

ANÁLISE PROBABILÍSTICA E VERIFICAÇÃO DA SEGURANÇA DE VIGAS DE CONCRETO ARMADO

José M. de Araújo

Departamento de Materiais e Construção - Fundação Universidade do Rio Grande
Campus Carreiros, Rio Grande, RS, 96200-000, Brasil

RESUMO

Neste trabalho emprega-se o método de Monte Carlo para a análise probabilística de vigas de concreto armado. As propriedades mecânicas do concreto e do aço, as dimensões das seções transversais da viga e as cargas são as variáveis aleatórias consideradas. As propriedades do concreto são modeladas como campos estocásticos homogêneos. Através de simulações, obtém-se os valores esperados e as variâncias da resposta estrutural. Com isso, podem ser definidas faixas da resposta com uma determinada probabilidade de ocorrência. Resultados experimentais disponíveis são usados para testar a validade do modelo.

O método de Monte Carlo também é empregado para a avaliação da segurança alcançada no projeto estrutural. As recomendações do CEB são utilizadas para o dimensionamento das vigas e o nível de segurança é avaliado através do índice de confiabilidade que é obtido por meio de simulações.

ABSTRACT

In this work, the Monte Carlo method is employed for a probabilistic analysis of reinforced concrete beams. Concrete and steel properties, cross section dimensions and loads are considered as random variables. Concrete properties are modeled as homogeneous random fields. Expected values and variances of the structural response are obtained through simulations. Thus, it is possible to define bands for the structural response with a given probability of occurrence. Available experimental results are used to validate the adopted model.

The Monte Carlo method is used to evaluate the safety obtained in the structural design. Recommendations of the CEB are adopted in the dimensioning of beams and the safety level is evaluated by means of the reliability index which is obtained through simulations.

INTRODUÇÃO

A análise de uma estrutura de concreto armado envolve várias incertezas relacionadas às propriedades do concreto e do aço, dimensões dos elementos estruturais, posição das barras da armadura, cargas e condições de contorno. Além disso, é inevitável o surgimento de incertezas

associadas aos modelos constitutivos empregados. Dessa forma, em uma análise rigorosa deve-se procurar obter valores esperados e variâncias da resposta estrutural para parâmetros de entrada aleatórios, dos quais se conhecem os valores esperados e as variâncias.

Diversos métodos para análise estrutural probabilística têm sido pesquisados nos últimos anos, particularmente em associação com o método dos elementos finitos. Em geral, empregam-se o método de Monte Carlo direto, o método de Monte Carlo com expansão de Neumann e técnicas de expansão em série de Taylor das variáveis aleatórias [1-4].

O método de Monte Carlo constitui a forma mais simples e evidente para a realização de uma análise probabilística e, por isso, é largamente empregado. Neste método, as propriedades dos materiais, cargas, ou outra variável aleatória, são introduzidas por simulação digital sem alterar significativamente o algoritmo usado na análise determinística. Além disso, o método de Monte Carlo é estatisticamente consistente e é empregado para testar a validade de outras técnicas. Por outro lado, esse método pode levar a um alto custo computacional em problemas com muitos graus de liberdade e quando muitas simulações são requeridas.

Nos critérios de projeto das estruturas de concreto armado baseados nos estados limites últimos, a segurança é obtida por meio de fatores parciais. Esses fatores são introduzidos com diferentes valores para majorar ou para minorar as variáveis aleatórias envolvidas na análise[5,6]. Em geral, as ações, as resistências dos materiais e as dimensões dos elementos estruturais são as variáveis aleatórias básicas consideradas no projeto.

A adoção de fatores parciais de segurança, apesar de ser conveniente do ponto de vista prático, não é suficiente para que se tenha uma idéia clara à respeito do nível de segurança obtido no projeto. De fato, a segurança da estrutura depende do seu comportamento frente às ações, o que envolve uma interdependência das diversas variáveis aleatórias.

Uma avaliação consistente do nível de segurança requer o cálculo da probabilidade do estado limite último ser alcançado. Esta probabilidade, denominada probabilidade de falha, só pode ser estimada conhecendo-se a distribuição de alguma variável que represente uma determinada margem de segurança da estrutura. Infelizmente, nem sempre é possível, ou pelo menos prático, obter essa distribuição de probabilidade.

Uma alternativa para a avaliação do nível de segurança consiste na determinação do índice de confiabilidade [7]. Esse índice leva em conta todas as variáveis aleatórias envolvidas e, principalmente, a maneira como a estrutura se comporta frente às ações. Apesar de não ficar explícito, o índice de confiabilidade está associado a uma determinada probabilidade de falha.

