**Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 471-480**
**Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba**
**San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997**

# Sobre un problema singular de control óptimo de tipo minimax con costo final

Laura S. Aragone, Silvia C. Di Marco & Roberto L.V. González

Instituto Beppo Levi-Facultad de Ciencias Exactas, Ingeniería y Agrimensura-UNR

## ABSTRACT

In this paper we study an optimal control problem with finite horizon and final cost. We establish the dynamical programming principle through the introduction of an ad-hoc defined associated problem. We also present the Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) equation defined in terms of a discontinuous Hamiltonian. We propose two discretization schemes and we prove that they converge to the unique solution of the HJB equation.

## RESUMEN

En este trabajo se estudia un problema de control óptimo de tipo minimax con horizonte finito y costo final. El principio de la programación dinámica se establece mediante la introducción de un problema asociado definido ad-hoc. Se presenta la ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) definida en términos de un hamiltoniano discontinuo. Se proponen dos esquemas de discretización y se demuestra la convergencia de los mismos a la única solución de la ecuación de HJB.

## PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA

Consideramos aquí un problema de control óptimo de tipo minimax con horizonte finito y costo final. Más precisamente, el problema consiste en minimizar el funcional $J$

$$\begin{aligned} J : [0,T] \times \Omega \times \mathcal{A} &\mapsto \mathbb{R} \\ (t,x,\alpha(\cdot)) &\mapsto J(t,x,\alpha(\cdot)) = \operatorname*{sup\,es}_{s\in[t,T)} f(y(s),\alpha(s)) + \Psi(y(T)), \end{aligned}$$

donde $y(\cdot)$ representa el estado de un sistema dinámico gobernado por la ecuación diferencial

$$\begin{cases} y'(s) = g(y(s),\alpha(s)) & \forall\, t \le s < T \\ y(t) = x, & x \in \Omega \subset \mathbb{R}^m,\ \Omega \text{ dominio abierto,} \end{cases}$$

y $\mathcal{A} = L^\infty([0,T],A)$ es el conjunto de controles.

La función costo óptimo del problema está dada por

$$u(t,x) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} J(t,x,\alpha(\cdot)). \tag{1}$$

Este problema constituye una extensión del analizado por Barron–Ishii en [2] y por Di Marco–González en [3, 4]. Nos interesa analizar el nuevo problema desde el punto de vista continuo, presentar algunos esquemas de discretización y analizar su convergencia al problema continuo.

### Hipótesis generales

Sea $BUC(\Omega \times A)$ el conjunto de las funciones acotadas y uniformemente continuas en $\Omega \times A$. Suponemos que se satisfacen las siguientes hipótesis:

($H_1$) $g : \Omega \times A \mapsto \mathbb{R}^m$, $g \in BUC(\Omega \times A)$

$$\|g(x,a)\| \leq M_g\,, \quad \|g(x,a) - g(\widehat{x},a)\| \leq L_g \|x - \widehat{x}\|, \quad \forall\, x, \widehat{x} \in \Omega,\ \forall\, a \in A$$

($H_2$) $f : \Omega \times A \mapsto \mathbb{R}$, $f \in C(\Omega \times A)$

$$|f(x,a) - f(\widehat{x},a)| \leq L_f \|x - \widehat{x}\|, \quad \forall\, x, \widehat{x} \in \Omega,\ \forall\, a \in A$$

($H_3$) $\Psi : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, $\Psi \in B(\Omega) \bigcap \mathrm{Lips}(\Omega)$

$$|\Psi(x) - \Psi(\widehat{x})| \leq L_\Psi \|x - \widehat{x}\|, \quad \forall\, x, \widehat{x} \in \Omega.$$

($H_4$) A es compacto.

($H_5$) La trayectoria $y(\cdot)$ permanece en $\Omega$ para cualquier control de $\mathcal{A}$.

