la solución aproximada. Por esta razón se introducen varias normas para medir el error. Una medida muy común para problemas de elasticidad es la norma de energía definida como

$$\|\mathbf{u}\| = \left( \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} d\Omega \right)^{1/2} = \left( \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{u})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{u}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (6)$$

luego el error en la norma de energía es

$$\|\mathbf{e}\| = \left( \int_{\Omega} (\mathbf{S}\mathbf{e})^T \mathbf{D} (\mathbf{S}\mathbf{e}) d\Omega \right)^{1/2} \quad (7)$$

Los desplazamientos aproximados  $\mathbf{u}_h$  dan lugar a un campo de deformaciones aproximado  $\boldsymbol{\varepsilon}_h$  como

$$\boldsymbol{\varepsilon}_h = \mathbf{S} \mathbf{u}_h \quad (8)$$

luego el error en la norma de energía se puede escribir como

$$\|e\| = \left( \int_{\Omega} (\varepsilon - \varepsilon_h)^T D (\varepsilon - \varepsilon_h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (9)$$

Se puede demostrar que si las soluciones discretas son interpoladas por funciones de forma conformes [1,2] se cumple que

$$\|e\|^2 = \|u\|^2 - \|u_h\|^2 \quad (10)$$

Debe notarse que esta cantidad puede ser evaluada mediante una suma sobre todos los elementos

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^{nel} (\|e_i\|)^2 \quad (11)$$

donde *nel* es el número total de elementos.

El error relativo en la norma de energía se define como

$$\eta = \frac{\|e\|}{\|u\|} \quad (12)$$

y un valor máximo de este error relativo es generalmente especificado como criterio límite del proceso adaptativo.

### ESTIMACIÓN DE ERROR MEDIANTE POSTPROCESAMIENTO

Las técnicas de postprocesamiento permiten construir campos suavizados de tensiones  $\sigma^*$  ó de deformaciones  $\varepsilon^*$  más precisos y cercanos a los exactos que los obtenidos por derivación directa de la solución original de elementos finitos. Luego podemos reemplazar los campos exactos por estos campos suavizados en las expresiones del error para obtener estimadores de error en la norma de energía como

$$\|e^*\| = \left( \int_{\Omega} (\varepsilon^* - \varepsilon_h)^T D (\varepsilon^* - \varepsilon_h) d\Omega \right)^{1/2} \quad (13)$$

Asumiendo que se hayan utilizado elementos finitos conformes, se puede obtener una estimativa de la norma en energía de la solución exacta como

$$\|u^*\|^2 = \|u_h\|^2 + \|e^*\|^2 \quad (14)$$

Luego se puede estimar el error relativo  $\eta^*$  como

$$\eta^* = \frac{\|e^*\|}{\|u^*\|} \quad (15)$$

La efectividad de un estimador de error se puede medir por un *índice de efectividad*  $\theta$  definido como

$$\theta = \frac{\|e^*\|}{\|e\|} \quad (16)$$

El estimador de error se dice *asintóticamente exacto* si  $\theta$  converge a la unidad cuando el error exacto converge a cero.

### POSTPROCESAMIENTO USANDO PROMEDIOS EN LADOS

Experimentos numéricos muestran que para algunas clases de problemas los desplazamientos nodales son más precisos que en otros puntos de la malla, pudiendo incluso ser exactos. Esta propiedad suele designarse como *superconvergencia* nodal de los desplazamientos [3]. Usando expansiones en series

de Taylor es posible encontrar puntos de superconvergencia para las tensiones en el interior ó en los contornos del elemento [3,4]. Luego es posible obtener un campo superconvergente de tensiones mediante una interpolación de los valores en los puntos de superconvergencia.

En particular para elementos lineales las derivadas promediadas en los puntos medios de los lados son superconvergentes [5], por lo tanto es posible esperar un buen comportamiento de un estimador de error basado en la interpolación de valores promediados en los puntos medios de los lados.

