

ANALISIS TERMOELASTICO NO ESTACIONARIO DE UNA ESFERA COMPUESTA

Carlos A. ROSSIT - Patricio A. A. LAURA

Universidad Nacional del Sur - Instituto de Mecánica Aplicada (CONICET)
(8000) - Bahía Blanca
ARGENTINA

RESUMEN

Se considera el caso de una esfera maciza compuesta de dos materiales dispuestos concéntricamente sometida a una temperatura inicial uniforme T_0 y que es sumergida en un medio de temperatura T_∞ con condiciones convectivas en su superficie exterior.

Se analiza en primer lugar la distribución no estacionaria de temperatura, determinándose posteriormente los estados no estacionarios de deformaciones y tensiones inducidos por la sollicitación térmica.

Las soluciones se expresan en términos de desarrollos no armónicos de Fourier en las autofunciones del problema que como es sabido son del tipo $\frac{\text{sen}\beta r}{r}$ y $\frac{\text{cos}\beta r}{r}$.

Se han determinado distribuciones de temperatura, deformaciones y tensiones adimensionales en función de las variables espacial y temporal para una dada combinación de parámetros térmicos y mecánicos del sistema.

ABSTRACT

A solid composite sphere consisting of two layers is considered.

The whole sphere is initially at a temperature T_0 , and for times $t > 0$, heat is dissipated by convection into a medium at T_∞ temperature.

The solution for transient temperature distribution is developed and subsequently transient, thermoelastic stresses and strains are found.

Solutions are given in terms of non-harmonic Fourier expansions because, as it is known, the eigenfunctions of the problem are $\frac{\text{sin}\beta r}{r}$ and $\frac{\text{cos}\beta r}{r}$.

Results are provided as dimensionless plots for a particular combination of thermal and mechanical parameters.

1. INTRODUCCION

El problema en estudio, tensiones termoelásticas no estacionarias en esferas compuestas, es de interés básico tanto desde el punto de vista científico (enfriamiento de rocas, sistemas biológicos.etc.).[1],[2].

El punto de partida lo constituye la solución de la ecuación no estacionaria de Fourier* en un dominio compuesto donde se supone una continuidad termomecánica perfecta entre los dos subdominios que conforman el sistema en estudio.

El campo térmico transitorio es determinado siguiendo el camino que propusiera Ozisik[3] y fuera ampliado en su generalidad, en el caso de discos y cilindros, por Pardo y otros[4], al considerar condiciones convectivas en su superficie exterior. Por último se evalúan deformaciones y tensiones térmicas[1].

2. PLANTEO DEL PROBLEMA

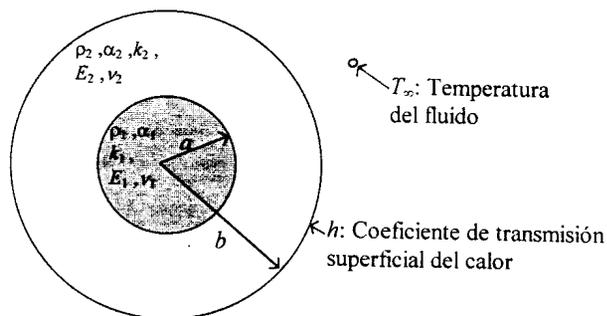


FIGURA 1: Geometría y datos del problema.

donde:

ρ : Densidad ; α : Difusividad térmica ; k : Conductividad térmica

E : Módulo de Young ; ν : Módulo de Poisson

Consideremos el caso de una esfera maciza, de dos materiales dispuestos concéntricamente sometida a una temperatura uniforme T_0 y sumergida en un medio de temperatura constante T_∞ , inferior a T_0 , con condiciones convectivas en su superficie exterior (Fig. 1).

En esas condiciones se desarrollará un estado termoelástico transitorio que dependerá espacialmente sólo de la coordenada radial.

Se suponen que ambos materiales son elástica y térmicamente isótropos y que sus propiedades y sus coeficientes de transferencia térmica son independientes de la temperatura. El problema es entonces lineal.

* Constituye una feliz coincidencia que en el presente se cumplen 175 años de la notable contribución de Fourier: "Théorie analytique de la chaleur", donde además de derivar su célebre ecuación, plantea la solución de problemas de contorno mediante series de senos y cosenos, "Series de Fourier", lo cual constituye el inicio de la física matemática moderna.

