Mecánica Computacional, Volumen XVIII - pp. 603-608
Compilado por: E. Dari, C. Padra y R. Saliba
San Carlos de Bariloche, noviembre de 1997

VENTAJAS DE LA TRANSFORMADA DE HARTLEY EN PROBLEMAS DONDE NO INTERVIENE LA TRANSFORMADA RÁPIDA DE FOURIER

Beatriz Introcaso, Fernando Guspí
Grupo de Geofísica. Instituto de Física Rosario. Universidad Nacional de Rosario - CONICET - Av. Pellegrini 250, 2000 Rosario, Argentina.

ABSTRACT

The Hartley transform and its discrete version, both closely related to the Fourier transform, give real-valued results when applied to real data sets. Advantages of employing 1-D and 2-D Fast Hartley transforms instead of Fast Fourier transforms have been pointed out in the literature for certain cases. This paper shows that the Hartley transform is even more advantageous when a discrete Fourier transform needs to be estimated or calculated by methods other than the fast transformation, because of the less amount of storage required and the speed gained using real arithmetic. Two specific cases are presented: the estimation of a discrete Fourier transform by linear inversion, and the relation between frequency-domain continuation and singular value decomposition in potential field problems.

RESUMEN

La transformada de Hartley y su versión discreta, ambas muy relacionadas con la transformada de Fourier, dan resultados a valores reales cuando se las aplica a conjuntos de datos reales. Varios autores ya han señalado las ventajas de emplear la transformada rápida de Hartley en una y dos dimensiones para ciertos casos. Este trabajo muestra que la transformada de Hartley es aún más ventajosa cuando se necesita estimar o calcular una transformada de Fourier discreta por métodos diferentes a los de la transformación rápida, debido a la menor cantidad de memoria requerida y a la rapidez que se gana utilizando aritmética real. Se presentan dos ejemplos: la estimación de una transformada de Fourier discreta mediante inversión lineal, y la relación entre prolongación en el dominio frecuencial y descomposición en valores singulares en problemas de campo potencial.

INTRODUCCIÓN

La transformada introducida por Hartley (1942) está basada en una descomposición en funciones armónicas, de forma similar a la transformada de Fourier. Proporciona, entonces, una posibilidad alternativa para analizar una función dada mediante sinusoides. Para una función real f se define mediante

$$H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\left(\cos(\omega t) + \sin(\omega t)\right) dt \tag{1}$$

y en su forma discreta viene dada por

$$H(\omega) = \sum_{t=0}^{N-1} f(t) \left(\cos\left(\frac{\omega t}{N}\right) + \sin\left(\frac{\omega t}{N}\right) \right) \tag{2}$$

donde N es el número de muestras.
Se diferencia de la transformada de Fourier simplemente en el hecho de que no intervienen números ni operaciones complejas, sino sólo números y operaciones reales. Por esta razón, como un producto complejo requiere cuatro productos reales, la transformada de Hartley discreta es computacionalmente más rápida que la transformada de Fourier discreta. Otra ventaja es que las transformadas de Hartley discretas directa e inversa son la misma.
Muchos autores han demostrado que se pueden construir algoritmos rápidos para la transformada de Hartley usando las mismas estructuras que para la transformada rápida de Fourier, que operan más velozmente que estas últimas ya que - si bien ambas requieren el mismo tiempo para recuperar los datos, proporcionar funciones trigonométricas y llevar a cabo otras operaciones preliminares - el tiempo invertido en la ejecución de las etapas correspondientes a la transformación de Hartley es la mitad del requerido por la de Fourier [1]. También se demostró que resulta posible deducir directamente de la transformada de Hartley la misma información sobre los datos que proporciona la transformada de Fourier: intensidades y fases.
En sus términos más generales, las transformaciones de Fourier y de Hartley se han aplicado en campos que se ocupan de fenómenos fluctuantes. En particular, las manipulaciones en el dominio de las frecuencias son muy usadas en geofísica. Grandes volúmenes de datos requieren mucha memoria y mucho tiempo de cálculo. A partir de las ventajas de la transformada rápida de Hartley, es posible beneficiarse en el procesamiento de datos geofísicos (por ejemplo: [2]).
Nuestra intención es mostrar que la transformada de Hartley es más ventajosa cuando se trata de estimar una transformada discreta por métodos diferentes a los de la transformación rápida. Para ello mostramos su utilización en dos ejemplos. El primero reemplaza la estimación de una transformada de Fourier discreta mediante inversión lineal [3] utilizada para el grillado y separación de anomalías de campos potenciales [4], mientras que el segundo trata la relación entre la prolongación en el dominio frecuencial (que en general utiliza la transformada de Fourier discreta) con la descomposición en valores singulares en problemas de campos potenciales [5].