Luego se propone como estimador del error una aproximación lineal  $\epsilon^*$  de los campos de deformaciones obtenidos por interpolación de los valores promediados  $\epsilon_i^*$  en los puntos medios de cada lado  $i$ , como

$$\epsilon^* = \sum_{i=1}^3 M_i \epsilon_i^* \tag{17}$$

donde las funciones  $M_i$  son polinomios lineales [2] definidas en función de coordenadas de área  $\xi_i$

$$M_i = 1 - 2\xi_i \tag{18}$$

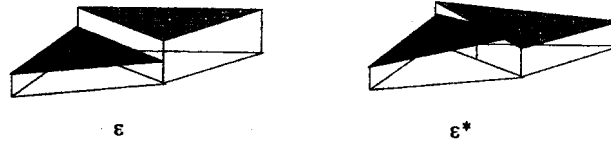


Figura 2: Campo de deformaciones original y suavizado.

Nótese que para problemas de estados planos deben promediarse tres componentes por lado  $\epsilon_x^*$ ,  $\epsilon_y^*$ ,  $\gamma_{xy}^*$  entre elementos adyacentes, y para los lados de contorno adoptamos directamente los valores del elemento  $\epsilon_h$ . A este estimador lo llamaremos *estimador por promedio simple de lado*.

Este estimador presenta dos dificultades, por un lado no puede contemplar la discontinuidad de las deformaciones entre dos elementos que presenten cambios abruptos de las propiedades de los materiales ó del espesor, y por otro lado no permite considerar condiciones naturales de contorno donde existan valores impuestos de las tensiones.

Para solucionar estos problemas es conveniente usar un sistema de coordenadas local en cada lado, definiendo tensiones según las direcciones normal y tangencial de cada lado.

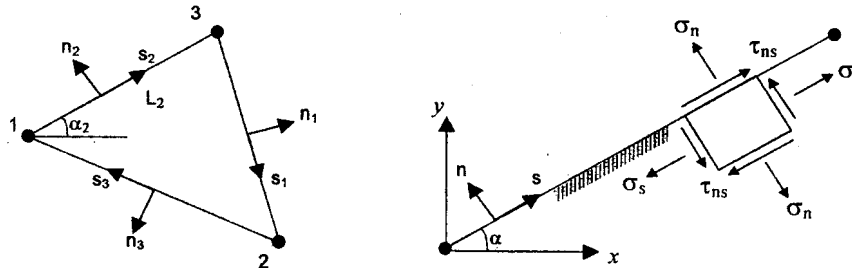


Figura 1: Tensiones normal y tangencial en cada lado

Las deformaciones se pueden expresar en función de los desplazamientos de cada lado como

$$\epsilon_s = \frac{\partial u_s}{\partial s}, \quad \epsilon_n = \frac{\partial v_n}{\partial n}, \quad \gamma_{ns} = \frac{\partial u_s}{\partial n} + \frac{\partial v_n}{\partial s} \tag{19}$$

donde  $u_s$ ,  $v_n$  son desplazamientos en las direcciones tangencial y normal a cada lado, respectivamente.

Notese que los desplazamientos tangenciales  $u_s$  son continuos en cada lado del elemento y por lo tanto deben ser continuas las derivadas tangenciales de los desplazamientos tangentes, esto es

$$\left. \frac{\partial u_{s_i}}{\partial s} \right|^{e_1} = \left. \frac{\partial u_{s_i}}{\partial s} \right|^{e_2} \quad (20)$$

donde  $e_1, e_2$  son elementos adyacentes. Notando por la ec.(19) que estas derivadas son las deformaciones longitudinales del lado, esto implica que para elementos adyacentes deben ser continuas las deformaciones  $\varepsilon_s$ . Usando una aproximación por elementos finitos, los desplazamientos tangenciales  $u_s^h$  también son continuos entre elementos por lo que la deformación  $\varepsilon_s^h$  también es continua. Luego adoptamos como valor en el punto medio del lado

$$\varepsilon_{si}^* = \left. \frac{\partial u_{s_i}^h}{\partial s} \right|^{e_1} = \left. \frac{\partial u_{s_i}^h}{\partial s} \right|^{e_2} \quad (20)$$