Neste trabalho, emprega-se o método de Monte Carlo para a análise probabilística de vigas de concreto armado. A análise estrutural é feita através do método dos elementos finitos, empregando-se elementos isoparamétricos quadráticos de oito nós. Um modelo constitutivo bidimensional é adotado para representar o comportamento não-linear do concreto. A armadura é representada por elementos unidimensionais inseridos nos elementos de concreto. Através de simulações, avalia-se o índice de confiabilidade obtido com os procedimentos de projeto de vigas de concreto armado recomendados pelo CEB[5,6].

GERAÇÃO DO CAMPO ESTOCÁSTICO

As variáveis aleatórias consideradas neste trabalho são as seguintes:

E_c, f_c, f_t = módulo de deformação longitudinal, resistência à compressão e resistência à tração do concreto;

f_y = tensão de escoamento do aço;

b, h = largura e altura das seções da viga (seções retangulares);

G, Q = carga permanente e carga variável.

As propriedades do concreto apresentam variações no domínio espacial definida por uma função de autocorrelação. As outras variáveis aleatórias são consideradas constantes, com os valores obtidos em cada simulação, isto é, sem variação espacial. Admite-se, também, que todas as variáveis aleatórias são Gaussianas.

Um valor x_i para uma variável aleatória Gaussiana, correspondente à simulação de ordem i , é dado por

$$x_i = x_m(1 + V_x Z_i) \quad (1)$$

onde x_m e V_x representam o valor médio e o coeficiente de variação de x e Z_i é uma variável aleatória Gaussiana com média zero e variância unitária.

As variáveis Z_i são obtidas na forma

$$Z_i = (-2 \ln S_i)^{1/2} \cos(2\pi S_{i+1}) \quad (2)$$

onde S_i e S_{i+1} são números aleatórios uniformemente distribuídos no intervalo $[0,1]$.

Empregando a equação (1), pode-se gerar vários valores para a largura e para a altura das seções da viga, para a tensão de escoamento do aço e para as cargas.

Uma propriedade genérica do concreto, α , é obtida da relação

$$\alpha = \alpha_m(1 + a(\mathbf{x})) \quad (3)$$

onde α_m é o valor médio da propriedade e $a(\mathbf{x})$ representa as flutuações aleatórias em torno da média, sendo \mathbf{x} o vetor posição no domínio da estrutura.

A parte flutuante $a(\mathbf{x})$ tem média zero e uma função de autocorrelação pré-definida. Se a variação espacial da propriedade é isotrópica, a função de autocorrelação depende apenas da distância d entre dois pontos \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \mathbf{d}$ no domínio espacial, isto é,

$$R(d) = E[a(\mathbf{x})a(\mathbf{x} + \mathbf{d})] \quad (4)$$

onde $R(d)$ é a função de autocorrelação e $E[]$ simboliza o valor esperado.

A função de autocorrelação adotada para o concreto é dada por

$$R(d) = V_{\alpha}^2 e^{-\left(\frac{d}{\eta}\right)^2} \quad (5)$$

onde η é o comprimento de correlação e V_{α} é o coeficiente de variação da propriedade α .

Empregando-se o método dos elementos finitos, as propriedades do concreto podem ser atribuídas ao centro de cada elemento e consideradas constantes no mesmo. Esse procedimento exige que o elemento seja pequeno em relação ao comprimento de correlação, para reduzir os efeitos da dependência da malha. Logo, se existem n elementos na malha, é necessário determinar n valores da variável aleatória $a(\mathbf{x}_i)$, onde \mathbf{x}_i representa o centro do elemento genérico i .

As características de correlação podem ser especificadas em termos da matriz de covariância, cuja componente genérica é dada por

$$\text{Cov}[a_i, a_j] = R(d_{ij}) \quad (6)$$

sendo d_{ij} a distância entre os centros dos elementos i e j da malha.

Um vetor $\mathbf{a} = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}^T$ de variáveis aleatórias com média zero e autocorrelacionadas pode ser obtido na forma $\mathbf{a} = \mathbf{L}\mathbf{Z}$, onde $\mathbf{Z} = \{Z_1, Z_2, \dots, Z_n\}^T$ é um vetor de variáveis aleatórias Gaussianas não correlacionadas com média zero e desvio padrão unitário e \mathbf{L} é uma matriz triangular inferior obtida pela decomposição de Cholesky da matriz de covariância dada na equação (6).