En coordenadas esféricas, las ecuaciones diferenciales que gobiernan la distribución temporaria de temperatura en ambos medios son[3]:

$$\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_1} \frac{\partial T_1}{\partial t}; \quad (0 \leq r \leq a) \quad (1a)$$

$$\frac{\partial^2 T_2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T_2}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_2} \frac{\partial T_2}{\partial t}; \quad (a < r \leq b) \quad (1b)$$

Las condiciones de borde para $t > 0$ son:

$$T_1(0, t): \text{ finita} \quad (2 a)$$

$$T_1(a, t) = T_2(a, t) \quad (2 b)$$

$$k_1 \frac{\partial T_1}{\partial r}(a, t) = k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(a, t) \quad (2 c)$$

$$-k_2 \frac{\partial T_2}{\partial r}(b, t) = h[T_2(b, t) - T_\infty] \quad (2 d)$$

y la condición inicial para la esfera completa quedará expresada:

$$T_1(r, 0) = T_0; \quad 0 \leq r \leq a \quad (3 a)$$

$$T_2(r, 0) = T_0; \quad a < r \leq b \quad (3 b)$$

3. DISTRIBUCION DE TEMPERATURA

Efectuaremos el siguiente cambio de variables:

$$\theta_i(r, t) = \frac{T_i(r, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty}; \quad i = 1, 2 \quad (4)$$

y substituyendo esta expresión en las ecuaciones (1) obtenemos:

$$\frac{\partial^2 \theta_i}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial \theta_i}{\partial r} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t} \quad (5)$$

La solución general de la ecuación (5) se obtiene en términos de funciones de Bessel de orden 1/2. En este caso, seguiremos un ingenioso procedimiento sugerido por Ozisik[3] mediante el cual se obtiene la solución de una manera más conveniente y directa:

La ecuación (5) puede expresarse:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial^2 (r \theta_i)}{\partial r^2} = \frac{1}{\alpha_i} \frac{\partial \theta_i}{\partial t}$$

o sea:

$$\alpha_i \frac{\partial^2 (r, \theta_i)}{\partial r^2} = \frac{\partial (r, \theta_i)}{\partial t} \quad (6)$$

ecuación diferencial unidimensional dependiente del tiempo de conducción de calor en coordenadas rectangulares, resoluble por separación de variables:

Asumiendo:

$$r, \theta_i(r, t) = X_i(r) \cdot \Gamma(t) \quad (7)$$

reemplazamos en (6) y obtenemos las siguientes ecuaciones diferenciales para $X_1(r)$, $X_2(r)$ y $\Gamma(t)$:

$$X_i''(r) + \frac{\beta^2}{\alpha_i} X_i(r) = 0; \quad i = 1, 2 \quad (8)$$

$$\Gamma'(t) + \beta^2 \Gamma(t) = 0 \quad (9)$$

donde β^2 es la constante de separación.

Las soluciones a (8) y (9) son respectivamente:

$$X_i(r) = A_i \operatorname{sen} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_i}} r + B_i \cos \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_i}} r \quad (10)$$

$$\Gamma(t) = C e^{-\beta^2 t} \quad (11)$$

Si denominamos:

$$\Psi_i(r) = \frac{X_i(r)}{r}$$

tendremos:

$$\Psi_i(r) = A_i \frac{\operatorname{sen} \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_i}} r}{r} + B_i \frac{\cos \frac{\beta}{\sqrt{\alpha_i}} r}{r} \quad (12)$$

y será:

$$\theta_i(r, t) = \Psi_i(r) \cdot \Gamma(t) \quad (13)$$

Considerando la transformación (4) y la factorización (13) las condiciones de borde (2) devienen en:

$$\Psi_1(0) : \text{finita} \quad (14 \text{ a})$$

$$\Psi_1(a) = \Psi_2(a) \quad (14 \text{ b})$$

$$k_1 \Psi_1'(a) = k_2 \Psi_2'(a) \quad (14 \text{ c})$$

$$-k_2 \Psi_2'(b) = h \Psi_2(b) \quad (14 \text{ d})$$

Aplicando la condición (14a) y teniendo en cuenta el comportamiento de la función $(\cos x)/x$ en el origen, se deduce que:

$$B_1 = 0 \quad (15)$$

En cuanto a las otras tres condiciones (14b),(14c) y (14d) conforman un sistema lineal homogéneo de ecuaciones algebraicas en los coeficientes A_1 , A_2 y B_2 .

