

CAMBIO DE TRAYECTORIA EN PUNTOS CRÍTICOS BASADO EN APROXIMACIONES ASINTÓTICAS CUADRÁTICAS

Fernando G. Flores¹

Departamento de Estructuras, F.C.E.F. y N.

Universidad Nacional de Córdoba

Casilla de Correos 916, 5000 Córdoba-Argentina

RESUMEN

En el presente trabajo se muestra como utilizar algunos resultados de la teoría general de estabilidad elástica de sistemas discretos, en el cambio de trayectoria en problemas de bifurcación. Las aproximaciones asintóticas consideradas son de segundo orden y conducen a un algoritmo robusto que permite considerar incrementos relativamente grandes en el cambio de trayectoria. Se presentan varios ejemplos para mostrar la calidad de las aproximaciones obtenidas

ABSTRACT

The present work shows how to use known results from the general theory of elastic stability of discrete systems, for switching paths in bifurcation problems. Second order asymptotic approximations are considered leading to a robust algorithm, allowing relative large steps. Some examples are considered showing the performance of the approximations used.

INTRODUCCIÓN

Los fenómenos de bifurcación y pérdida de estabilidad son comunes en la literatura de la mecánica no lineal de sólidos continuos. Consideremos un sistema mecánico definido (a partir de una aproximación discreta como el método de elementos finitos) por un número finito de variables cinemáticas q_i agrupadas en un vector $\mathbf{q} \in \mathfrak{R}^n$ y un parámetro λ que define el valor de las acciones externas, tal que interesa conocer el conjunto de puntos $(\mathbf{q}, \lambda) \in \mathfrak{R}^n \times \mathfrak{R}$ (trayectorias de equilibrio) que satisfacen

$$\mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) = 0 \quad (1)$$

Sin pérdida de generalidad partiremos de un punto de referencia conocido (normalmente correspondientes al par $(\mathbf{g}, \lambda) = (0, 0)$) que satisface (1) por el cual pasa una sola trayectoria de equilibrio, a la que denominaremos trayectoria primaria o fundamental.

¹Investigador de CONICET y Profesor Universidad Nacional de Córdoba.

Para la solución punto a punto de la trayectoria fundamental se recurre en general a técnicas de Newton-Raphson, en general combinadas con algoritmos de continuación que le proveen robustez al método y permiten trazar curvas fuertemente no lineales incluyendo puntos límites (extremos) asociados al parámetro de carga y/u otras variables cinemáticas fundamentales o derivadas [1-2].

Entenderemos por puntos regulares aquellos donde el determinante del Hessiano del sistema de ecuaciones es distinto de cero

$$|\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda)| \neq 0 \quad (2)$$

por ellos puede pasar sólo una trayectoria de equilibrio. Llamaremos puntos singulares o críticos a aquellos donde se anula el determinante

$$|\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda)| = 0 \quad (3)$$

que es la condición necesaria para que en el punto se crucen dos (o más) trayectorias de equilibrio. Los puntos críticos pueden a su vez clasificarse en [3] puntos límites (no asociados a un cruce de trayectorias), y en puntos de bifurcación, donde la trayectoria fundamental en este caso es cortada por otra(s) trayectoria(s) de equilibrio.

En particular aquí nos restringiremos a puntos críticos simples, es decir aquellos donde el Hessiano tiene nulidad 1, y no consideraremos puntos de singularidad múltiple. En los puntos críticos denominaremos por φ al único (auto)vector que satisface

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \varphi &= 0 \\ \varphi_i &= 1 \end{aligned} \quad (4)$$

donde i es un grado de libertad convenientemente elegido (normalmente el de componente de mayor valor absoluto en φ).