Assim, emprega-se a equação (2) para gerar as componentes do vetor \mathbf{Z} , determina-se a matriz \mathbf{L} e obtém-se o vetor de variáveis aleatórias \mathbf{a} . Com isso, pode-se definir as propriedades do concreto em cada elemento com o auxílio da equação (3), para cada simulação.

Para evitar a adoção de valores negativos para as variáveis aleatórias, os valores obtidos nas simulações são limitados ao intervalo

$$0,05x_m \leq x_i \leq 1,95x_m \quad (7)$$

Se algum valor gerado se situar fora desse intervalo, a simulação é desconsiderada. Esse procedimento introduz um truncamento na distribuição normal que, entretanto, é muito pequeno.

Tendo definido o campo estocástico, analisa-se a estrutura obtendo-se diferentes valores da resposta para cada simulação efetuada. Dessa forma, pode-se estimar o valor esperado e a variância da resposta estrutural em função do tamanho da amostra (número de simulações). Aumentando o número de simulações, verifica-se a convergência do valor esperado e da variância.

AValiação DA SEGURANÇA ESTRUTURAL

A segurança de uma estrutura pode ser avaliada comparando-se sua capacidade de carga com as ações que a solicitam. A diferença entre elas é uma medida da distância ao estado limite último. Uma vez que, tanto a capacidade de carga, quanto as ações solicitantes, são variáveis aleatórias, o problema deve ser formulado em termos de alguma probabilidade.

Seja P_u uma variável aleatória representando a capacidade de carga da estrutura. Evidentemente, P_u depende de todas as variáveis aleatórias básicas que contribuem para a resposta estrutural, como as resistências dos materiais, as dimensões, etc.. Logo,

$$P_u = P_u(x_i), \quad i = 1, \dots, k \quad (8)$$

onde x_i representa as variáveis aleatórias básicas.

Se P_s representa as ações impostas à estrutura, a probabilidade de falha, p_F , é a probabilidade de que as ações superem a capacidade de carga, isto é,

$$p_F = P(P_s > P_u) \quad (9)$$

Este problema pode ser formulado em termos da margem de segurança ou do coeficiente de segurança [7]. A primeira alternativa é adotada neste trabalho.

A margem de segurança, M , é definida como $M = P_u - P_s$, sendo ela própria uma variável aleatória. Neste caso, a falha corresponde à ocorrência do evento $M < 0$. Se $f_M(m)$ representa a distribuição de probabilidade de M , então a probabilidade de falha é dada por

$$p_F = \int_{-\infty}^0 f_M(m) dm \quad (10)$$

Se a distribuição $f_M(m)$ puder ser estimada, torna-se um trabalho simples calcular a probabilidade de falha. Isto pode ser feito com o emprego do método de Monte Carlo, mas este procedimento não é adotado neste trabalho.

Admitindo que a margem de segurança tem uma média μ_M e um desvio padrão σ_M e definindo a variável $s = (m - \mu_M)/\sigma_M$, a equação (10) é escrita na forma

$$p_F = \int_{-\infty}^{-\beta} f_M(s) \sigma_M ds \quad (11)$$

onde $\beta = \mu_M/\sigma_M$ é o índice de confiabilidade.

Observa-se que, quanto maior for o valor de β , menor será a probabilidade de falha, independentemente da distribuição $f_M(s)$. Por isso, o índice β é uma medida importante do nível de segurança já que, ao menos qualitativamente, ele dá uma idéia sobre a confiabilidade da estrutura.

O valor médio da margem de segurança é $\mu_M = \bar{P}_u - \bar{P}_s$, onde \bar{P}_u é a carga de ruptura média obtida por simulações e \bar{P}_s é o valor médio da carga aplicada à estrutura. Considerando que P_u e P_s são variáveis aleatórias independentes, a variância da margem de segurança é $\sigma_M^2 = \sigma_{P_U}^2 + \sigma_{P_S}^2$, onde $\sigma_{P_U}^2$ e $\sigma_{P_S}^2$ são as variâncias das cargas de ruptura e da carga aplicada, respectivamente.

Para cada amostra simulada, analisa-se a estrutura incrementando o carregamento proporcionalmente até que seja atingido o estado limite último. A ruína pode ocorrer por esmagamento do concreto ou por deformação excessiva das armaduras. Dessa forma, pode-se avaliar μ_M e σ_M e o índice de confiabilidade β .