## PROBLEMA AUXILIAR

En el problema presentado no puede ser establecida una formulación directa de la programación dinámica en terminos de la función de costo óptimo. Para realizar el tratamiento analítico y numérico del problema extendemos el estado del sistema, mediante el agregado de una variable auxiliar $y_{m+1}(\cdot)$ que evoluciona de la siguiente forma:

$$y_{m+1}(\tau) = \max\{y_{m+1}(\sigma), \operatorname*{sup\,es}_{s\in[\sigma,\tau)} f(y(s),\alpha(s))\}.$$

Esta variable es solución de la inclusión diferencial dada por

$$\begin{cases} \dfrac{dy_{m+1}(s)}{dt} \in \overline{G}(f(y(s),\alpha(s)) - y_{m+1}(s)), \\ \\ y_{m+1}(t) = \rho, \end{cases} \tag{2}$$

donde

$$\overline{G}(w) = \left| \begin{array}{ll} 0 & \text{si } w < 0, \\ [0,\infty] & \text{si } w = 0, \\ \infty & \text{si } w > 0. \end{array} \right.$$

De este modo estudiamos el problema original como un problema de control óptimo de costo final puro:

$$v(t,x,\rho) = \inf_{\alpha(\cdot)\in\mathcal{A}} y_{m+1}(T) + \Psi(y(T)). \tag{3}$$

### Propiedades de $v$

- $v(t,x,0) = u(t,x)$. Si $\rho = 0$, resulta $y_{m+1}(T) = \sup\text{es}_{s\in[t,T)} f(y(s),\alpha(s))$. Reemplazando en (3) y comparando con (1), resulta $v(t,x,0) = u(t,x)$.
- *Si* $\rho_1 > \rho_2$, *entonces* $v(t,x,\rho_1) \geq v(t,x,\rho_2)$. Sea $\rho_1 > \rho_2$ y $y^{\rho_i}_{m+1}(\cdot)$ la solución de la inclusión diferencial (2) cuando la condición inicial es $\rho_i$. Luego, $y^{\rho_1}_{m+1}(T) = \max\{\rho_1, \sup\text{es}_{s\in[t,T)} f(y(s),\alpha(s))\} \geq \max\{\rho_2, \sup\text{es}_{s\in[t,T)} f(y(s),\alpha(s))\} = y^{\rho_2}_{m+1}(T)$. Reemplazando en (3) resulta $v(t,x,\rho_1) \geq v(t,x,\rho_2)$.
- $v$ *es Lipschitz con respecto a las tres variables.* Esta propiedad es consecuencia de las propiedades requeridas para las funciones datos.
- $v$ *no es en general semicóncava.* En efecto, si $\Psi = 0$, $u$ puede no ser semicóncava (ver [4]). luego $v$ tiene la misma propiedad en $\rho = 0$.

### Programación dinámica

La ecuación de la programación dinámica es, en este caso,

$$\left|\begin{array}{rcl} v(t,x,\rho) & = & \inf\limits_{\alpha(\cdot)\in L^\infty([t,s],A)} v(s,y(s),y_{m+1}(s)) \\ \\ v(T,x,\rho) & = & \max\left\{\rho, \min\limits_{a\in A} f(x,a)\right\} + \Psi(x). \end{array}\right. \tag{4}$$

### Ecuación de Hamilton-Jacobi-Bellman

Teniendo en cuenta el principio de la programación dinámica se obtiene la siguiente presentación del mismo en forma diferencial, que en forma estricta constituye el sistema

$$\left|\begin{array}{l} \min\{H_A(t,x,\rho,w),\ H(t,x,\rho,\nabla w)\} \geq 0 \\ \\ \min\{H_A(t,x,\rho,w),\ H_*(t,x,\rho,\nabla w)\} \leq 0 \\ \\ w(T,x,\rho) = \max\left\{\rho, \min\limits_{a\in A} f(x,a)\right\} + \Psi(x). \end{array}\right. \tag{5}$$

donde

$$\begin{array}{rcl} H_A(t,x,\rho,w) & = & \inf\limits_{f(x,a)>\rho} (w(t,x,f(x,a)) - w(t,x,\rho)) \\ H(t,x,\rho,\nabla w) & = & \inf\limits_{f(x,a)<\rho} \left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x} g(x,a)\right) \\ H_*(t,x,\rho,\nabla w) & = & \inf\limits_{f(x,a)\leq\rho} \left(\dfrac{\partial w}{\partial t} + \dfrac{\partial w}{\partial x} g(x,a)\right) \end{array}$$