La distinción entre puntos límites y de bifurcación se logra a través de la condición

$$\begin{aligned} \nabla_{\lambda} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \cdot \varphi &\neq 0 && \text{punto límite} \\ \nabla_{\lambda} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \cdot \varphi &= 0 && \text{bifurcación} \end{aligned} \quad (5)$$

En el análisis de problemas de bifurcación en mecánica de sólidos hay básicamente dos estrategias posibles: a) incluir una pequeña imperfección geométrica o en el sistema de solicitaciones, transformando el problema a uno sin bifurcación pero muy cercano al original, y seguir dicha trayectoria imperfecta mediante técnicas de continuación; b) avanzar hasta el cruce de trayectorias detectando este punto con alguna técnica adecuada y cambiar a la rama de interés.

La primera es como normalmente funciona los sistemas estructurales que inevitablemente tienen imperfecciones, pero es conceptualmente menos interesante debido a que se pierde información referida al punto crítico. La segunda es conceptualmente más rica y permite clasificar el comportamiento desde el punto de vista de la teoría de estabilidad elástica usando las herramientas que ésta provee. En muchos problemas de ingeniería un conocimiento detallado de la trayectoria secundaria o poscrítica carece de importancia práctica debido a la magnitud de los desplazamientos involucrados que dejan fuera de servicio al sistema. Muchas veces es suficiente el conocimiento del comportamiento inicial de

la rama secundaria. Existe una importante literatura dedicada al análisis asintótico de la trayectoria poscrítica con el objeto de clasificarla mediante técnicas analíticas, numéricas y mixtas [4]. Esta clasificación está referida no sólo a la estabilidad sino principalmente a la sensibilidad de los niveles máximos de sollicitación de sistemas imperfectos.

La detección precisa del punto crítico sobre la trayectoria fundamental puede hacerse de diferentes formas; el método más eficiente es tal vez a través de sistema extendidos [5] y su solución en combinación con el algoritmo de borde.

El paso de una trayectoria a otra, una vez detectada la bifurcación, se realiza con las mismas técnicas de continuación utilizadas en el resto del proceso pero con una adecuada predicción de la posición de equilibrio que satisfaga convergencia posterior sobre la rama de interés. Se han propuesto distintos esquemas predictores, más o menos complejos, todos en general basados en los resultados generales de la estabilidad elástica de sistemas discretos [1].

SISTEMAS EXTENDIDOS PARA LA DETERMINACION DE PUNTOS CRÍTICOS

Las condiciones que satisface un punto crítico están definidas por (1) y (3) o alternativamente por (1) y (4). La denominación de "extendidos" proviene de aumentar el sistema de ecuaciones con que se trabaja en puntos regulares (1) en una ecuación adicional (3) o con un conjunto de ecuaciones adicionales (4). Si bien a primera vista la primera posibilidad parece más aliviada, la segunda resulta más conveniente computacionalmente y el volumen de cálculo no es muy superior a una iteración normal de Newton Raphson en los puntos regulares. En definitiva el conjunto de ecuaciones que interesa resolver es:

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) &= \mathbf{0} \\ \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \boldsymbol{\varphi} &= \mathbf{0} \\ \varphi_i - 1 &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Es bien sabido que el método de Newton-Raphson aplicado sobre (6₁) tiene convergencia cuadrática, sin embargo en la cercanía de un punto crítico aparecen problemas numéricos importantes debido a que el Hessiano es casi singular, ya que esa es precisamente la condición buscada. Una forma de regularizar el sistema es usando penalización. Agregaremos a (6₁) el término

$$\gamma \delta_i (\delta_i^T \mathbf{q} - \mu) \equiv \gamma \delta_i (q_i - \mu)$$

donde γ es el coeficiente de penalización, δ_i es un vector con componentes nulas salvo la i que vale 1 y μ es una nueva variable que mide el avance de la componente q_i sobre la trayectoria fundamental. Para que la solución del nuevo sistema no difiera del original agregamos la condición

$$(\delta_i^T \mathbf{q} - \mu) \equiv (q_i - \mu) = 0$$

y con objeto de regularizar el Hessiano asociado a (6₂) adicionaremos a este conjunto de ecuaciones el término

$$\gamma \delta_i (\delta_i^T \boldsymbol{\varphi} - 1) \equiv \gamma \delta_i (\varphi_i - 1)$$