$$\begin{aligned} A_1 \operatorname{sen} \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} - A_2 \cos \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} - B_2 \cos \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} &= 0 \\ A_1 \left(\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} \cos \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} - \operatorname{sen} \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} \right) - A_2 \left(\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_2}} \cos \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_2}} - \operatorname{sen} \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_2}} \right) \frac{k_2}{k_1} + B_2 \left(\frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} \operatorname{sen} \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} - \cos \frac{\beta a}{\sqrt{\alpha_1}} \right) \frac{k_2}{k_1} &= 0 \\ A_2 \left[\operatorname{sen} \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} \left(\frac{k_2}{b \cdot h} - 1 \right) - \frac{k_2}{b \cdot h} \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} \cos \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} \right] + B_2 \left[\frac{k_2}{b \cdot h} \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} \operatorname{sen} \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} + \cos \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_2}} \left(\frac{k_2}{b \cdot h} - 1 \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Resulta útil presentar los resultados en forma adimensional, para lo que definimos las siguientes variables adimensionales:

$$\rho = \frac{a}{b} ; R = \frac{r}{b} ; \Omega = \frac{\beta b}{\sqrt{\alpha_1}} ; \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} ; k = \frac{k_2}{k_1} ; \frac{b \cdot h}{k_2} = \text{Bi (Nro. de Biot)} \quad (17)$$

El sistema lineal (16) puede ser expresado en función de los parámetros definidos en (17):

$$\begin{bmatrix} \operatorname{sen} \Omega \rho & -\operatorname{sen} \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} & -\cos \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} \\ \Omega \rho \cos \Omega \rho - \operatorname{sen} \Omega \rho & k \left(\operatorname{sen} \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} \cos \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} \right) & k \left(\frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sen} \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} + \cos \frac{\Omega \rho}{\sqrt{\alpha}} \right) \\ 0 & \left(\operatorname{sen} \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} - \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} \cos \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} \right) (1 - \text{Bi}) & \left(\cos \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} + \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} \operatorname{sen} \frac{\Omega}{\sqrt{\alpha}} \right) (1 - \text{Bi}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (18)$$

Los coeficientes del sistema constituyen un determinante-ecuación cuya nulidad permite obtener los autovalores Ω_n del problema para los cuales es posible una solución distinta de la trivial. Estas raíces dependen de los parámetros ρ , k , α , Ω y Bi.

Para cada Ω_n que anula el determinante y, por ejemplo para $A_{1n} = 1$, se obtienen los valores correspondientes de A_{2n} y B_{2n} de las dos últimas ecuaciones (18).

Conociendo las raíces Ω_n y las correspondientes autofunciones Ψ_{1n} y Ψ_{2n} , la solución del problema de distribución de temperatura en función de los parámetros adimensionales podrá expresarse como suma de las infinitas soluciones particulares:

$$\theta_i(R, t) = \frac{T_i(R, t) - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_{in}(R) e^{-\frac{\Omega_n^2 \alpha_1 t}{b^2}} \quad i = 1, 2 \quad (19)$$

donde:

$$\Psi_{1n} = \frac{\text{sen} \Omega_n R}{R} \quad ; \quad \Psi_{2n} = A_{2n} \frac{\text{sen} \frac{\Omega_n R}{\sqrt{\alpha}}}{R} + B_{2n} \frac{\text{cos} \frac{\Omega_n R}{\sqrt{\alpha}}}{R}$$

Los coeficientes C_n , como es sabido, se obtienen en virtud del cumplimiento de las condiciones iniciales (3) que luego de la transformación (4) resultan ser:

$$\theta_1(R, 0) = 1 \quad (0 \leq R \leq \rho) \quad (20a)$$

$$\theta_2(R, 0) = 1 \quad (\rho < R \leq 1) \quad (20b)$$

Tendremos entonces:

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n \Psi_{in}(R) = 1 \quad i = 1, 2 \quad (21)$$

Puede probarse que la expresión:

$$N_{nm} = \int_0^\rho R^2 \Psi_{1n}(R) \Psi_{1m}(R) dR + \frac{k}{\alpha} \int_\rho^1 R^2 \Psi_{2n}(R) \Psi_{2m}(R) dR \quad (22)$$

es nula para todo $n \neq m$.

