

**MODELO TRANSITORIO DE TENSIONES DE CORTE
PARA EL ANÁLISIS DEL GOLPE DE ARIETE EN RÉGIMEN LAMINAR**

Ricardo A. Prado
Depto. de Mecánica Aplicada, Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional del Comahue
calle Buenos Aires 1400, (8300) Neuquén - Argentina

Axel E. Larreteguy
Grupo Termohidráulica, UAIN, Centro Atómico Bariloche, CNEA
Instituto Balseiro, CNEA/Universidad Nacional de Cuyo
(8400) S.C. de Bariloche - Argentina

RESUMEN

Se presenta un modelo simple para el análisis del problema de golpe de ariete bajo condiciones de régimen laminar. Se propone un procedimiento multiparamétrico para la descripción de la tensión de corte en el fluido, como función de la velocidad media local del flujo y de "velocidades" de mayor orden, las cuales verifican la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento axial y ecuaciones adicionales de momentos de la cantidad de movimiento de diferentes órdenes. Se considera el problema de golpe de ariete en una tubería rígida de sección constante, para el cual se cuenta con resultados experimentales. Se verifica que el modelo propuesto es muy superior al modelo cuasi-estacionario de fricción generalmente utilizado, obteniéndose resultados similares a modelos más complejos.

ABSTRACT

A simple model is presented in order to solve the laminar water-hammer problem for a rigid pipe with constant circular cross section. The proposed model represents the fluid shear stress as a function of the flow mean velocity and high order "velocities" that verify the linear and angular momentum equations, the latter for different orders. This model shows a better agreement than the quasi-stationary model, which is generally used, when compared with an experimental test. Moreover, the results of the present model are similar to those given by more complex models.

INTRODUCCIÓN

Durante la resolución de un problema de golpe de ariete es común representar la variación no estacionaria de la tensión de corte sobre la pared interna de la tubería mediante un modelo que la considera proporcional a la velocidad media local, manteniendo la relación funcional observada bajo condiciones estacionarias (es decir, asumiendo condiciones cuasi-permanentes). Sin embargo, debido a la presencia de trenes de ondas de presión que se desplazan a lo largo de la tubería, los perfiles instantáneos de velocidad presentan una configuración diferente a la observada bajo condiciones estacionarias. Esta discrepancia se hace más marcada hacia la pared de la tubería, donde se observa una distribución de velocidades que no necesariamente se encuentra en fase con el movimiento principal, comportamiento conocido como *efecto anular de Richardson debido a la presencia de un gradiente de presiones fluctuante* [1].

Esta distribución instantánea de velocidades origina entonces un estado tensional de corte sobre la pared de la tubería cuya variación temporal no guarda relación de semejanza con la variación generalmente propuesta bajo condiciones de régimen cuasi-permanente. En los casos en que la fricción juega un papel importante, los resultados obtenidos por el modelo cuasipermanente se alejan mucho de la realidad. Por ello, en este trabajo se propone una metodología para obtener un modelo más realista para las tensiones de corte no estacionarias dado que incorpora parámetros adicionales a la propia velocidad media local. Con esta propuesta se pretende lograr una mejor representación de las fluctuaciones de presión y velocidad media durante el transitorio, bajo condiciones de régimen laminar.

siguiendo el procedimiento comúnmente aplicado, se plantean las ecuaciones de conservación, las cuales son aproximadas bajo consideraciones propias del problema de golpe de ariete. Al sistema de ecuaciones obtenido se aplica el método de las características, y las ecuaciones diferenciales resultantes se discretizan mediante una formulación en diferencias finitas. Como un caso de prueba se presenta el estudio del transitorio en un problema del tipo tanque-tubería-válvula de cierre instantáneo. Los resultados para la variación espacio-temporal de la presión, velocidad media y tensión de corte sobre la pared son comparados con los obtenidos mediante otro modelo más complejo [2] y con resultados experimentales [2], lográndose mejoras notables con respecto al modelo quasi-permanente.

