

## ESTUDIO DE PLATEAS DE FUNDACION MEDIANTE METODOS NUMERICOS

Ing. Juan Carlos Paloto – Ing. Roberto Dardo Santos

Departamento de Ingeniería  
Universidad Nacional del Sur  
Bahía Blanca  
Argentina

### RESUMEN

El análisis de placas apoyadas sobre fundación elástica considerando diferentes factores complicantes puede ser desarrollado por varios métodos numéricos.

El método de las diferencias finitas es empleado en el presente estudio para analizar el comportamiento de placas delgadas, elásticas de espesor constante para expresar los desplazamientos según una característica adoptada de diseño para generalizar los resultados.

El sistema de ecuaciones lineales planteado se resuelve utilizando MATH-PLOT.

Finalmente un método numérico basado en integraciones polinómicas se emplea para evaluar la capacidad de soporte de los elementos del dispositivo estructural. El tratamiento permite la rápida evaluación de posibles modificaciones en dicho sistema estructural.

### ABSTRACT

The analysis of plates resting on elastic foundation taking into account different complicating factors may be performed by several numerical methods. The finite differences method is employed in the present study to analyze the behavior of thin, elastic plate of uniform thickness to state displacements by an adopted characteristic of design to generalize the results.

The system of resulting linear equations is solved using MATHPLOT.

Finally a numerical method based on polinomic integration is used to evaluate the support capacity of the elements of the structural device.

The approach allows for the fast evaluation of possible modifications in such a system.

## Introducción

Para la determinación de la capacidad de soporte de las estructuras de fundación, es necesario conocer los asentamientos previsibles según el tipo de suelo o material de subrasante. En el caso de placas o plateas de fundación sobre suelos asentables es posible anticipar un asentamiento final que resulte compatible con las condiciones impuestas al problema estructural. Como alternativa de diseño puede resultar conveniente completar el dispositivo de fundación mediante elementos de borde capaces de absorber parte de la carga y limitar los asentamientos a valores propuestos como admisibles.

El tratamiento del problema de determinación de asentamientos de fundaciones para los métodos de las diferencias finitas (D.F.) o de los elementos finitos (M.E.F.) tiene amplios antecedentes en la bibliografía especializada [1] [2]. Sin embargo si el diseño de estas estructuras establece un dispositivo combinado de partes aún pueden ampliarse las posibilidades de predicción mediante la aplicación de Métodos de Cálculo Numérico con programación adecuada para computación. En principio se muestra un desarrollo en un caso de aplicación en el que se logra un resultado generalizado a partir de la definición de una característica adimensional del problema.

## **Criterio de Aplicación Práctica**

### **Ejemplo**

Como ejemplo de aplicación se ha tomado una placa aislada a la que se ha establecido la conveniencia de confinar en una viga de borde sobre todo el perímetro

El enfoque general del problema requiere:

- a) Formular la hipótesis de la distribución de las cargas.
- b) Tener establecido el tipo de suelo o subrasante con la expresión analítica del tipo de reacción de soporte. [3].  
La generalización de los resultados se busca según los parámetros que intervengan en esa expresión.
- c) Formular las condiciones de borde para la placa en las uniones con los demás elementos del dispositivo de fundación. En este ejemplo son las vigas de borde. Inicialmente se ha considerado:

Para a) una carga total  $q$  [ $T/m^2$ ] que permite obtener resultados generales directamente. También si  $q$  tiene ley lineal de variación.

Para b) se toma un suelo con coeficiente de reacción  $k$  [ $Kf/cm^2$ ] constante.

Si su ley de comportamiento es lineal también se obtienen resultados directos.

De no ser así se deberá reiterar el proceso por iteración.

Para c) La condición de borde adoptada será de apoyo simple. Cualquier otro tipo de condición no afecta las posibilidades de obtener resultados generales, pudiendo considerarse múltiples variantes interesantes de aplicaciones reales.

En las condiciones de diseño señaladas con la aplicación del método de las diferencias finitas se obtienen los valores básicos necesarios para el dimensionado final del sistema. Los parámetros del problema son:

$q$  [ T/m<sup>2</sup> ] carga estimada sobre la placa  
 $D$  [ Kf. cm ] rigidez a la flexión de la placa (a determinar)  
 $k$  [Kf/cm<sup>2</sup>/cm] coeficiente propuesto de reacción del material de base.