APROXIMACIÓN DE LA TRANSFORMADA DISCRETA POR INVERSIÓN LINEAL

El problema que se plantea en [3] es la estimación de M muestras espectrales a partir de un conjunto de N datos, donde $M > N$. En este caso la transformada de Fourier discreta viene dada por

$$x_n = \frac{1}{M} \sum_{k=0}^{M-1} X_k e^{2\pi i n \frac{k}{M}} \qquad n = 0, 1, \ldots, N-1 \tag{3}$$

que conduce a un sistema lineal de ecuaciones

$$y = Fx \tag{4}$$

siendo y un vector de R^N que posee la información disponible y x un vector de C^M que representa la transformada discreta desconocida.

El problema fue generalizado al caso bidimensional [4] tomando como base la ecuación

$$g(x,y) = \frac{1}{m_x m_y} \sum_{k=0}^{m_y-1} \sum_{l=0}^{m_x-1} \hat{g}_{kl} e^{2\pi i\left(\frac{l_x}{L_x}+\frac{k_y}{L_y}\right)} \tag{5}$$

donde $\hat{g}_{kl}$ es cada elemento complejo de la transformada en dos variables, m_x, m_y son las cantidades de puntos en cada dirección y L_x, L_y los períodos fundamentales del resultado.

Se pensó en ese caso a la transformada como un sólo vector de $m = m_x \times m_y$ componentes y esto llevó a la resolución de la ecuación

$$g_p = \frac{1}{m} \sum_{r=0}^{m-1} X_r F_{pr} \tag{6}$$

Para garantizar la unicidad de la solución se agregó un regularizador que provee la información a priori, en este caso imponiendo que la solución sea una distribución rala de amplitudes espectrales. Así, la condición a verificar resultó

$$S(x) = \sum_{k=0}^{M-1} \log\left(1 + \frac{X_k X_k^*}{2\sigma_c^2}\right) = \min \tag{7}$$

Siguiendo este razonamiento, pretendemos mostrar que trabajando con la transformada discreta de Hartley en lugar de la de Fourier, se obtienen los mismos resultados a partir de un algoritmo computacionalmente más eficiente que el anterior. El espectro de potencia para este caso viene dado por el cuadrado del módulo de la transformada de Hartley y tiene la forma

$$\sum_{k=0}^{M-1} \frac{X_k^2 + X_{M-k}^2}{2} \tag{8}$$

[2], y por lo tanto la condición que ahora se busca minimizar es

$$\sum_{k=0}^{M-1} \log\left(1 + \frac{X_k + X_{M-k}^2}{4\sigma_c^2}\right) \tag{9}$$

Derivando e igualando a cero llegamos al planteo del problema a resolver

$$x = QF^H\left(\lambda I_N + FQF^H\right)^{-1} y \tag{10}$$

siendo Q una matriz diagonal de elementos de la forma

$$Q_{ii} = 1 + \frac{X_i^2 + X_{N-i}^2}{4\sigma_c^2} = Q_{(N-i)(N-i)}, \tag{11}$$

la matriz F es ahora una matriz real cuyos elementos son los coeficientes de la transformada de Hartley inversa y $\lambda = \frac{\sigma_n^2}{\sigma_c^2}$ siendo σ_n y σ_c hiperparámetros independientes relacionados con las varianzas de las distribuciones de los datos y las incógnitas respectivamente.

Aplicamos este procedimiento al problema del grillado de un mapa de anomalías gravimétricas de 127 datos sobre la zona de la cuenca Interserrana entre las Sierras de la Ventana y Tandil. Se utilizaron como parámetros de las distribuciones respectivamente $\sigma_c = 50$ y $\sigma_n = 0.1$. Para obtener un resultado satisfactorio utilizando una aproximación de la transformada de Fourier discreta se necesitaron 45 iteraciones, y un tiempo de 45 minutos. En las mismas condiciones, utilizando una aproximación de la transformada de Hartley, el resultado se obtuvo en un tiempo de 18 minutos.

Otra ventaja considerable es que, ante la misma disponibilidad de memoria, usando la Transformada de Hartley es posible grillar una carta con más cantidad de datos que utilizando la Tranformada de Fourier.