ECUACIONES DEL MOVIMIENTO

Ecuaciones de gobierno

Las ecuaciones que gobiernan el problema del golpe de ariete en una cañería de eje horizontal z y sección transversal constante de radio R , resultan de aplicar a un segmento del tubo las ecuaciones diferenciales para la conservación de la masa y la conservación de la cantidad de movimiento lineal,

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div} \vec{V} = 0 \quad (1.a)$$

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} + \vec{\nabla} p - \vec{\nabla} : [\tau] = 0 \quad (1.b)$$

Estas ecuaciones son integradas sobre la sección transversal del tubo para obtener un sistema de ecuaciones diferenciales *aproximadas*, en las variables dependientes presión estática $p(z,t)$ y velocidad media $\bar{V}(z,t)$,

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = 0 \quad (2.a)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - S = 0 \quad (2.b)$$

Este sistema ha quedado así reducido por la aplicación de las siguientes consideraciones:

- 1.- el flujo es únicamente axial, $\vec{V} = \vec{V}(r, z, t) = \{0, 0, v(r, z, t)\}$ (3)
- 2.- la presión es constante sobre la sección, $p = p(z, t)$
- se desprecia \bar{V} frente a la velocidad del sonido, a , en los términos convectivos
- se desprecian los términos de variación de la tensión viscosa normal, τ_{zz} ,
- S incluye el término de fricción, generalmente mediante un modelo quasi-estacionario en el que se adopta la misma expresión que para un problema estacionario, o sea

$$S = -f \frac{|\bar{V}|\bar{V}}{4R} \quad (4)$$

donde f denota al coeficiente de fricción de Darcy, $f = 8\tau_w / \rho \bar{V}^2$, y donde la velocidad media queda definida como

$$\bar{V} = \bar{V}(z, t) = \frac{\int_A v(r, z, t) dA}{\int_A dA} = \frac{\int_0^R v r dr}{\int_0^R r dr} = \frac{\int_0^1 v \bar{r} d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r} d\bar{r}} = 2 \int_0^1 v(\bar{r}, z, t) \bar{r} d\bar{r} \quad (5)$$

entonces $\bar{r} = r/R$. En régimen laminar permanente, $f = 32 \nu / \bar{V} R$. Entonces

$$S = 4\mu \bar{V} / R \quad (6)$$

$$S = -8 \nu \bar{V} / R^2 \quad (7)$$

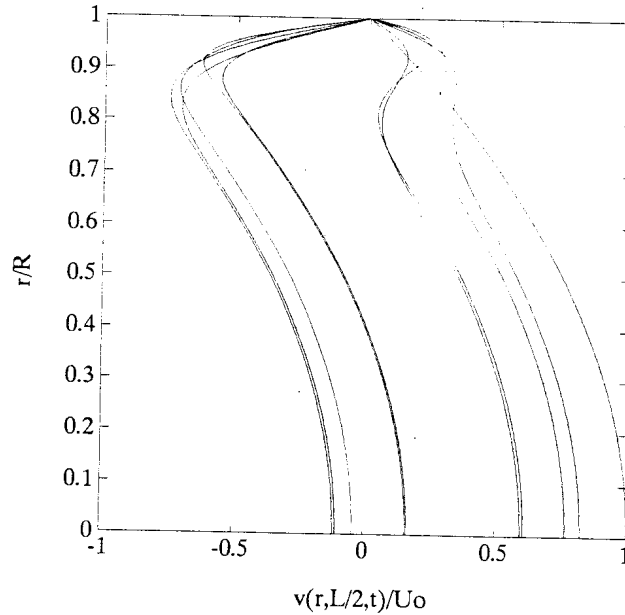


Figura 1: Perfiles instantáneos de velocidad a mitad de la tubería. $U_0 = v_{HP}(0)$

Consecuentemente, definidos la geometría de la tubería y el fluido circulante por la misma, resulta $S = \overline{S(\bar{V})}$, correspondiendo entonces a un modelo cuasi-estacionario de un único parámetro.

Modelo multiparamétrico para la tensión de corte

El modelo propuesto hace uso de las mismas consideraciones previamente expuestas, con excepción de la indicada por (e.). En su lugar se propone representar a las tensiones de corte como una función de la velocidad media y de parámetros adicionales, con la finalidad de aproximar de una manera más realista la variación no estacionaria de estas tensiones viscosas.