Entonces los coeficientes C_n quedarán determinados por la siguiente expresión:

$$C_n = \frac{\int_0^\rho R^2 \Psi_{1n}(R) dR + \frac{k}{\alpha} \int_\rho^1 R^2 \Psi_{2n}(R) dR}{N_{nn}} \quad (23)$$

En definitiva, conocido $\theta_i(R, t)$, podremos determinar el valor de la temperatura T_i en cualquier tiempo y para cualquier punto de la esfera (identificable con el parámetro adimensional R), de acuerdo con la transformación (4):

$$T_i(R, t) = T_\infty + \theta_i(R, t)(T_0 - T_\infty) \quad (24)$$

resultando de la superposición de un estado residual estacionario e igual a T_∞ (temperatura del medio circundante), y un estado transitorio claramente representado por θ_i .

4. CALCULO DE LAS TENSIONES TERMICAS

Debido a la simetría que presenta el problema, resulta suficiente conocer la deformación radial u_r , para describir el estado de deformación. En cuanto al estado de tensiones, de las seis componentes del tensor de tensiones sólo serán no nulas σ_r , y $\sigma_\theta = \sigma_\phi$.

Las expresiones en cada material, vienen dados por:

$$\frac{u_{r1}(R, t)}{b \alpha_1} = \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \frac{1}{R^2} \int_0^R T_1(R, t) R^2 dR + C_1 R + \frac{C_2}{R^2} \quad (25)$$

$$\frac{\sigma_{r1}(R, t)}{E_1 \alpha_1} = -\frac{2}{1 - \nu_1} \frac{1}{R^3} \int_0^R T_1(R, t) R^2 dR + \frac{C_1}{1 - 2\nu_1} - \frac{2}{1 + \nu_1} \frac{C_2}{R^3} \quad (26)$$

$$\frac{\sigma_{\phi1}(R, t)}{E_1 \alpha_1} = \frac{1}{1 - \nu_1} \frac{1}{R^3} \int_0^R T_1(R, t) R^2 dR - \frac{T_1(R, t)}{1 - \nu_1} + \frac{C_1}{1 - 2\nu_1} + \frac{2}{1 + \nu_1} \frac{C_2}{R^3} \quad (27)$$

$$\frac{u_{r2}(R, t)}{b \alpha_1} = \frac{1 + \nu_1}{1 - \nu_1} \frac{\alpha}{R^2} \int_\rho^R T_2(R, t) R^2 dR + D_1 R + \frac{D_2}{R^2} \quad (28)$$

$$\frac{\sigma_{r2}(R, t)}{E_1 \alpha_1} = \frac{E_2}{E_1} \left(-\frac{2}{1 - \nu_2} \frac{\alpha}{R^3} \int_\rho^R T_2(R, t) R^2 dR + \frac{D_1}{1 - 2\nu_2} - \frac{2}{1 + \nu_2} \frac{D_2}{R^3} \right) \quad (29)$$

$$\frac{\sigma_{\phi2}(R, t)}{E_1 \alpha_1} = \frac{E_2}{E_1} \left(\frac{1}{1 - \nu_2} \frac{\alpha}{R^3} \int_\rho^R T_2(R, t) R^2 dR - \alpha \frac{T_2(R, t)}{1 - \nu_2} + \frac{D_1}{1 - 2\nu_2} + \frac{2}{1 + \nu_2} \frac{D_2}{R^3} \right) \quad (30)$$

Las condiciones de borde son:

$$u_{r1}(0, t) = 0 \quad (31a)$$

$$u_{r1}(\rho, t) = u_{r2}(\rho, t) \quad (31b)$$

$$\sigma_{r1}(\rho, t) = \sigma_{r2}(\rho, t) \quad (31c)$$

$$\sigma_{r2}(1, t) = 0 \quad (31d)$$

En definitiva, reemplazando en las integrales (25) a (30), de acuerdo con (24) y aplicando las condiciones de borde (31) las expresiones para las constantes serán:

$$D_2 = \frac{2 \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} \alpha \left(\frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_2} - 1 \right) \left(\frac{T_\infty}{3} (\rho^3 - 1) - I_2 (T_0 - T_\infty) \right) - T_\infty - \frac{3I_1}{\rho^3} (T_0 - T_\infty)}{2 \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2} \left(\frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_2} - 1 \right) - \frac{1}{\rho^3} \left(2 \frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\nu_1}{1+\nu_2} + 1 \right)} \quad (32)$$