La solución del sistema anterior se entiende en el sentido de viscosidad, definido para el mismo de la siguiente forma:

- La función $v$ es *subsolución* en el sentido de la viscosidad si dados $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - v$ tiene un mínimo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$, resulta

$$\min\{H_A(t,x,\rho,v),\ H(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \geq 0.$$

- La función $v$ es *supersolución* en el sentido de la viscosidad si dados $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - v$ tiene un máximo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$, resulta

$$\min\{H_A(t,x,\rho,v),\ H_*(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \leq 0$$

**Teorema 1** *La función $v$ es la única solución en el sentido de la viscosidad del sistema* (5).

La demostración de este teorema puede verse en [1].

## APROXIMACIÓN POR DISCRETIZACIÓN EN TIEMPO

Estudiaremos aquí la aproximación de la función de costo óptimo por discretización en tiempo. Proponemos para ello dos esquemas. El estudio del procedimiento de discretización en tiempo y en espacio está contenido en [1].

### Primer esquema de discretización

Definamos $v^h : \{[jh,(j+1)h) : j = 0,\ldots,\mu-1\} \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\left|\begin{array}{lcl} v^h(jh,x,\rho) & = & \min\limits_{a\in A} v^h((j+1)h, x+hg(x,a), \max\{\rho, f(x,a), f(x+hg(x,a),a)\}) \\ v^h(\mu h,x,\rho) & = & \max\left\{\rho, \min\limits_{a\in A} f(x,a)\right\} + \Psi(x). \end{array}\right. \tag{6}$$

Este esquema discreto tiene solución única. Veremos que la sucesión $\{v^h\}$ converge uniformemente a la única solución de viscosidad de (5).

#### Convergencia del esquema

**Lema 1** *La familia $\{v^h\}$ es equilipschitziana.*

**Nota 1** Del lema anterior se desprende que puede elegirse una subsucesión que converge uniformemente a una función continua $v^*$ (sin pérdida de generalidad supondremos entonces que toda la sucesión $\{v^h\}$ converge a $v^*$; esta hipótesis estará confirmada implícitamente por el siguiente lema).

**Lema 2** *La función $v^*$ es la solución de viscosidad del sistema de inecuaciones* (5).

**Proof.** Probemos primero que $v^*$ es *subsolución*

Sea $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - v^*$ tiene un mínimo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$.
Debido a la convergencia uniforme de la familia $v^h$ y a la estricta minimalidad de $(t,x,\rho)$, para todo $h < h_0$, existe

$$(n_h h, x_h, \rho_h) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho) = \{(jh, y, \eta) \in \mathcal{N}(t,x,\rho), j = 1,\ldots,\mu_h - 1.\}$$

tal que $(n_h h, x_h, \rho_h) \to (t,x,\rho)$ y

$$(\Phi - v^h)(n_h h, x_h, \rho_h) \leq (\Phi - v^h)(s,y,\nu), \;\; \forall\,(s,y,\nu) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho). \tag{7}$$

Analicemos ahora las familias de controles $a \in A$ tales que $f(x,a) > \rho$ ó $f(x,a) < \rho$:

- $f(x,a) > \rho$. La ecuación (6), queda

  $$v^h(n_h h, x_h, \rho_h) \leq v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \max\{\rho_h, f(x_h,a), f(x_h + hg(x_h,a),a)\}).$$

  Por paso al límite tenemos:

  $$v^*(t,x,\rho) \leq v^*(t,x,f(x,a)).$$

  Esto implica por la arbitrariedad de $a$, que $H_A(t,x,\rho,v^*) \geq 0$.