Este nuevo modelo propone representar los perfiles instantáneos de velocidades axiales, $v = v(r, z, t)$, mediante un polinomio con potencias pares en la posición radial adimensional, \bar{r} , dado que el flujo tubular instantáneo es considerado axialsimétrico (Figura 1). Es decir,

$$v(\bar{r}, z, t) = \alpha(z, t)[1 - \bar{r}^2] + \beta(z, t)[1 - \bar{r}^b] + \gamma(z, t)[1 - \bar{r}^c] + \delta(z, t)[1 - \bar{r}^d] + \dots \quad 0 \leq \bar{r} \leq 1. \quad (8)$$

Esta expresión verifica la condición de contorno (no deslizamiento) sobre la pared de la tubería, $v(1, z, t) = 0$. Con el fin de que esta formulación se ajuste a la variación parabólica de velocidades correspondiente a la condición laminar estacionaria, conocida como flujo tubular de Hagen-Poiseuille, representado por

$$v_{HP}(\bar{r}) = 2\bar{V}(1 - \bar{r}^2) \quad (9)$$

es que se adopta el valor 2 para el primer exponente de (8). Los restantes exponentes (b, c, d, ...) son propuestos de manera de ajustar los resultados de perfiles transitorios de velocidad axial que se muestran en las referencias [3,4]. En estos trabajos se ha realizado una discretización bidimensional del problema en diferencias finitas y se han obtenido los perfiles transitorios de velocidades ante el paso de ondas de presión.

Definidos de esta manera (a, b, c, d, ...), los coeficientes ($\alpha(z, t)$, $\beta(z, t)$, $\gamma(z, t)$, $\delta(z, t)$, ...) resultan determinados requiriendo que la integración del perfil instantáneo de velocidades axiales verifique las siguientes definiciones para las velocidades de órdenes i ,

$$V_i = V_i(z, t) = \frac{\int_A v(r, z, t) \cdot r^i \cdot dA}{\int_A r^i \cdot dA} = \frac{\int_0^R v r^{i+1} dr}{\int_0^R r^{i+1} dr} = \frac{\int_0^1 v \bar{r}^{i+1} d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r}^{i+1} d\bar{r}} = (i+2) \int_0^1 v(\bar{r}, z, t) \bar{r}^{i+1} d\bar{r} \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (10)$$

Así, si ($i = 0$), resulta $V_0(z, t) = \bar{V}(z, t)$. Entonces,

$$\begin{aligned} \alpha(z, t) &= F_1[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \\ \beta(z, t) &= F_2[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \\ \gamma(z, t) &= F_3[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \\ \delta(z, t) &= F_4[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \quad \text{etc.} \end{aligned} \quad (11)$$

A partir del perfil instantáneo de velocidades propuesto, se determina la expresión de la tensión de corte para un fluido newtoniano de viscosidad absoluta μ , moviéndose en régimen laminar, resultando

$$\tau(r, z, t) = -\mu \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{\mu}{R} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} = \frac{\mu}{R} [2\alpha \bar{r} + \beta b \bar{r}^{b-1} + \gamma c \bar{r}^{c-1} + \delta d \bar{r}^{d-1} + \dots] \quad (12)$$

y, sobre la pared

$$\tau_w(z, t) = \tau(1, z, t) = -\frac{\mu}{R} \left. \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \right|_{\bar{r}=1} = \frac{\mu}{R} [2\alpha + \beta b + \gamma c + \delta d + \dots] = F[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots] \quad (13)$$

siendo ésta una formulación aproximada de dicha tensión la cual no es ya sólo función de la velocidad media, sino un modelo multiparamétrico en función de velocidades locales, que adicionadas a la velocidad media local, modelan mejor el perfil instantáneo de velocidades dentro de la tubería. Consecuentemente, este modelo representaría con mejor precisión la variación no estacionaria de la tensión de corte.

Ecuaciones de variación para las velocidades de orden i

Bajo las consideraciones (a.-d.), la ecuación para la conservación de la cantidad de movimiento axial del flujo laminar de un fluido newtoniano, a lo largo de una tubería horizontal de radio constante, se reduce a

$$\rho \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial z} - \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] = 0 \quad (14)$$

Multiplicando la expresión anterior por r^i , e integrando sobre el área de pasaje de la tubería

$$\int_A \left[\frac{\partial v}{\partial t} r^i + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} r^i - v \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) \right] r^i \right] dA = \int_A 0 dA = 0 \quad (15)$$