MODELO PARA VIGAS DE CONCRETO ARMADO

O modelo bidimensional adotado para o concreto é baseado na definição das deformações uniaxiais equivalentes. A introdução das deformações equivalentes possibilita o emprego de relações tensões-deformações uniaxiais para o concreto. Os detalhes da formulação podem ser encontrados em [8].

A deformação de ruptura do concreto em compressão é igual a -0,0035. Para as armaduras admite-se um comportamento elasto-plástico, limitando-se suas deformações ao valor 0,01.

A matriz de rigidez de um elemento de concreto armado é formada pela superposição da matriz de rigidez do elemento de concreto com as matrizes dos segmentos de armadura nele contidos. Analogamente, obtém-se as ações nodais não-lineares. Aplicando as cargas através de incrementos e resolvendo o sistema não-linear de equações de equilíbrio, encontra-se a resposta da estrutura até o nível de carga desejado ou até sua ruína. Esse procedimento é repetido para cada simulação do método de Monte Carlo.

COMPARAÇÃO COM RESULTADOS EXPERIMENTAIS

Neste trabalho é feita uma análise de três séries de vigas ensaiadas por Schegg e Decanini [9]. Cada série é formada por três vigas biapoiadas, conforme mostrado na figura 1. Nessa figura indica-se, também, a malha de elementos finitos adotada para a metade da viga.

Na tabela I indicam-se as áreas de aço, A_s , das três séries de vigas. O valor médio, f_{ym} , e o coeficiente de variação, V_{fy} , da tensão de escoamento dos aços também são indicados na tabela. O módulo de elasticidade dos aços é tomado com o valor 200 GPa.

Tabela I - Armaduras das vigas

Série	A_s (cm ²)	f_{ym} (MPa)	V_{fy}
RC-75	2,35	550	0,05
RC-100	3,39	430	0,05
RC-200	6,40	480	0,05

As seções das vigas apresentaram as seguintes dimensões: largura média, $b_m = 15$ cm ; altura média, $h_m = 24$ cm, coeficiente de variação das dimensões, $V_b = V_h = 0,02$. O concreto das três séries de vigas possui uma resistência média à compressão $f_{cm} = 29$ MPa, com um

coeficiente de variação $V_{fc} = 0,10$. Os valores médios do módulo de deformação longitudinal, E_{cm} , e da resistência à tração do concreto, f_{tm} , são obtidos através das correlações apresentadas no CEB/90[6]. O coeficiente de variação do módulo, V_{Ec} , é tomado igual a V_{fc} . Entretanto, para o coeficiente de variação da resistência à tração, V_{ft} , admite-se um valor igual a $2V_{fc}$, para levar em conta a maior variabilidade desta propriedade. As propriedades do concreto são correlacionadas de acordo com a função de autocorrelação dada na equação (5), tomando-se um comprimento de correlação $\eta = 100$ cm. As cargas são determinísticas nestes exemplos. Um total de 50 simulações foram suficientes neste problema.

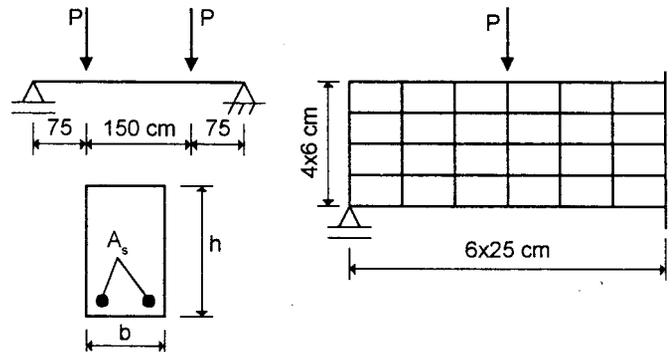


Figura 1: Geometria e malha de elementos finitos

Na figura 2 apresenta-se a relação carga-valor esperado da flecha para as vigas da série RC-75, juntamente com os pontos obtidos experimentalmente. Indica-se, também, a faixa correspondente a uma probabilidade de ocorrência de 98%. Resultados similares foram obtidos para as outras séries de vigas, o que valida o modelo computacional empregado.