- $f(x,a) < \rho$. Para $h$ suficientemente pequeño, $\max\{\rho_h, f(x_h,a), f(x_h + hg(x_h,a),a)\} = \rho_h$ y en consecuencia, la ecuación (6), queda

  $$v^h(n_h h, x_h, \rho_h) \leq v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h).$$

  De lo anterior y de la ecuación (7), tenemos

  $$\frac{\Phi((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - \Phi(n_h h, x_h, \rho_h)}{h}$$
  $$\geq \frac{v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - v^h(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \geq 0.$$

  Pasando al límite cuando $h$ tiende a cero, tenemos:

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,\rho) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x,\rho)\, g(x,a) \geq 0.$$

  Luego, de la arbitrariedad de $a$ sigue que $H(t,x,\rho,\nabla\Phi) \geq 0$.

En consequencia, $v^*$ es subsolución ya que

$$\min\{H_A(t,x,\rho,v^*),\; H(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \geq 0.$$

Probemos ahora que $v^*$ es *supersolución.*

Sea $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - v^*$ tiene un máximo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$.
Debido a la convergencia uniforme de la familia $v^h$ y a la estricta maximalidad de $(t,x,\rho)$, para todo $h < h_0$, existe

$$(n_h h, x_h, \rho_h) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho) = \{(jh, y, \eta) \in \mathcal{N}(t,x,\rho), j = 1,\ldots,\mu_h - 1.\}$$

tal que $(n_h h, x_h, \rho_h) \to (t, x, \rho)$ y

$$(\Phi - v^h)(n_h h, x_h, \rho_h) \geq (\Phi - v^h)(s, y, \nu), \ \ \forall\, (s, y, \nu) \in \mathcal{N}'(t, x, \rho). \tag{8}$$

Supongamos que se cumple

$$\min\{H_A(t, x, \rho, v^*),\ H_*(t, x, \rho, \nabla\Phi)\} \geq \eta > 0 \tag{9}$$

Para cada $h$ existe $a_h \in A$ tal que produce el mínimo en la ecuación (6). Esto es,

$$\begin{aligned} &v^h(n_h h, x_h, \rho_h) = \\ &v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h, a_h), \max\{\rho_h, f(x_h, a_h), f(x_h + hg(x_h, a_h), a_h)\}). \end{aligned} \tag{10}$$

Por la compacidad de $A$, existe $a'$ punto de acumulación de alguna subsucesión tal que

$$\lim_{h\to 0} f(x_h, a_h) = f(x, a').$$

Analicemos los diferentes casos:

- $f(x, a') > \rho$. En este caso, de (9) resulta

  $$v^*(t, x, f(x, a')) - v^*(t, x, \rho) \geq \eta.$$

  Pero por paso al límite en la ecuación (10), tenemos

  $$v^*(t, x, \rho) = v^*(t, x, f(x, a')).$$

  De esto resulta $\eta \leq 0$.

- $f(x, a') \leq \rho$. De (9) surge que

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{\partial \Phi}{\partial x} g(x, a') \geq \eta \tag{11}$$

  Pero de (10), tenemos

  $$\begin{aligned} &v^h(n_h h, x_h, \rho_h) = \\ &= \ v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h, a_h), \max\{\rho_h, f(x_h, a_h), f(x_h + hg(x_h, a_h), a_h)\}) \\ &\geq \ v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h, a_h), \rho_h). \end{aligned}$$

  De la relación (8) tenemos

  $$\begin{aligned} &\frac{\Phi((n_h+1)h, x_h + hg(x_h, a), \rho_h) - \Phi(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \\ &\leq \ \frac{v^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h, a), \rho_h) - v^h(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

  Pasando al límite cuando $h$ tiende a cero, tenemos

  $$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t, x, \rho) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t, x, \rho)\ g(x, a') \leq 0,$$

  lo que contradice (11).