Siendo  $w(x,y)$  la función de los asentamientos o desplazamientos verticales de la placa, la ecuación diferencial para su resolución es

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q - k \cdot (w + w_0)}{D} \quad (I)$$

Con  $w_0$  posible asentamiento del borde de la placa. Para la continuación del estudio presente se prevé considerar casos particulares con asentamientos  $w_0$  variables según las condiciones más desfavorables de comportamiento. Si como primera hipótesis se toma  $w_0 = 0$  para el caso en que la viga de borde responda a esa condición, se tiene un ejemplo más simple del método seguido para evaluar la distribución de las cargas en el sistema estructural una vez producidos los asentamientos.

#### Resolucion en Diferencias Finitas:

Desarrollando la ecuación (I) en diferencias finitas, considerando una malla de  $n$  puntos y de ancho uniforme  $s$  también para expresar las condiciones de borde, se plantea un sistema de  $n$  ecuaciones del tipo:

$$C_i \cdot W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_j \cdot W_j = \frac{q \cdot s^4}{D} - \frac{k \cdot s^4}{D} (W_i + W_0) \quad (II)$$

Como versión de la ecuación (I) en diferencias finitas, con  $C_i, C_j$  coeficientes numéricos según el operador adoptado.

Teniendo en cuenta que el planteo se realiza para dimensionar de acuerdo a las condiciones impuestas será conveniente resolver el sistema en términos generales.

En las condiciones del ejemplo de esta aplicación los resultados en  $W_i$  se pueden generalizar definiendo como característica del problema el valor  $N = \frac{k \cdot s^4}{D}$

Constante adimensional en este caso.

Luego el sistema se compondrá de ecuaciones del tipo:

$$(C_i + N) \cdot W_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n C_j \cdot W_j = \frac{q \cdot s^4}{D} - N \cdot W_0 \quad (III)$$

El sistema admite propuestas para los descensos  $W_0$  en los bordes y la determinación posterior de los porcentajes de carga que toman la placa y las vigas de borde.

Como resultado de partida se evaluará esa estimación de cargas variando sólo el valor  $N$  suponiendo que las vigas de borde aseguran la condición  $W_0 = 0$ , (caso de apoyo sobre

pilotes). Ordenando los coeficientes con las prescripciones usuales, se resuelven las ecuaciones mediante el utilitario MATHPLOTT [4]

Correspondiente a un cuarto de malla total debido a la simetría del problema .

Los valores resultantes son:

$$W_i = \frac{\Omega_i \cdot (q - k \cdot W_0) \cdot s^4}{D} \quad (IV)$$

Para las siguientes propuestas de N

N	0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$\Omega_1$	1,9888	1,3910	1,2626	1,1553	1,0642	0,9180	0,8059
$\Omega_2$	1,4304	1,0071	0,9161	0,8400	0,7755	0,6718	0,5922
$\Omega_3$	1,7631	1,2433	1,1314	1,0378	0,9583	0,8306	0,7324
$\Omega_4$	1,2695	0,9015	0,8222	0,7559	0,6995	0,6088	0,5392
$\Omega_5$	1,0812	0,7784	0,7130	0,6581	0,6115	0,5362	0,4781
$\Omega_6$	0,7815	0,5671	0,5208	0,4819	0,4487	0,3953	0,3540

Tabla 1. Valores de  $\Omega_i$  para  $W_0 = 0$

Se observa que esta primera etapa del proceso se podrá repetir en condiciones similares aún si q o N tienen ley lineal de variación.

Estos valores para  $W_j$  permiten la determinación de la capacidad de soporte de la placa y de la viga de borde según las condiciones de desplazamiento prevista para esta última.