Así, bajo las consideraciones establecidas con anterioridad,

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\int_A v r^i dA \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \int_A r^i dA - v \int_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) r^i dA = 0 \quad (16)$$

y dividiendo (16) por $\int_A r^i dA$, resulta

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\int_A v r^i dA}{\int_A r^i dA} \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - v \frac{\int_A \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \cdot \frac{\partial v}{\partial r} \right) r^i dA}{\int_A r^i dA} = 0 \quad (17)$$

ecuación que se simplifica a

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - S_i = 0 \quad (18)$$

introduciendo la siguiente definición

$$S_i = v \frac{\int_A \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) r^{i+1} dA}{\int_A r^i dA} = v \frac{\int_0^R \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) r^i dr}{\int_0^R r^{i+1} dr} = \frac{v}{R^2} \frac{\int_0^1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \right) \bar{r}^i d\bar{r}}{\int_0^1 \bar{r}^{i+1} d\bar{r}} = \frac{(i+2)v}{R^2} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \bar{r}} \left(\bar{r} \frac{\partial v}{\partial \bar{r}} \right) \bar{r}^i d\bar{r} \quad (19)$$

$$(i = 0, 1, 2, 3, \dots)$$

Finalmente, se obtiene un sistema de ecuaciones diferenciales a derivadas parciales de la forma

$$\frac{\partial p}{\partial t} + \rho a^2 \frac{\partial \bar{V}}{\partial z} = 0 \quad (20.a)$$

$$\frac{\partial \bar{V}}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - S_0 = 0 \quad (i = 0) \quad (20.b)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - S_i = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (20.c)$$

Dado que en el caso no permanente se asume la representación polinomial (8) con coeficientes (11) para el perfil de velocidades instantáneas, resulta, por (19),

$$S_0(z, t) = G_0[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots],$$

$$S_1(z, t) = G_1[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \quad (21)$$

$$S_2(z, t) = G_2[\bar{V}(z, t), V_1(z, t), V_2(z, t), V_3(z, t), \dots], \text{ etc}$$

expresiones que pueden considerarse como términos "fuente".

Solución por el método de las características

Siguiendo la Referencia [5], las ecuaciones (20) se combinan mediante multiplicadores de Lagrange que transforman dichas ecuaciones diferenciales parciales en ecuaciones diferenciales totales utilizando las direcciones características. Así, el sistema (20) se reescribe como

$$[I] \frac{\partial}{\partial t} \begin{Bmatrix} p \\ \bar{V} \\ V_i \end{Bmatrix} + [B] \frac{\partial}{\partial z} \begin{Bmatrix} p \\ \bar{V} \\ V_i \end{Bmatrix} = \{E\} \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (22)$$

siendo [I] la matriz identidad y $[B] = \begin{bmatrix} \rho a^2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1/\rho & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1/\rho & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$

Las pendientes de las direcciones características, $\zeta = dz/dt$, se determinan, [6], haciendo $\det\{[B] - [I]\zeta\} = 0$, resultando $\zeta_{1,2} = \pm a$ y $\zeta_{3,\dots} = 0$ como raíces de la ecuación característica. Finalmente, en lugar del sistema (20), se tiene el sistema

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = S_0(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = +a \quad (23.a)$$

$$\frac{d\bar{V}}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = S_0(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = -a \quad (23.b)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} = S_i(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (23.c)$$

Eliminando el término del gradiente de presión $\frac{\partial p}{\partial z}$ de las ecuaciones (23.c) utilizando (20.b), resulta

$$\frac{d\bar{V}}{dt} + \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = S_0(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = +a \quad (24.a)$$

$$\frac{d\bar{V}}{dt} - \frac{1}{\rho a} \frac{dp}{dt} = S_0(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = -a \quad (24.b)$$

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} - \frac{\partial \bar{V}}{\partial t} = S_i(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) - S_0(\bar{V}, V_1, V_2, V_3, \dots) \quad \frac{dz}{dt} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (24.c)$$

Sistema que es resuelto mediante la aplicación del método de las diferencias finitas.

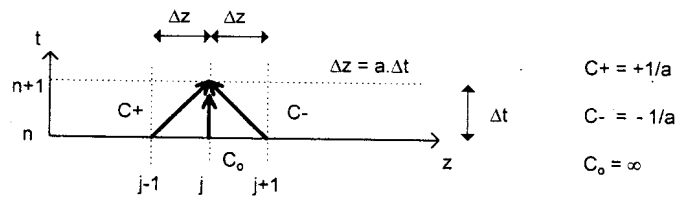


Figura 2: Esquema del malla espacio-temporal. $C = \zeta^{-1}$

MODELO NUMERICO

Discretizando el sistema de ecuaciones (24) utilizando diferencias adelantadas en el tiempo y recordando que las dos direcciones características definen el esquema espacial (Figura 2) para las derivadas totales, resultan