$$D_1 = 2 \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2} D_2 + 2 \frac{1-2\nu_2}{1-\nu_2} \alpha \left(\frac{T_\infty}{3} (1-\rho^3) + I_2 (T_0 - T_\infty) \right) \quad (33)$$

$$C_1 = \frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\nu_1}{1-2\nu_2} D_1 - 2 \frac{E_2}{E_1} \frac{1-2\nu_2}{1+\nu_2} \frac{1}{\rho^3} D_2 + 2 \frac{1-2\nu_1}{1-\nu_1} \left(\frac{T_\infty}{3} + \frac{T_0 - T_\infty}{\rho^3} I_1 \right) \quad (34)$$

$$C_2 = 0 \quad (35)$$

$$I_1 = \int_0^{\rho} \theta_1(R, t) R^2 dR \quad , \quad I_2 = \int_{\rho}^1 \theta_2(R, t) R^2 dR \quad (36)$$

5. RESULTADOS

Se han obtenido resultados numéricos para una configuración mecánica y térmica definida por los siguientes valores numéricos:

$$\rho = \frac{a}{b} = 0.5 \quad ; \quad k = \frac{k_2}{k_1} = 5 \quad ; \quad \alpha = \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 5 \quad ; \quad Bi = 5 \quad ; \quad T_\infty = 5 T_0$$

$$\frac{E_2}{E_1} = 1.4 \quad ; \quad \nu_1 = 0.25 \quad ; \quad \nu_2 = 0.30$$

En primer lugar, se ha procedido a verificar la condición inicial variando el número de términos (Figs. 2). Es posible, de esta manera, analizar la convergencia de la solución.

La Fig. 3 muestra la variación de temperatura adimensional $\left(\theta = \frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} \right)$ para distintos

valores de la variable adimensional de tiempo $F_0 = \frac{\alpha_1 t}{b^2}$ (Número de Fourier).

Las Figs. 4, 5 y 6 evidencian la variación de la deformación radial, tensión radial y tensión tangencial en el dominio de la esfera, para sucesivos valores del parámetro de tiempo y para una relación $T_\infty = 5 T_0$.

Como era de esperar en $r = a$ se observa una variación brusca en el valor de la tensión tangencial σ_ϕ . En el caso de la deformación radial u_r y de la tensión radial σ_r , se tiene una variación brusca de la pendiente para $r = a$.

Es de destacar, el hecho de que durante el proceso de "enfriado", se producen tensiones de compresión para valores del radio próximos al radio exterior (Fig. 5).

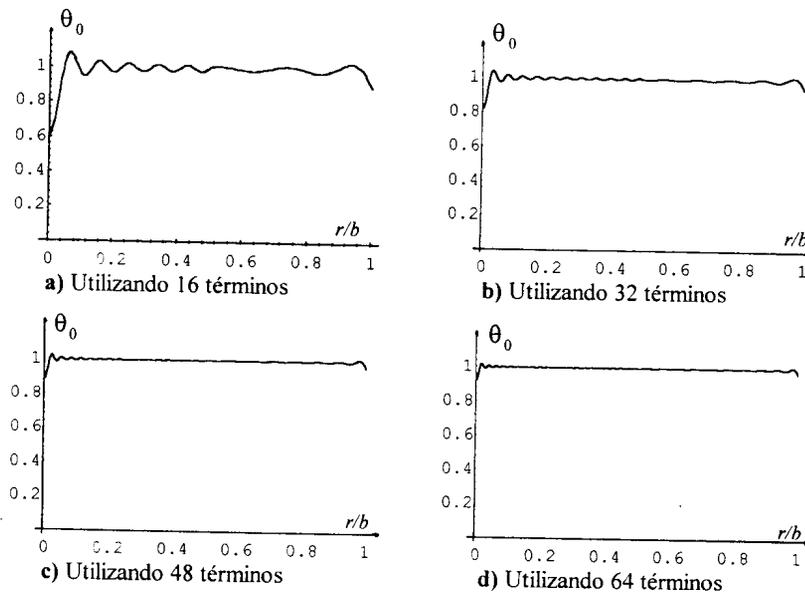


FIGURA 2: Verificación condición inicial (21) variando el número de términos.