La reacción  $R_p$  de soporte de la placa se determina mediante integración;

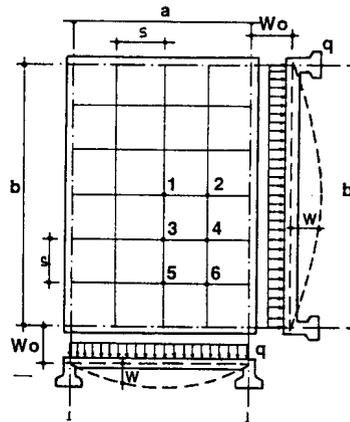


Figura 1  
Esquema de Dispositivo

En general:

$$R_p = \iint k \cdot (W + W_0) \, dx \, dy$$

y en diferencias finitas con  $q = \text{cte}$ .  $N = \text{cte}$ .

$$R_p = k \cdot V_N \cdot a \cdot b \cdot \frac{(q - k \cdot W_0) \cdot s^4}{D} + k \cdot a \cdot b \cdot W_0 =$$

$$R_p = k \cdot V_N \cdot a \cdot b \cdot \frac{(q - W_0) \cdot N}{k} + k \cdot a \cdot b \cdot W_0 \quad (V)$$

$$\text{Siendo el resultado } V_{N. a.b.} = \int_0^a \int_0^b \Omega .dx.dy$$

la expresión de un volumen de función desplazamiento.

### HIPOTESIS DE ESTUDIO

Como primera hipótesis de funcionamiento del sistema estructural se ha considerado (posible apoyo sobre pilotes) ,  $W_0 = 0$ , correspondiendo entonces

$$R_p = q . a.b . N . V_N \quad (\text{VI})$$

Como la resultante total de carga aplicada es

$$P = \int_0^a \int_0^b q(x,y) . dx . dy \quad (\text{VII})$$

para  $q = \text{constante}$  será  $P = q . a.b$

Es decir que en la expresión (VI) al calcularse el valor  $N . V_N$  se está determinando el porcentaje de reacción que toma la placa, deduciéndose también el porcentaje de reacción que corresponderá a la viga de borde.

Se generaliza así la distribución de la reacción de soporte en términos de una característica técnica definida para el problema.

#### Resultados Obtenidos:

La obtención del resultado práctico buscado en ( VI ) requiere entonces la determinación del volumen que ocupa la placa deformada.

Esto puede hacerse [5] con un método aproximado con coeficientes tabulados (Simpson) o por integración sucesiva en ambas direcciones de las parábolas que pasan por los puntos con valores resueltos.

Dados los puntos de malla tomados se ha optado por este último procedimiento mas preciso. Los valores obtenidos se resumen en la tabla siguiente:

N	0	0,3	0,4	0,5	0,6	0,8	1
$V_N$	0,8521	0,6064	0,5567	0,5095	0,4719	0,4116	0,3651
$N.V_N.(%.q.a.b)$	0,0000	0,1819	0,2223	0,2548	0,2832	0,3293	0,3651

Tabla 2. Porcentaje de reacción de soporte

### CONCLUSIONES

Se ha formulado un criterio de aplicación de métodos de cálculo numérico para determinar la distribución posible de las reacciones de soporte en un dispositivo de estructura de fundación.

En la aplicación presente se muestra la forma de aproximar rápidamente valores de cálculo para cada elemento que integra el dispositivo.

Con las condiciones iniciales de estimación de las cargas, el diseño adoptado y el comportamiento mecánico del suelo o material de fundación se generalizan los resultados de acuerdo a los parámetros intervinientes.

También será posible el estudio con problemas similares pero con mayor complejidad de condiciones aplicando el mismo criterio mediante la elección o desarrollo del método numérico más apropiado.

### REFERENCIAS

- 1: Guzman, A.; Luisoni, C.; Ventura, G.: "Curso de Elasticidad Aplicada" Cuad.II Facultad de Ciencias Exactas y Tecnología.  
Universidad Nacional de Tucumán, Tucumán 1961.
- 2: Timoshenko, S. ; Woinowsky Krieger, S : "Theory of Plates and Shells"  
Mc Graw Hill Book Co. Inc.  
Kogakusha, Japón, 1959
- 3 : Terzaghi, K.; Peck, K.: "Mecánica de Suelos en la Ingeniería Práctica"  
Editorial Ateneo, Bs.As., 1958
- 4 : Castillo, Iglesias, Gutiérrez, Alvarez, Cobo:  
Mathematica, Editorial Paraninfo,  
Madrid, España, 1993
- 5 : Todo Excel 4.0 para Windows  
Editorial G y R Libros, 1996