En definitiva el conjunto de ecuaciones a resolver $[G(\mathbf{q}, \varphi, \lambda, \mu)]$ tiene la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) + \gamma \delta_i (\delta_i^T \mathbf{q} - \mu) &= 0 \\ \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \varphi + \gamma \delta_i (\delta_i^T \varphi - 1) &= 0 \\ (\delta_i^T \varphi - 1) &= 0 \\ (\delta_i^T \mathbf{q} - \mu) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Las modificaciones introducidas no son, por supuesto, la única posibilidad [6]. El método de Newton-Raphson conduce al sistema linealizado

$$\begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g} + \gamma \delta_i^T \delta_i & 0 & \nabla_{\lambda} \mathbf{g} & \gamma \delta_i \\ \nabla_{\mathbf{q}} (\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g} \cdot \varphi) & \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g} + \gamma \delta_i^T \delta_i & 0 & 0 \\ 0 & \delta_i^T & 0 & 0 \\ \delta_i^T & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{q} \\ \Delta \varphi \\ \Delta \lambda \\ \Delta \mu \end{bmatrix} = [G(\mathbf{q}, \varphi, \lambda, \mu)] \quad (8)$$

Como es habitual en la terminología del Método de Elementos Finitos, llamaremos

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_T &= \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \\ \mathbf{f} &= -\nabla_{\lambda} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) \\ \bar{\mathbf{K}}_T &= \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{g}(\mathbf{q}, \lambda) + \gamma \delta_i \delta_i^T \end{aligned} \quad (9)$$

El sistema de ecuaciones linealizado no se resuelve en forma simultánea, sino utilizando el algoritmo de borde, de forma que:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q} &= \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} [-\mathbf{g} - \gamma \delta_i (q_i - \mu) + \Delta \lambda \mathbf{f} + \gamma \delta_i \Delta \mu] \\ &= \Delta \lambda \Delta \mathbf{q}_1 + \Delta \mathbf{q}_2 + \Delta \mu \Delta \mathbf{q}_3 \end{aligned} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \Delta \varphi &= -\bar{\mathbf{K}}_T^{-1} [\bar{\mathbf{K}}_T \varphi + \gamma \delta_i + \nabla (\mathbf{K}_T \varphi) \Delta \mathbf{q}] \\ &= -\varphi + \Delta \mathbf{q}_3 + \Delta \lambda \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 + \Delta \mu \mathbf{p}_3 \end{aligned} \quad (11)$$

donde

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{q}_1 &= \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{f} \\ \Delta \mathbf{q}_2 &= \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} [-\mathbf{g} - \gamma \delta_i (q_i - \mu)] \\ \Delta \mathbf{q}_3 &= \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \gamma \delta_i \\ \mathbf{p}_j &= -\bar{\mathbf{K}}_T^{-1} [\nabla (\mathbf{K}_T \varphi) \Delta \mathbf{q}_j] \end{aligned} \quad (12)$$

Finalmente, llevando (10) y (11) a las dos ecuaciones escalares restantes es posible determinar $\Delta \lambda$ y $\Delta \mu$. Debe hacerse notar que estas dos ecuaciones finales no está exentas de problemas numéricos ya que al acercarse a convergencia, en muchos casos se malcondiciona debido a la propia singularidad del sistema original.

APROXIMACIONES ASINTÓTICAS

Obtenido el punto crítico, resulta necesario estudiar el comportamiento de las trayectorias de equilibrio que pasan por el mismo, que para el caso que nos ocupa son dos en bifurcaciones y sólo una para puntos límites. Este estudio se resume a evaluar las derivadas (1ra y 2da) de las trayectorias, lo que nos permita

- a) Estudiar la estabilidad del sistema y predecir el comportamiento poscrítico inicial, así como la sensibilidad de las cargas límites de los sistemas imperfectos
- b) Realizar una predicción adecuada para que el próximo paso converja (rapidamente) a la trayectoria secundaria.