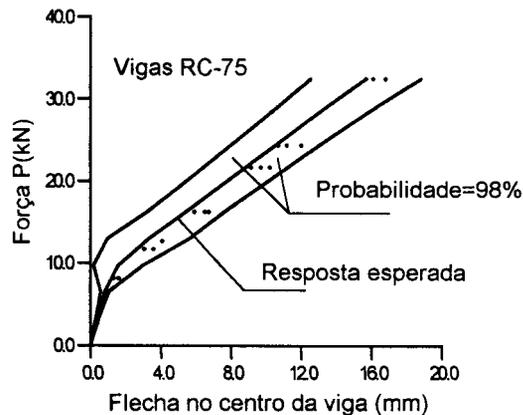


Figura 2: Faixa da resposta (vigas RC-75)

Na figura 3, são apresentados os coeficientes de variação da flecha em função do nível de cargas. Esta figura mostra que o coeficiente de variação é maior na fase de formação e de estabilização das fissuras, quando a resistência à tração tem uma importância significativa na resposta da estrutura. Observa-se que quanto maior for a taxa de armadura (vigas RC-200), menor é o coeficiente de variação. Isto vem confirmar a maior importância do concreto em tração na resposta de peças fletidas sub-armadas. Após o estágio de estabilização das fissuras, o coeficiente de variação das flechas é aproximadamente igual ao coeficiente de variação da resistência à compressão do concreto.

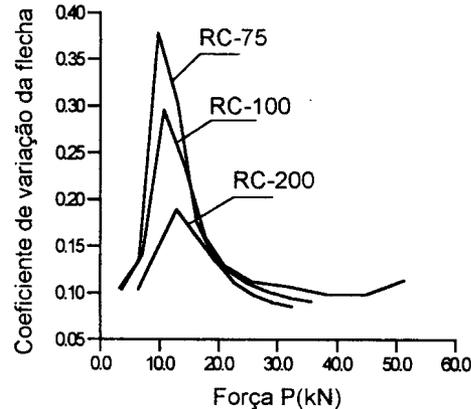


Figura 3: Coeficiente de variação da flecha em função do nível de carga

DETERMINAÇÃO DO ÍNDICE DE CONFIABILIDADE

Os critérios de projeto empregados são os recomendados pelo CEB. Os fatores parciais de segurança adotados são os seguintes: resistência à compressão do concreto, $\gamma_c = 1,50$; tensão de escoamento do aço, $\gamma_s = 1,15$; cargas permanentes, $\gamma_G = 1,35$; cargas variáveis, $\gamma_Q = 1,50$. O dimensionamento das armaduras longitudinais da viga é feito de acordo com os critérios do CEB/78, empregando-se o diagrama retangular simplificado para o concreto. As armaduras transversais também são calculadas de acordo com o CEB/78[5].

A viga analisada é biapoiada com uma carga uniformemente distribuída $p = G + Q$, onde G e Q representam as parcelas permanente e variável da carga. A seção transversal e a discretização da metade da viga são as mesmas indicadas na figura 1. O vão é igual a 3,00 m.

Na análise admite-se que as armaduras possuem uma tensão de escoamento característica $f_{yk} = 500$ MPa com coeficiente de variação $V_{fy} = 0,05$, o que resulta em uma tensão de escoamento média $f_{ym} = 545$ MPa. A resistência característica à compressão do concreto é $f_{ck} = 20$ MPa, com três valores para o seu coeficiente de variação V_{fc} . O coeficiente de variação da carga permanente é $V_G = 0,1$ e para a carga variável adota-se $V_Q = 0,3$. Os coeficientes de variação das dimensões são tomados iguais a $0,2V_{fc}$ e os demais dados são os mesmos apresentados anteriormente. Na tabela II indicam-se os valores

característicos (G_k, Q_k) e os valores médios (G_m, Q_m) das cargas para as três hipóteses de carregamento consideradas.

Tabela II - Cargas na viga (kN/m)

Caso	G_k	Q_k	G_m	Q_m
a	10	3	8,58	2,00
b	10	7	8,58	4,69
c	30	21	25,76	14,06

Na figura 4 são representados os índices de confiabilidade obtidos para os casos de carregamento a e b indicados na tabela II. Observa-se que os índices de confiabilidade para o caso b são menores do que os correspondentes ao caso a devido à maior variabilidade do carregamento total no caso b. Observa-se, também, que o índice de confiabilidade diminui com o aumento da variabilidade da resistência à compressão do concreto. Verifica-se, assim, que a adoção de valores fixos para os fatores parciais de segurança leva a diferentes níveis de segurança, dependendo da variabilidade das variáveis básicas de projeto.