Obsérvese, que siendo este valor igual en cada elemento no es necesario realizar ningún promedio. Las fuerzas resultantes de las tensiones normales y tangenciales actuando en cada lado del elemento son

$$F_{ni} = \int_{L_i} \sigma_n t ds, \quad F_{si} = \int_{L_i} \tau_{ns} t ds \quad (21)$$

siendo  $F_{ni}, F_{si}$  las fuerzas totales normal y tangencial actuando en cada lado  $i$ , y  $t$  es el espesor del elemento. Si hubiera un cambio brusco de las propiedades del material ó del espesor entre elementos adyacentes las tensiones normales y tangenciales dejan de ser continuas entre elementos, pero por equilibrio deben ser iguales las fuerzas resultantes de las tensiones actuando en cada lado, esto es

$$F_{ni}|^{e_1} = F_{ni}|^{e_2} \quad F_{si}|^{e_1} = F_{si}|^{e_2} \quad (22)$$

Si aproximamos las integrales en (21) mediante un punto de integración, lo cual es exacto para una variación lineal del integrando, tenemos

$$F_{ni}^*|^{e_1} = L_i \sigma_{ni}^h |^{e_1}, \quad F_{si}^*|^{e_1} = L_i \tau_{nsi}^h |^{e_1} \quad (23)$$

donde  $\sigma_{ni}^h, \tau_{nsi}^h$  son los valores en los puntos medios de los lados de la solución de elementos finitos. Luego es posible obtener una aproximación equilibrada en los lados promediando las fuerzas como

$$F_{ni}^* = \frac{(F_{ni}^*|^{e_1} + F_{ni}^*|^{e_2})}{2}, \quad F_{si}^* = \frac{(F_{si}^*|^{e_1} + F_{si}^*|^{e_2})}{2} \quad (24)$$

Si el lado del elemento estuviera sobre el contorno entonces obtenemos las fuerzas integrando las tensiones  $t_n, t_s$  impuestas en el contorno, esto es

$$F_{ni}^* = \int_{L_i} t_n t ds, \quad F_{si}^* = \int_{L_i} t_s t ds \quad (25)$$

Luego es posible obtener valores medios de las tensiones a partir de estas fuerzas en cada elemento

$$\sigma_{ni}^*|^{e_1} = \frac{F_{ni}^*}{L_i t_i^{e_1}}, \quad \tau_{nsi}^*|^{e_1} = \frac{F_{si}^*}{L_i t_i^{e_1}} \quad (26)$$

Asumiendo deformaciones elásticas pequeñas, las deformaciones se pueden expresar como

$$\varepsilon_n = \frac{1-\nu^2}{E} \sigma_n - \nu \varepsilon_s, \quad \gamma_{ns} = \frac{2(1+\nu)}{E} \tau_{ns} \quad (27)$$

Por lo tanto, una vez conocidos los valores promedios  $\sigma_{ni}^*, \tau_{nsi}^*$  es posible calcular las deformaciones

$\epsilon_{ni}^*$ ,  $\gamma_{nxi}^*$  en los puntos medios de los lados y junto con  $\epsilon_{ni}^*$  podemos definir el tensor de tensiones en el punto medio de cada lado. Interpolando estas deformaciones en cada elemento obtenemos el campo de deformaciones suavizado que nos permitirá estimar el error. A este estimador lo llamaremos *estimador por flujo promedio de lado*.

### CARGAS CONCENTRADAS Y REACCIONES DE VÍNCULO

Si existieran cargas concentradas en los nodos del contorno el procedimiento anterior no las tendría en cuenta ya que solamente se consideran las cargas distribuidas sobre los lados de contorno. Para mejorar la representación del campo de tensiones en las proximidades de las cargas concentradas, sustituimos dicha carga por una carga distribuida triangular equivalente sobre los lados adyacentes a la carga