Elejimos como parámetro respecto al cual calcular las derivadas a la componente q_i (la de mayor valor absoluto en φ_i). En tal caso aplicando la técnica de perturbaciones a (1) tendremos los siguientes grupos de ecuaciones, todas evaluadas en el punto crítico [7-8]

$$\mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} - \lambda^{(1)} \mathbf{f} = 0 \quad (13)$$

$$\mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(2)} - \lambda^{(2)} \mathbf{f} = -\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} \quad (14)$$

$$\mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(3)} - \lambda^{(3)} \mathbf{f} = -\nabla_{\mathbf{q}} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T] \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} - 3 \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(2)} \quad (15)$$

donde con $(\cdot)^{(n)}$ definimos la n-ésima derivada respecto a q_i . Por otro lado premultiplicando cada grupo de ecuaciones por φ^T , tendremos las siguientes ecuaciones escalares (recordando además (4))

$$-\lambda^{(1)} \varphi^T \mathbf{f} = 0 \quad (16)$$

$$-\lambda^{(2)} \varphi^T \mathbf{f} + \varphi^T \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} = 0 \quad (17)$$

$$-\lambda^{(3)} \varphi^T \mathbf{f} + \varphi^T \nabla_{\mathbf{q}} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T] \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} - 3 \varphi^T \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(2)} = 0 \quad (18)$$

La solución de (13) puede escribirse

$$\mathbf{q}^{(1)} = \varphi + \lambda^{(1)} \mathbf{y} \quad (19)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{y}} &= \bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \mathbf{f} \\ \mathbf{y} &= \bar{\mathbf{y}} - \bar{y}_i \varphi \end{aligned} \quad (20)$$

Similarmente la solución de (14) puede escribirse

$$\mathbf{q}^{(2)} = \mathbf{z} + \lambda^{(2)} \mathbf{y} \quad (21)$$

donde

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{z}} &= -\bar{\mathbf{K}}_T^{-1} \nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)} \mathbf{q}^{(1)} \\ \mathbf{z} &= \bar{\mathbf{z}} - \bar{z}_i \varphi \end{aligned} \quad (22)$$

Para el caso de punto límite ($\varphi^T \mathbf{f} \neq 0$) la solución se completa de la siguiente manera a partir de (16) y (17)

$$\lambda^{(1)} = 0 \quad (23)$$

$$\lambda^{(2)} = \frac{\varphi^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \mathbf{q}^{(1)}] \mathbf{q}^{(1)}}{\varphi^T \mathbf{f}} \quad (24)$$

Para el caso de bifurcación ($\varphi^T \mathbf{f} = 0$), reemplazando (19) en (17) obtenemos una ecuación cuadrática en $\lambda^{(1)}$ donde cada raíz corresponde a cada una de las trayectorias que se cortan:

$$\begin{aligned} \mathbf{y}^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{y} \lambda^{(1)^2} + 2\mathbf{y}^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \varphi \lambda^{(1)} + \varphi^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \varphi &= 0 \\ A\lambda^{(1)^2} + 2B\lambda^{(1)} + C &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

Si $C = 0$ entonces $\lambda^{(1)} = 0$ es solución, luego $\mathbf{q}^{(1)} = \varphi$ y la bifurcación es del tipo "simétrica", si no es "asimétrica".