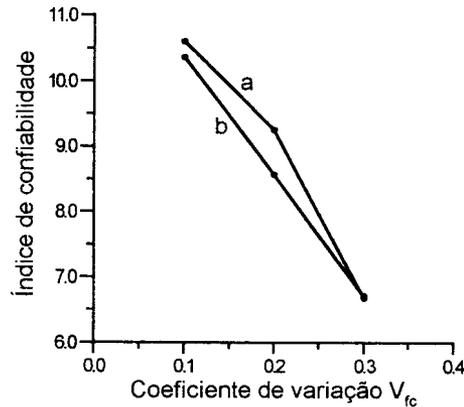


Figura 4: Variação do índice de confiabilidade em função da variabilidade da resistência do concreto

Para os casos de carregamentos a e b, o menor valor do índice de confiabilidade foi igual a 6,7. No caso c, esse valor caiu para 5,8 para um coeficiente de variação da resistência do concreto igual a 0,30. As cargas totais dos casos b e c possuem o mesmo coeficiente de variação. Porém, no caso c o máximo esforço cortante é 3 vezes superior ao do caso b, fazendo com que a capacidade de carga da viga seja reduzida. De fato, no caso c a tensão de cisalhamento de cálculo, igual a 3,33 MPa, é muito próxima da máxima tensão permitida pelo CEB/78, que é igual a 4,00 MPa. Entretanto, mesmo neste caso extremo, o índice de confiabilidade é bastante alto, indicando uma probabilidade de falha muito pequena.

CONCLUSÕES

Neste trabalho, empregou-se o método de Monte Carlo para a análise probabilística de vigas de concreto armado. Através de simulações, foi possível definir faixas onde a resposta estrutural deva se situar com uma dada probabilidade.

A análise realizada indicou que a variabilidade das deformações de vigas de concreto armado é bastante acentuada na fase de formação e de estabilização das fissuras. Essas variações tendem a reduzir com o aumento da armadura longitudinal de tração. Portanto, a previsão da carga de fissuração é uma tarefa que requer uma cuidadosa modelagem das variáveis aleatórias envolvidas.

A metodologia foi usada para avaliar o grau de segurança obtido empregando-se os fatores parciais de segurança recomendados pelo CEB. Os resultados indicaram que o índice de confiabilidade diminui com o aumento da variabilidade das variáveis aleatórias básicas adotadas no projeto. Em especial, a variabilidade da resistência à compressão do concreto tem uma importância acentuada no nível de segurança.

Em vista disto, é natural introduzir coeficientes parciais de segurança dependentes da variabilidade das propriedades dos materiais e das cargas atuantes na estrutura. Assim, o coeficiente de minoração da resistência do concreto, por exemplo, pode ser alterado em função do grau de controle adotado na execução da estrutura. O estudo realizado indicou que, mesmo em casos extremos de carregamento e de variabilidade das propriedades do concreto, o índice de confiabilidade foi superior a 5. Essa informação, apesar de qualitativa, permite concluir que o nível de segurança é bastante elevado.

REFERÊNCIAS

- [1]Liu, W. K.; Belytschko, T.; Mani, A., *Random field finite elements*. International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol.23, p.1831-1845, 1986.
- [2]Benaroya, H.; Rehak, M., *Finite element methods in probabilistic structural analysis: A selective review*. Applied Mechanics Review, Vol.41, N.5, p.201-213, 1988.
- [3]Yamazaki, F.; Shinozuka, M.; Dasgupta, G., *Neumann expansion for stochastic finite element analysis*. Journal of Engineering Mechanics, Vol.114, N.8, p.1335-1355, 1988.
- [4]Araújo, J. M.; Awruch, A. M., *On stochastic finite elements for structural analysis*. Computers and Structures, Vol.52, N.3, p.461-469, 1994.
- [5]Comite Euro-International du Béton - *Code-modèle CEB/FIP pour les structures en béton*. Paris, 1978.
- [6]Comite Euro-International du Béton - *CEB/FIP Model Code 1990*. Lausanne, 1993.
- [7]Ang, A.H.S.; Tang, W.H. - *Probability Concepts in Engineering Planning and Design*, Vol. 2, John Wiley & Sons, New York, 1984.
- [8]Araújo, J. M.; Campos Filho, A., *Modelo bidimensional para análise de vigas de concreto armado*. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas, N.34, p.9-12, Lisboa, Julho, 1992.
- [9]Schegg, A.; Decanini, L., *Sobre las deformaciones en elementos de hormigon armado*. Jornadas Sulamericanas de Engenharia Estrutural, Anais, Vol.2, pp.1070-1120, Porto Alegre, 1971.