$$\bar{V}_j^{n+1} - \bar{V}_{j-1}^n + \frac{1}{\rho a} (p_j^{n+1} - p_{j-1}^n) = S_0|_{j-1}^n \cdot \Delta t \quad (25.a)$$

$$\bar{V}_j^{n+1} - \bar{V}_{j+1}^n - \frac{1}{\rho a} (p_j^{n+1} - p_{j+1}^n) = S_0|_{j+1}^n \cdot \Delta t \quad (25.b)$$

$$V_i|_j^{n+1} - V_i|_j^n - (\bar{V}_j^{n+1} - \bar{V}_j^n) = (S_i|_j^n - S_0|_j^n) \cdot \Delta t \quad (i = 1, 2, 3, \dots) \quad (25.c)$$

con las siguientes condiciones auxiliares:

Condiciones iniciales: Flujo tubular estacionario de Hagen-Poiseuille ($Re = 2\bar{V}R/\nu < 2100$),

$$p_{man}(z) = \frac{dp}{dz}(z-L) \quad \text{siendo} \quad \frac{dp}{dz} = -8\mu\bar{V}/R^2 \quad (26)$$

$$V_i(z,0) = \bar{V}_{HP} / (4+i) \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad (27)$$

* Condiciones de contorno: Para el caso tanque-tubería-válvula de cierre instantáneo (Figura 3).

$$V_i(L, t) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, 3, \dots) \quad t > 0 \quad (28)$$

$$p(0, t) - \rho g H + 0,5\rho[1 - K_s]\bar{V}(0, t) = 0 \quad \text{si } \bar{V}(0, t) > 0 \quad t > 0 \quad (29.a)$$

$$p(0, t) - \rho g H + 0,5\rho[1 - K_e]\bar{V}(0, t) = 0 \quad \text{si } \bar{V}(0, t) < 0 \quad t > 0 \quad (29.b)$$

$$H = \frac{(1 + K_s)}{2g} \bar{V}_{HP}^2 + \frac{8vL}{gR^2} \bar{V}_{HP} = \text{cte} \quad \forall t \quad (29.c)$$

donde K_e y K_s son, respectivamente, los coeficientes de pérdida para entrada/salida del fluido hacia/desde el tanque, y H denota la altura del fluido en el tanque

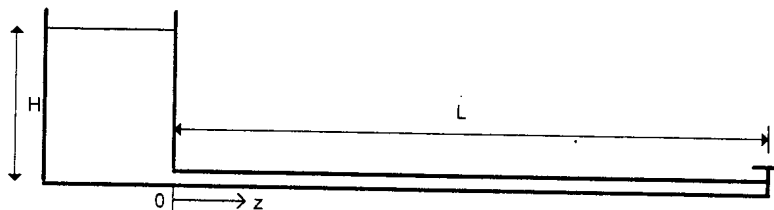


Figura 3: Esquema del conjunto tanque-tubería-válvula

EJEMPLO Y DISCUSION DE LOS RESULTADOS

Como caso de aplicación del presente modelo se utiliza el ejemplo presentado en la Referencia [2], correspondiente al experimento de E.L. Holmboe y W.T. Rouleau, donde $L = 36$ m, $R = 0,0127$ m, $v = 39,67 \cdot 10^{-6}$ m²/s (a 27°C), $a = 1324,4$ m/s y se consideran los valores $K_e = 1$ y $K_s = 0,5$ para los coeficientes de pérdida del tanque. La discretización de la tubería se realiza considerando 36 elementos de longitud constante $\Delta z = 1$ m, resultando entonces un paso temporal $\Delta t = \Delta z/a$.

Modelo de tres parámetros (m3p)

En este modelo se proponen, para (8), los exponentes $a = 2$, $b = 8$ y $c = 12$, resultando

$$\tau_w = \frac{\mu}{R} (280\bar{V} - 825V_1 + 576V_2) \quad (30.a)$$

$$S_0 = \frac{v}{R^2} 2(-280\bar{V} + 825V_1 - 576V_2) \quad (30.b)$$

$$S_1 = \frac{v}{R^2} \frac{4}{39} (-8050\bar{V} + 23925V_1 - 16752V_2) \quad (30.c)$$

$$S_2 = \frac{v}{R^2} 4(-278\bar{V} - 825V_1 - 576V_2) \quad (30.d)$$

Modelo de cuatro parámetros (m4p)