Para el cálculo de $\lambda^{(2)}$, se sigue el mismo procedimiento, reemplazando (21) en (18) resulta ahora para la rama secundaria

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\varphi^T [\nabla_{\mathbf{q}} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \varphi] \varphi + 3\varphi^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{z}}{3\varphi^T [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{y}} \quad (\text{simétrica}) \quad (26)$$

$$\lambda^{(2)} = -\frac{\mathbf{q}^{(1)T} [\nabla_{\mathbf{q}} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{q}^{(1)}] \mathbf{q}^{(1)} + 3\mathbf{q}^{(1)T} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{z}}{3\mathbf{q}^{(1)T} [\nabla_{\mathbf{q}} \mathbf{K}_T \varphi] \mathbf{y}} \quad (\text{asimétrica}) \quad (27)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

En este apartado se presentan algunos resultados obtenidos con las técnicas descritas en los apartados anteriores. Los ejemplos aquí presentados han sido analizado con elementos de lámina (bi y tridimensionales) desarrollados en base a los trabajos de Simo y coautores [9-10], cuya comportamiento ha sido presentado en las Referencias [11-12].

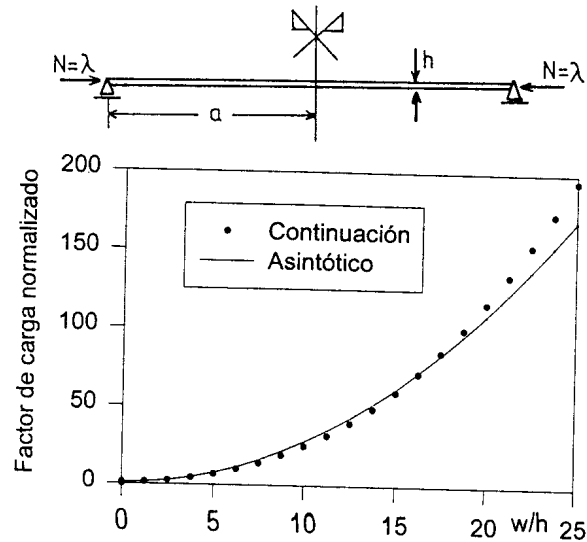


Figura 1: Placa circular uniformemente comprimida

Placa circular comprimida

Como primer ejemplo consideremos un ejemplo clásico en la literatura de estabilidad elástica asociado a una bifurcación simétrica estable. Una placa circular simplemente apoyada en el contorno y uniformemente comprimida (Fig.1.a. El espesor es $h = 0.01$, el radio es $a = 10$, y el material tiene como constantes elásticas $E = 10^6$ y $\nu = 0.3$. La solución analítica [3] usando funciones de Bessel conduce a una carga crítica de $\lambda = 0.00384432$ y la derivada segunda del parámetro de carga respecto al desplazamiento transversal en el centro es $\lambda^{(2)} = 20.778$. Usando 5 elementos cuadráticos (de lámina de revolución) se ha obtenido $\lambda = 0.00384407$ y $\lambda^{(2)} = 20.781$. En la Fig.1.b se muestra la trayectoria poscrítica usando técnicas de continuación y la aproximación asintótica, donde en el eje de abscisas se han normalizado los desplazamientos respecto al espesor de la placa y en ordenadas el factor de carga ha sido normalizado respecto al valor crítico. En dos pasos se llega al punto crítico, y de allí se pasa a la rama poscrítica usando un incremento que puede ser de hasta 25 veces el espesor de la lámina. Es decir que el último punto graficado, que corresponde a un factor de carga de casi 200 veces la carga de bifurcación, puede obtenerse en un sólo paso una vez obtenido el punto crítico.