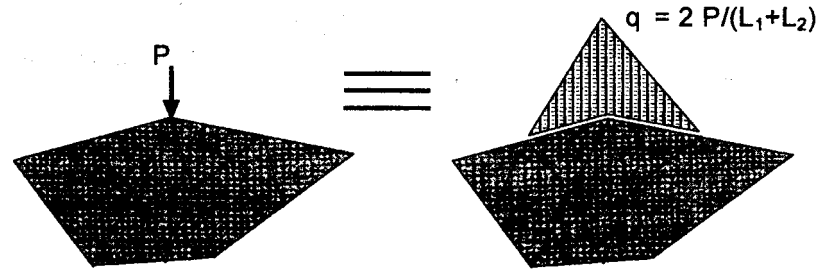


Figura 2: Distribución equivalente de tensiones para cargas concentradas

En las regiones del contorno donde los desplazamientos están fijados utilizamos una distribución de tensiones equivalentes para las fuerzas de reacción concentradas en los nodos. Estas fuerzas concentradas son tratadas en forma similar al caso anterior. En algunas situaciones físicas estas cargas equivalentes deben ser consideradas actuando sobre un solo lado debido a las condiciones de contorno impuestas. Luego es necesario definir direcciones normales y tangenciales al contorno en el nodo, para ello usamos un procedimiento simplificado del propuesto por Carey et al.[5] y Mizukami [6].

### EJEMPLO NUMÉRICO

Para estudiar el comportamiento del estimador durante su empleo en el análisis adaptativo de problemas de estados planos de tensiones consideramos una ménsula corta, con módulos de Poisson y Young de 0.3 y 1.0, respectivamente, cuya geometría, dimensiones, cargas y malla inicial se muestran en la fig. 3.

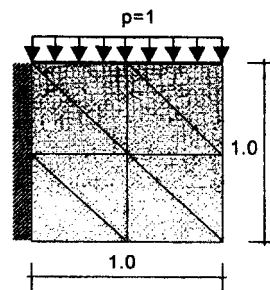


Figura 3: Ménsula corta en estado plano de tensiones (espesor  $t=1.0$ )

Se ha tomado como solución de referencia la dada por Ainsworth et. al.[7] y se ha impuesto una tolerancia del 5% para el error relativo estimado en la norma de energía. Se comparan tres

estimadores de error usados para guiar el refinamiento adaptativo: 1) *estimador por flujo promedio de lado* (SFA), 2) *estimador por promedio simple de lado* (SSA) y 3) *estimador por recuperación superconvergente en una parcela* (SPR) en la versión original propuesta por Zienkiewicz y Zhu [8]. En la figura 4 se observan las mallas finales alcanzadas mediante el uso de los tres estimadores.

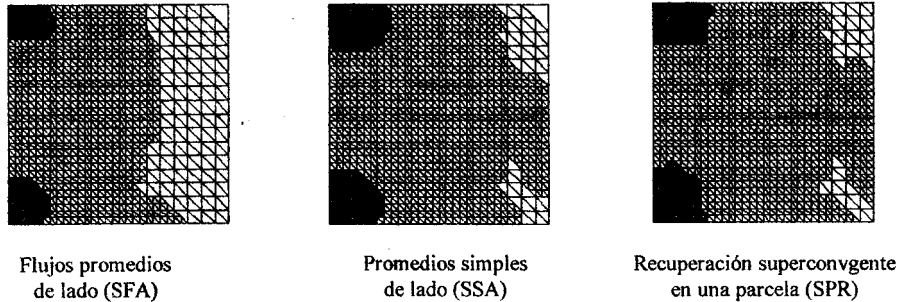


Figura 4: Mallas adaptativas finales para error relativo  $\eta^* = 5\%$  en norma de energía.

Se puede observar que todos los estimadores concentran más elementos en las esquinas donde existe un fuerte gradiente de tensiones, pero los estimadores por promedio simple de lado y por recuperación superconvergente también concentran elementos cerca del contorno innecesariamente. En la tabla I se muestran los grados de libertad (GDL), los errores finales alcanzados y los índices de efectividad para los tres estimadores de error.

Tabla I: Comparación de errores en la malla final para error relativo  $\eta^* = 5\%$  en norma de energía.

Estimador	GDL	$\ u_h\ ^2$	$\ e^*\ ^2$	$\ e_{ex}\ ^2$	$\theta$	$\eta^* \%$	$\eta_{ex} \%$
SFA	2358	1.89856	0.004618	0.005135	0.95	4.93	5.19
SPR	3156	1.89965	0.003376	0.004047	0.91	4.21	4.61
SSA	3098	1.89422	0.002696	0.009475	0.53	3.77	7.05

podemos observar en la tabla I que el estimador por promedios de flujo (SFA) alcanza el error relativo buscado con el menor número de grados de libertad. También este estimador da el mejor índice de efectividad y podemos observar que para el estimador por promedio simple (SSA) este índice está bastante lejos de la unidad. Si analizamos la evolución del índice de efectividad con los refinamientos sucesivos de la malla se obtiene el gráfico de la figura 5.