En este modelo se proponen los exponentes $a = 2$, $b = 6$, $c = 10$ y $d = 12$, resultando

$$\tau_w = \frac{\mu}{R} \frac{1}{2} (-1792\bar{V} + 8775V_1 - 13440V_2 + 6545V_3) \quad (31.a)$$

$$S_0 = \frac{v}{R^2} (1792\bar{V} - 8775V_1 + 13440V_2 - 6545V_3) \quad (31.b)$$

$$S_1 = \frac{v}{R^2} \frac{3}{2002} (1808128\bar{V} - 8818875V_1 + 13489280V_2 - 6564635V_3) \quad (31.c)$$

$$S_2 = \frac{v}{R^2} 2(1796\bar{V} - 8775V_1 + 13440V_2 - 6545V_3) \quad (31.d)$$

$$S_3 = \frac{v}{R^2} \frac{5}{2}(1792\bar{V} - 8769V_1 + 13440V_2 - 6545V_3) \quad (31.e)$$

Los resultados obtenidos para las fluctuaciones locales de la presión (sobre la válvula y a la mitad de la longitud de la tubería) mediante los presentes modelos de tres y cuatro parámetros son comparados con los resultados experimentales (**exp**), con los correspondientes al modelo propuesto por Zielke [2] (**mZ**) y con los obtenidos considerando que la tensión de corte varía según el modelo estacionario, es decir, con el modelo de un parámetro (**m1p**). El mencionado modelo de Zielke relaciona la tensión de corte sobre la pared, en régimen laminar, con la velocidad media instantánea más términos que incluyen la historia de la variación temporal de dicha velocidad, adecuadamente ponderada con una función de peso. Dichas variaciones se muestran en las Figuras 4, donde la presión local es adimensionalizada con el valor de la presión inmediatamente después del cierre brusco de la válvula, $\rho a \bar{V}_{HP}$, [2]. Como se observa, las variaciones de presión correspondientes a los presentes modelos evolucionan muy similarmente a los resultados experimentales y a los teóricos de Zielke, modelando apropiadamente los picos de presión y sus decaimientos, resultados que no son adecuadamente representados por el modelo cuasi-estacionario.

Por otra parte, las Figuras 5 muestran las variaciones, en la mitad de la tubería, de la velocidad media y de la tensión de corte sobre la pared, estando ambas distribuciones adimensionalizadas con los valores correspondientes al régimen estacionario de Hagen-Poiseuille. Se observan las importantes discrepancias entre los modelos presentados y el cuasi-estacionario, mostrándose que este último modela inadecuadamente a las variaciones de las tensiones de corte sobre la pared de la tubería, generalmente subestimándolas, lo cual resulta en una deficiente representación de las fluctuaciones locales de velocidades medias y de presiones.

Como habría de esperarse de un modelo que intenta reproducir más fielmente al perfil instantáneo de velocidades, el correspondiente a cuatro parámetros muestra todavía variaciones más bruscas en las fluctuaciones locales de τ_w , cuando se comparan con los resultados provenientes del modelo de tres parámetros. Por otra parte, dichos resultados son comparables con los esquematizados en [7], donde se desarrolla un modelo de flujo cuasi-bidimensional no permanente, basado en el método de las características unidimensionales dentro del espacio anular comprendido entre cilindros concéntricos.