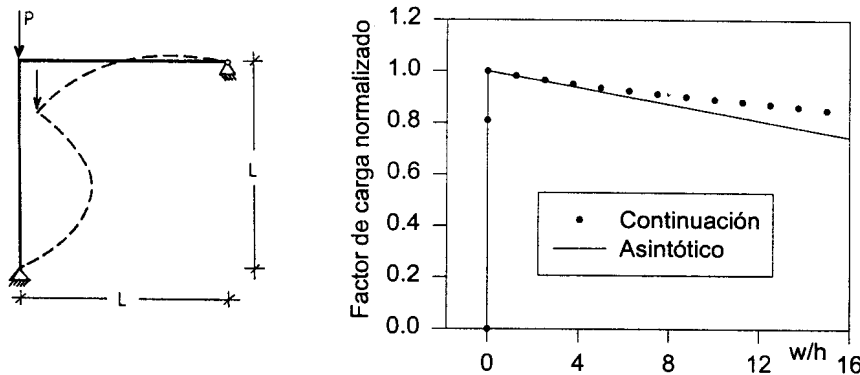


Figura 2: Marco asimétrico

Pórtico asimétrico

Este segundo ejemplo ha sido objeto de múltiples análisis tanto analíticos como experimentales [13]. Aquí se ha usado la siguiente geometría (ver Fig.2.a), longitud de los tramos $L = 10$ y sección cuadrada de 0.2×0.2 , en tanto que las propiedades del material son $E = 10^6$ y $\nu = 0.3$. El comportamiento en este caso corresponde a una bifurcación asimétrica, correspondiendo la rama inicialmente inestable a un desplazamiento del parante vertical hacia la derecha. En la Fig.2.b se muestran las curvas normalizadas correspondientes a la trayectoria inestable. Nuevamente resulta importante señalar que el último punto graficado (que corresponde a la geometría deformada indicada en la Fig.2.a) puede obtenerse en un sólo paso una vez determinado el punto crítico. La carga crítica obtenida fue $\lambda^C = 1.8494$; la derivada primera del parámetro de carga respecto al desplazamiento horizontal del punto ubicado a la mitad del parante en este caso $\lambda^{(1)} = -0.14581$. En la discretización se han utilizado 5 elementos cuadráticos para cada segmento.

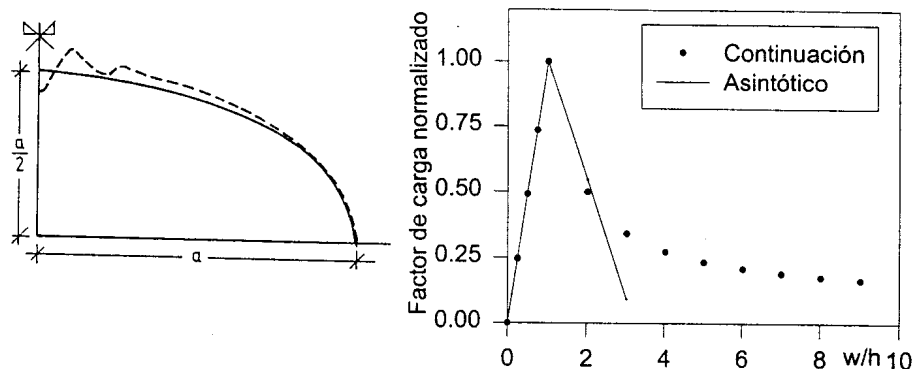


Figura 3: Cierre elipsoidal con presión externa. $a = 750$, $h = 1$, $E = 10^6$, $\mu = 0.3$. (a) geometría y forma del modo crítico. (b) Trayectoria poscrítica.

Domo elíptico

Este ejemplo corresponde a un cierre elipsoidal sometido a presión externa (Fig.3.a), analizado previamente por otros autores en forma asintótica y mediante técnicas de continuación [8,14]. El comportamiento poscrítico es axilsimétrico por lo que puede analizarse con elementos de lámina de revolución. Se utilizaron 27 elementos cuadráticos en la discretización. La carga crítica obtenida es $\lambda^C = 0.5513$, y corresponde a una bifurcación asimétrica, el modo de bifurcación puede verse también en la Fig.3.a. La derivada primera del parámetro de carga respecto al descenso del vértice del domo es $\lambda^{(1)} = -0.25$. En la (Fig.3.b) se muestran las trayectorias de equilibrio. El radio de convergencia de la aproximación asintótica es en este caso más pequeño que en los casos anteriores, aquí nos hemos limitado a una aproximación de primer orden, un análisis más detallado del mismo ejemplo incluyendo aproximaciones cuadráticas y sensibilidad a imperfecciones puede verse en la Ref.[8]. En el cambio de trayectoria es posible lograr convergencia con un paso de avance de hasta 8 veces el espesor de la lámina.