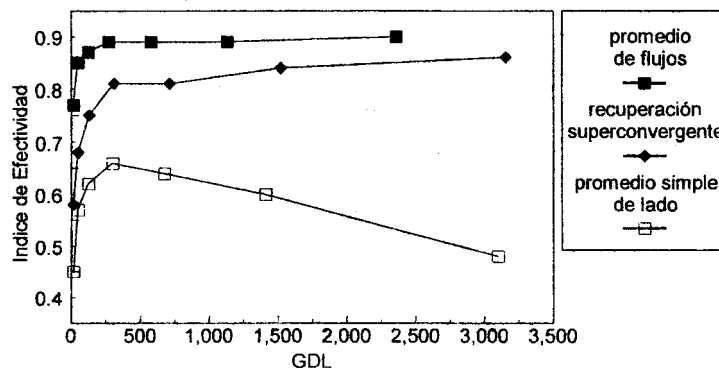


Figura 5: Comparación de la evolución del índice de efectividad.

Se puede observar que el estimador por promedio simple de lado pierde su exactitud asintótica y diverge con el aumento de refinamiento. Este mismo fenómeno ha sido notado en algunas mallas por Babuska y Rodriguez [9] para un estimador basado en proyección de tensiones desarrollado por Zienkiewicz y Zhu [10]. Puede notarse, sin embargo, que no hay gran diferencia en la malla final en comparación con la obtenida usando el estimador por recuperación superconvergente. Por otro lado, el estimador por flujo promedio de lado predice una mejor distribución de los errores locales lo cual resulta en una reducción del número de elementos necesarios para alcanzar la precisión deseada. Esto se debe, fundamentalmente, a la consideración de las tensiones externas en el estimador.

### CONCLUSIONES

Se ha presentado un estimador de error para triángulos basado en el promedio de los flujos de lado. Este estimador no requiere ningún tratamiento especial en los casos de discontinuidad de propiedades entre elementos y además permite incorporar de manera simple las tensiones impuestas en el contorno. Como surge de la comparación con otros estimadores, la consideración de estas tensiones externas parece ser un factor indispensable para obtener un estimador robusto y de precisión.

### REFERENCIAS

- [1] Zienkiewicz, O. C., y Taylor, R. L., *The Finite Element Method*, 4° Ed., Vol. 1, McGraw-Hill, New York, 1978.
- [2] Hughes, T. J. R., *The Finite Element Method*, Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [3] Barlow, J., *Optimal Stress Locations in Finite Element Models*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 10, 1976, págs. 243-251.
- [4] Mackinnon, R. J., y Carey, G. F., *Superconvergent Derivatives: A Taylor Series Analysis*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 28, 1989, págs. 489-509.
- [5] Carey, G. F., Chow, S. S. y Seager M. K., *Approximate boundary-flux calculations*, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 50, 1985, págs. 107-120.
- [6] Mizukami A., *A Mixed Finite Element Method for Boundary Flux Computation*, Comput. Meths. Appl. Mech. Eng., Vol. 57, 1986, págs. 239-243.
- [7] Ainsworth M., Zhu J. Z., Craig A. W. y Zienkiewicz O. C., *Analysis of the Zienkiewicz-Zhu A-Posteriori Error Estimator in the Finite Element Method*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 28, 1989, págs. 2161-2174.
- [8] Zienkiewicz O. C. y Zhu J. Z., *The Superconvergent Patch Recovery and A Posteriori Error Estimates. Part 1: The Recovery Technique. Part 2: Error Estimates and Adaptivity*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 33, 1992, págs. 1331-1364 y págs. 1365-1382.
- [9] Babuska I. y Rodriguez R., *The Problem of the Selection of an A Posteriori Error Indicator Based on Smoothing Techniques*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 36, 1993, págs. 539-567.
- [10] Zienkiewicz O. C. y Zhu J. Z., *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*, Int. J. Numer. Methods Eng., Vol. 24, 1987, págs. 337-357.