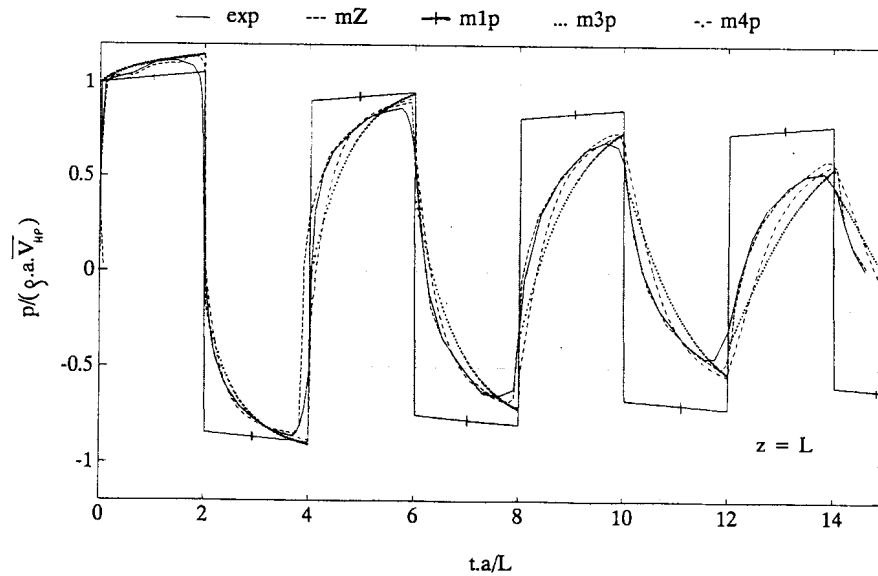
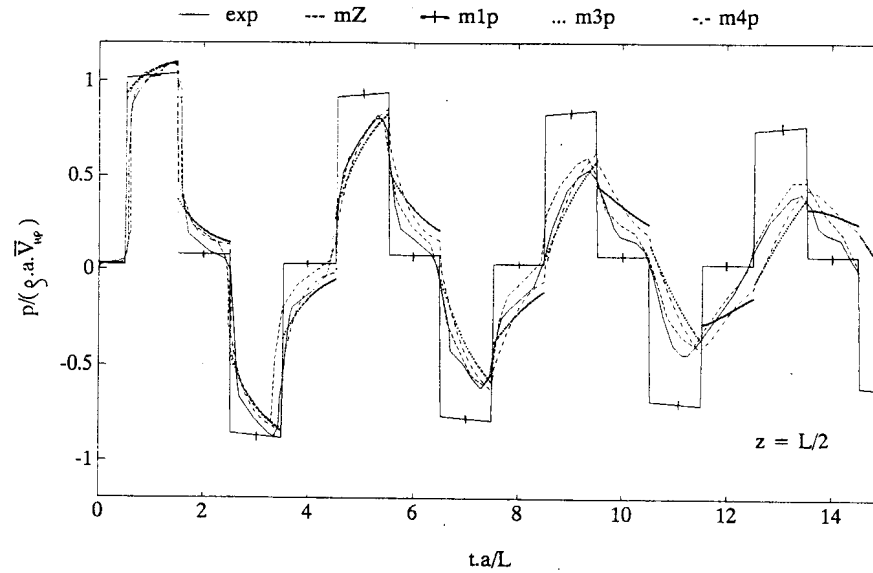
CONCLUSIONES

Se ha presentado un modelo simple para la determinación de presiones y velocidades medias locales en los problemas de golpe de ariete en régimen laminar. La presente metodología resulta mucho más simple que la propuesta por Zielke, con resultados comparables, no requiriendo el almacenamiento de la historia del movimiento del fluido.

Además, el modelo propuesto se puede implementar con sencillas modificaciones a códigos de golpe de ariete que trabajen con el método de las características. Solamente requiere redefinir la fuente de fricción S_0 y resolver algunas ecuaciones adicionales lineales con características verticales. A la hora de resolver problemas en redes grandes, en donde el tiempo de cómputo se emplea en general en resolver las ecuaciones no lineales de las componentes (tes, codos, pérdidas concentradas, etc.), este modelo no agrega mayormente tiempo de cómputo con respecto al procedimiento cuasi-estacionario tradicional, el cual tiene un comportamiento muy inferior al del modelo propuesto.