Viga en forma de L

Este ejemplo ha sido analizado numerosas veces en la literatura, corresponde a una viga en ángulo recto empotrada en un extremo y sometida a una carga coplanar en el extremo libre. Aquí ha sido discretizada con elementos de lámina tridimensionales (alternativamente con 68 cuadriláteros de cuatro nodos y 34 triángulos de 6 nodos). El comportamiento es lineal hasta el punto de bifurcación (simétrico estable) con un comportamiento posterior también estable para la dirección de carga elegida. En la Fig.4.a se ve la geometría indeformada y las deformadas en el primer paso posterior al punto crítico (En la discretización con triángulos se ha dividido cada triángulo cuadrático en 4 triángulos cuadráticos para visualización). El comportamiento corresponde a una bifurcación simétrica estable y la derivada segunda de la carga $\lambda^{(2)}$, es positiva pero muy baja. En la Fig.4.b se ven las trayectorias de equilibrio para el desplazamiento fuera del plano del punto de mayor desplazamiento del borde libre. El primer punto del cambio de trayectoria corresponde a incrementos de desplazamientos mayores a 40 veces el espesor

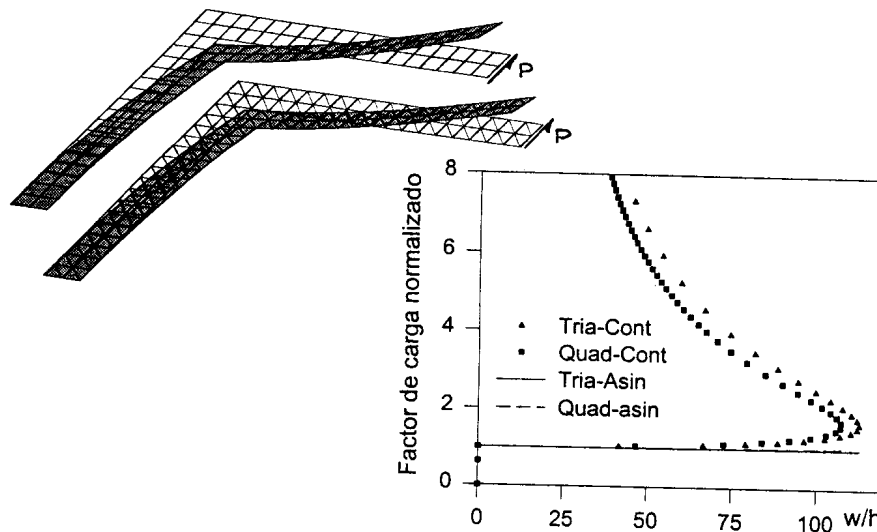


Figura 4: viga en ángulo recto con carga coplanar. (a) geometría y deformada poscrítica. (b) Trayectorias poscríticas.

Panel cilíndrico

Como último ejemplo se presenta un caso de punto límite. En la Fig. 5.a se muestra la geometría del problema y en la Fig. b las trayectorias de equilibrio. El problema de punto límite no es de especial interés, ya que no hay cambio de trayectoria, el ejemplo presentado es a los efectos de mostrar la aproximación asintótica.

CONCLUSIONES

De los ejemplos presentados puede concluirse que la utilización de aproximaciones a asintóticas cuadráticas permiten cambios de trayectoria con facilidad avanzando rápidamente sobre la trayectoria poscrítica.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido financiado con subsidios otorgados por CONICET y CONICOR.