  En consequencia, $v^*$ es supersolución ya que

  $$\min\{H_A(t, x, \rho, v^*),\ H_*(t, x, \rho, \nabla\Phi)\} \leq 0.$$

La unicidad de solución del sistema (5) implica que la sucesión de soluciones discretas en tiempo convergen uniformemente a la solución del problema continuo.

### Segundo esquema de discretización

Definamos $w^h : \{[jh,(j+1)h) : j = 0,\ldots,\mu-1\} \times \Omega \times \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}$ tal que verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$\left| \begin{array}{lcl} w^h(jh,x,\rho) & = & \min_{a\in A} w^h((j+1)h, x+hg(x,a), \max\{\rho, f(x+hg(x,a),a)\}) \\ w^h(\mu h,x,\rho) & = & \max\left\{\rho, \min_{a\in A} f(x,a)\right\} + \Psi(x). \end{array} \right. \tag{12}$$

Este esquema discreto tiene solución única. Veremos que la sucesión $\{w^h\}$ converge uniformemente a la única solución de viscosidad de (5).

### Convergencia del esquema

**Lema 3** *La familia $\{w^h\}$ es equilipschitziana.*

**Nota 2** Del lema anterior se desprende que puede elegirse una subsucesión que converge uniformemente a una función continua $w^*$ (sin pérdida de generalidad supondremos entonces que toda la sucesión $\{w^h\}$ converge a $w^*$; esta hipótesis estará confirmada implícitamente por el siguiente lema).

**Lema 4** *La función $w^*$ es la solución de viscosidad del sistema de inecuaciones* (5).

**Proof.** Probemos primero que $w^*$ es *subsolución*

Sea $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - w^*$ tiene un mínimo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$.
Debido a la convergencia uniforme de la familia $w^h$ y a la estricta minimalidad de $(t,x,\rho)$ para todo $h < h_0$, existe

$$(n_h h, x_h, \rho_h) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho) = \{(jh,y,\eta) \in \mathcal{N}(t,x,\rho), j = 1,\ldots,\mu_h - 1.\}$$

tal que $(n_h h, x_h, \rho_h) \to (t,x,\rho)$ y

$$(\Phi - w^h)(n_h h, x_h, \rho_h) \le (\Phi - w^h)(s,y,\nu), \quad \forall\, (s,y,\nu) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho). \tag{13}$$

Analicemos ahora las familias de controles $a \in A$ tales que $f(x,a) > \rho$ ó $f(x,a) < \rho$ :

- $f(x,a) > \rho$. La ecuación (12), queda

  $$w^h(n_h h, x_h, \rho_h) \le w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \max\{\rho_h, f(x_h + hg(x_h,a),a)\}).$$

  Por paso al límite tenemos:

  $$w^*(t,x,\rho) \le w^*(t,x,f(x,a)).$$

  Esto implica por la arbitrariedad de $a$, que $H_A(t,x,\rho,w^*) \ge 0$.

- $f(x,a) < \rho$. Para $h$ suficientemente pequeño, $\max\{\rho_h, f(x_h + hg(x_h,a),a)\} = \rho_h$ y en consecuencia, la ecuación (12), queda

  $$w^h(n_h h, x_h, \rho_h) \le w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h).$$

De lo anterior y de la ecuación (13), tenemos

$$\frac{\Phi((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - \Phi(n_h h, x_h, \rho_h)}{h}$$
$$\geq \frac{w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - w^h(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \geq 0.$$

Pasando al límite cuando $h$ tiende a cero, tenemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(t,x,\rho) + \frac{\partial \Phi}{\partial x}(t,x,\rho)\, g(x,a) \geq 0.$$

Luego, de la arbitrariedad de $a$ sigue que $H(t,x,\rho,\nabla\Phi) \geq 0$.