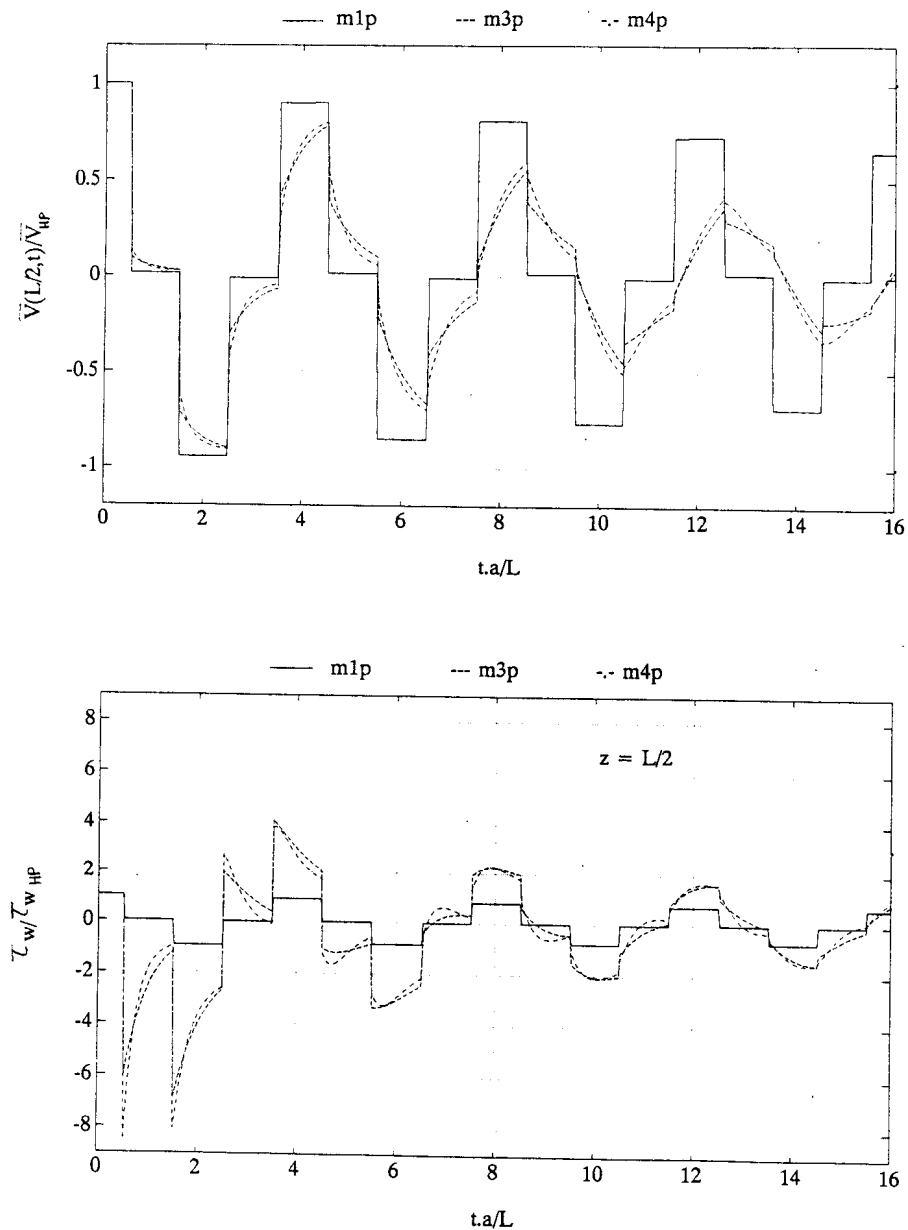
REFERENCIAS

- [1] White F.M.: "Viscous Fluid Flow", Second Edition, McGraw-Hill, Inc., 1991.
- [2] Zielke W.: "Frequency-Dependent Friction in Transient Pipe Flow", Paper No.67-WA/FE-15, 1967.
- [3] Prado R.A. y Marchegiani A.R.: "Flujo tubular no permanente por presencia de trenes de ondas de presión". *Mecánica Computacional*, Vol.XV, pp.285-294, 1995.
- [4] Prado R.A. y Marchegiani A.R.: "Discrepancias en la determinación de la tensión cortante en flujo tubular, bajo condiciones no estacionarias". *Anales del VII Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica*, Valdivia, Chile, pp.587-590, Octubre de 1996.
- [5] Wylie E.B & Streeter V.L.: "Fluid Transients", Corrected Edition 1983, FEB Press, USA.
- [6] Anderson D.A., Tannehill J.C. & Pletcher R.H.: "Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer", Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company, 1984.
- [7] Vardy A.E. & Hwang K.L.: "A characteristics model of transient friction in pipes", *Journal of Hydraulic Research*, Vol.29, No.5, pp.669-683, 1991.



Figuras 4: Fluctuaciones de presión en la válvula ($z = L$) y para $z = L/2$

exp: experimental [2]
mZ: modelo de Zielke [2]
m1p: modelo de 1 parámetro (cuasi-estacionario)
m3p: modelo de 3 parámetros
m4p: modelo de 4 parámetros



Figuras 5: Variaciones de velocidad media y tensiones de corte sobre la pared, para $z = L/2$

m1p: modelo de 1 parámetro (cuasi-estacionario)

m3p: modelo de 3 parámetros

m4p: modelo de 4 parámetros

\bar{V}_{HP} : velocidad media del flujo permanente de Hagen-Poiseuille

$\tau_{w, HP}$: tensión de corte sobre la pared para el flujo permanente de Hagen-Poiseuille