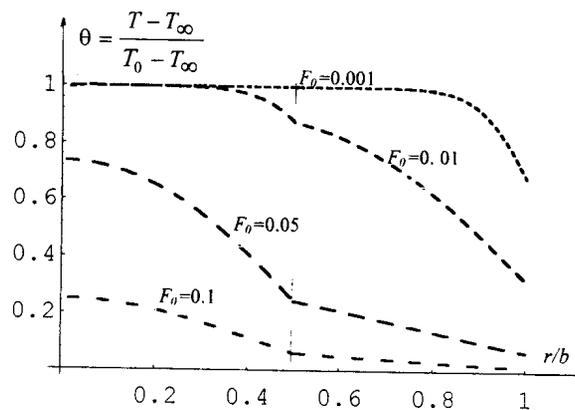


FIGURA 3: Distribución espacial del factor de temperatura $\theta(r,t)$ para sucesivos valores de tiempo adimensional.

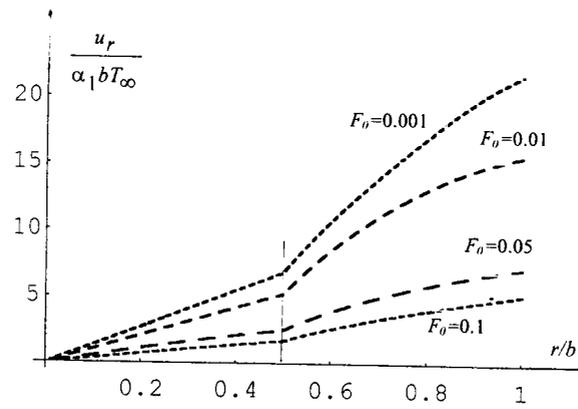


FIGURA 4: Distribución espacial de la deformación radial para sucesivos valores de tiempo adimensional

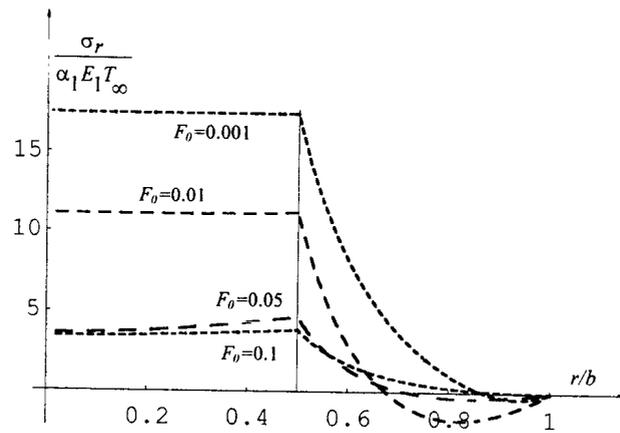


FIGURA 5: Distribución espacial de la tensión radial para sucesivos valores de tiempo adimensional

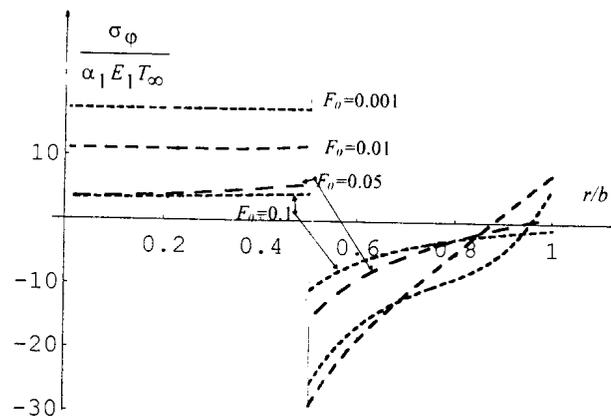


FIGURA 6: Distribución espacial de la tensión tangencial para sucesivos valores de tiempo adimensional

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido auspiciado por la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y por el CONICET (PIA 6002/96).

REFERENCIAS

1. B.A. Boley and J.H. Wiener, *Theory of Thermal Stresses*, Wiley, New York, 1960.
2. Y. Tanigawa, Some basic thermoelastic problems for nonhomogeneous structural materials. *Applied Mechanics Reviews*, vol. 48, N° 6, pp. 287-300, 1995.
3. M.N. Ozisik, *Heat Conduction*, Wiley, New York 1980.
4. E. Pardo, G. Sánchez Sarmiento, P.A.A. Laura and R.H. Gutiérrez, Analytical solution for unsteady thermal stresses in an infinite cylinder composed of two materials, *Journal of Thermal Stresses*, vol.10, pp 29-43, 1987