En consequencia, $w^*$ es subsolución ya que

$$\min\{H_A(t,x,\rho,w^*),\ H(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \geq 0.$$

Probemos ahora que $w^*$ es *supersolución.*

Sea $(t,x,\rho) \in (0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+$ y $\Phi \in C^1((0,T) \times \Omega \times \mathbb{R}^+)$ tal que $\Phi - w^*$ tiene un máximo estricto en $(t,x,\rho)$ en un entorno $\mathcal{N}(t,x,\rho)$.
Debido a la convergencia uniforme de la familia $w^h$ y a la estricta maximalidad de $(t,x,\rho)$, para todo $h < h_0$, existe

$$(n_h h, x_h, \rho_h) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho) = \{(jh, y, \eta) \in \mathcal{N}(t,x,\rho), j = 1,\ldots,\mu_h - 1.\}$$

tal que $(n_h h, x_h, \rho_h) \to (t,x,\rho)$ y

$$(\Phi - w^h)(n_h h, x_h, \rho_h) \geq (\Phi - w^h)(s,y,\nu),\ \ \forall\,(s,y,\nu) \in \mathcal{N}'(t,x,\rho). \tag{14}$$

Supongamos que se cumple

$$\min\{H_A(t,x,\rho,w^*),\ H_*(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \geq \eta > 0 \tag{15}$$

Para cada $h$ existe $a_h \in A$ tal que produce el mínimo en la ecuación (12). Esto es,

$$w^h(n_h h, x_h, \rho_h) = w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a_h), \max\{\rho_h, , f(x + hg(x_h,a_h), a_h)\}). \tag{16}$$

Por la compacidad de $A$, existe $a'$ punto de acumulación de alguna subsucesión tal que

$$\lim_{h\to 0} f(x_h, a_h) = f(x, a').$$

Analicemos los diferentes casos:

- $f(x,a') > \rho$. En este caso, de (15) resulta

$$w^*(t,x,f(x,a')) - w^*(t,x,\rho) \geq \eta.$$

Pero por paso al límite en la ecuación (16), tenemos

$$w^*(t,x,\rho) = w^*(t,x,f(x,a')).$$

De esto resulta $\eta \leq 0$.

- $f(x,a') \leq \rho$. De (15) surge que

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{\partial\Phi}{\partial x} g(x,a') \geq \eta \tag{17}$$

Pero de (16), tenemos

$$\begin{aligned} w^h(n_h h, x_h, \rho_h) &= w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a_h), \max\{\rho_h, f(x_h + hg(x_h,a_h), a_h)\}) \\ &\geq w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a_h), \rho_h). \end{aligned}$$

De la relación (14) tenemos

$$\begin{aligned} &\frac{\Phi((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - \Phi(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \\ \leq\; &\frac{w^h((n_h+1)h, x_h + hg(x_h,a), \rho_h) - w^h(n_h h, x_h, \rho_h)}{h} \leq 0. \end{aligned}$$

Pasando al límite cuando $h$ tiende a cero, tenemos

$$\frac{\partial\Phi}{\partial t}(t,x,\rho) + \frac{\partial\Phi}{\partial x}(t,x,\rho)\; g(x,a') \leq 0,$$

lo que contradice (17).

En consequencia, $w^*$ es supersolución ya que

$$\min\{H_A(t,x,\rho,w^*),\; H_*(t,x,\rho,\nabla\Phi)\} \leq 0.$$

La unicidad de solución del sistema (5) implica que la sucesión de soluciones discretas en tiempo convergen uniformemente a la solución del problema continuo.

## REFERENCIAS

[1] Aragone L.S., Di Marco S.C., González R.L.V. *Solutions of a minimax problem with additive final condition*, work in progress.

[2] Barron E.N., Ishii H., *The Bellman equation for minimizing the maximum cost,* Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol. 13, N°9, pp. 1067-1090, 1989.

[3] Di Marco S.C., González R.L.V., *Une procédure numérique pour la minimisation du coût maximum,* Comptes Rendus Acad. Sc. Paris, Série I, Tome 321, pp. 869-874, 1995.

[4] Di Marco S.C., *Sobre la optimización minimax y tiempos de detención óptimos,* Tesis, Universidad Nacional de Rosario, Argentina, 1996.