REFERENCIAS

1. E.Riks "Some Computational Aspects of the Stability Analysis of Nonlinear Structures", *Compt. Meth. Appl. Mech. & Engng.* 4(1984) 219-59.
2. M.A.Crisfield "A Fast Incremental Iterative Procedure that Handles Snap-Through", *Computers & Structures* 13 (1981) 55-62.

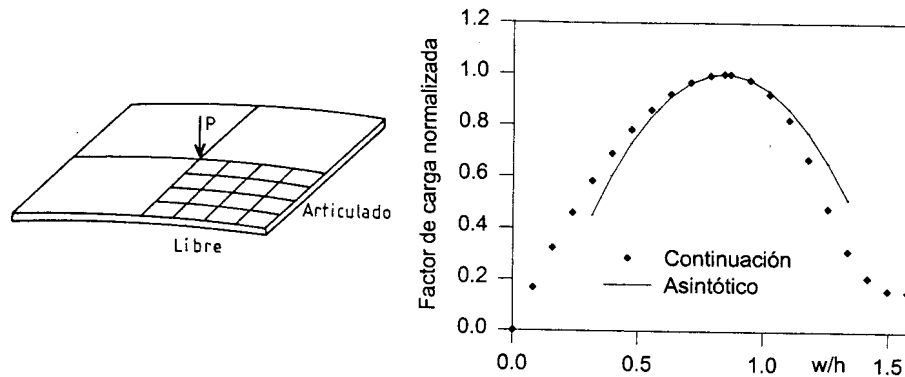


Figura 5: Panel cilíndrico con carga puntual, $h = 12.7$, $R = 2540$, $E = 3.10275$, $\mu = 0.3$.
(a) geometría. (b) Trayectoria poscrítica.

3. J.M.T. Thompson y G.W.Hunt *A General Theory of Elastic Stability*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
4. F.G.Flores *Análisis no lineal geométrico y estabilidad elástica de láminas de revolución mediante elementos finitos con aplicaciones a recipientes de presión*, Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, 1990.
5. P.Wriggers y J.C.Simo "A General Procedure for the Direct Computation of Turning and Bifurcation Points", *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **30** (1990) 155-176.
6. A.Cardona y A.Huespe "Nonlinear Path Following with Turning and Bifurcation Points in Multibody Systems Analysis", *J. of Multibody Systems Dynamics* (1996).
7. F.G.Flores y L.A.Godoy "Elastic Postbuckling Analysis via Finite Elements and Perturbation Techniques. Part I: Formulation", *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **33** (1992) 1775-1794.
8. F.G.Flores y L.A.Godoy "Elastic Postbuckling Analysis via Finite Elements and Perturbation Techniques. Part I: Application to Shells of Revolution", *Int. J. Num. Meth. in Engng.* **36** (1993) 331-354.
9. J.C.Simo y D.D.Fox "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part I: Formulation and Optimal Parametrization", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **72**(1989) 267-304.
10. J.C.Simo, D.D.Fox y M.S.Rifai, "On Stress Resultant Geometrically Exact Shell Model. Part III: Computational Aspects of The Nonlinear Theory", *Comput. Meths. Appl. Mech. Engrg.* **79**(1990) 21-70.
11. F.G.Flores, E.Oñate y F.Zárate, "New Assumed Strain Triangles for Non-linear Shell Analysis", *Computational Mechanics* **17** (1995) 107-114.
12. F.G.Flores "Two-dimensional Shell Element for Nonlinear Analysis", *Applied Mechanics Reviews* **48**(11-part 2) (1995) 30-35.
13. J.Roorda "Stability of Structures with Small Imperfections", *J. Engng. Mech. Div. ASCE* **91** (1965) 87-97.
14. D.A.Danielson "Buckling and Initial Postbuckling Behaviour of Spheroidal Shells Under Pressure", *AIAA J* **7** (1969) 936-944.