RELACIÓN ENTRE LA PROLONGACIÓN EN EL DOMINIO FRECUENCIAL Y LA DESCOMPOSICIÓN EN VALORES SINGULARES

En los trabajos [5] y [6] se mostró una analogía entre el operador de prolongación discreta para campos potenciales y la descomposición en valores singulares.
Sea $E_{n\times n}$ la formulación matricial de la Transformada de Fourier Discreta (análoga a F^H en párrafos anteriores) y sea Λ la matriz diagonal que contiene los coeficientes de la prolongación a una distancia z. Luego

$$A = E^H \Lambda E \tag{12}$$

es una formulación matricial del operador de prolongación vertical. Como E^H y E son ortogonales, pareciera que el operador hubiera sido factorizado según su descomposición en valores singulares, siendo Λ una matriz que juega el rol de la matriz de autovalores.
Sin embargo, E^H y E son matrices complejas. Se puede formular una descomposición a valores singulares real usando la transformada de Hartley

$$A = H \Lambda H \tag{13}$$

donde $H_{n\times n}$ describe las transformadas de Hartley directa e inversa, y Λ, que es a valores reales, es la misma que antes.

Además de las posibilidades de realizar un análisis de resolución (por ejemplo [7]), de la ecuación (13) se puede deducir un algoritmo práctico para usar en problemas inversos de campo potencial. El corte de frecuencias es equivalente al descarte de autovalores. Las frecuencias más altas para las cuales la inversión en el dominio frecuencial tiene una buena resolución dependen principalmente de la profundidad máxima de la estructura causante ([8]; [9]) y por lo tanto, si hay demasiados datos es necesario descartar un gran número de autovalores, digamos p. El operador de prolongación hacia abajo en la ecuación (11) se convierte en

$$A_c = H_c^T \Lambda_c H_c \tag{14}$$

donde H_c es una matriz $n-p \times n$ que al ser multiplicada por el vector de los datos conduce a los $n-p$ coeficientes de la transformada de Hartley que corresponden a los $n-p$ autovalores restantes, Λ_c es una matriz diagonal de orden $n-p$ que contiene los autovalores no descartados, y el producto por H_c^T opera sólo sobre las frecuencias restantes.

En problemas inversos iterativos, cuando se necesita calcular la prolongación hacia abajo de un vector de datos **g** repetidamente, la aplicación del operador (14) en la forma

$$H_c^T \left[\Lambda_c \left(H_c \mathbf{g}\right)\right] \tag{15}$$

puede ser ventajoso sobre el cálculo de las frecuencias de corte de las transformadas rápidas de Fourier completas.

Más aún, para el cálculo directo de la respuesta del modelo en cada iteración, utilizamos una forma discreta de la expresión de Parker [10] en términos de la transformada de Hartley. Cuando se buscan resultados sólo para un número limitado de frecuencias, el algoritmo opera más rápido y los resultados son numéricamente idénticos a los que se obtienen con la sumatoria de Parker de la transformada rápida de Fourier completa.

CONCLUSIONES

En su aplicación en dos ejemplos, hemos mostrado que la transformada de Hartley es más ventajosa que la de Fourier cuando se necesita estimarla por métodos diferentes a los de la transformada rápida. En el primero hemos reemplazado la estimación de la trasnformada de Fourier discreta mediante inversión lineal, obteniendo una ventaja considerable en el tiempo utilizado para el grillado de una carta de anomalías gravimétricas. En el segundo hemos encontrado que la relación entre la prolongación en el dominio frecuencial y la descomposición en valores singulares en problemas de campos potenciales también arroja mejores resultados cuando se reemplaza la transformada de Fourier discreta por su equivalente de Hartley.

Referencias

[1] Bracewell R. L., *The Fourier transform and its applications*, McGraw-Hill Book Company, 1986.

[2] Saatcilar R., Ergintav S. and Canitez N., *The use of Hartley transform in geophysical applications*, GEOPHYSICS Vol. 55 Nº 11, pp. 1488-1495, 1990.

[3] Sacchi M.D. and Ulrych T.J., *Estimation of the discrete Fourier transform, a linear inversion approach*, GEOPHYSICS Vol. 61 Nº 4, pp. 1128-1136, 1996.

[4] Guspí F. and Introcaso B., *A sparse spectrum technique for gridding and separating potential field anomalies*, Expanded abstract accepted at the LXVII Society of Exploration Geophysicists Annual Meeting, 1997.

[5] Pilkington M. and Crossley D.J., *Determination of crustal interface topography from potential fields*, GEOPHYSICS Vol. 51 Nº 6, pp. 1277-1284, 1986.

[6] Abdoh A., Cowan D. and Pilkington M., *Three dimensional gravity inversion of the Chesire basin*, GEOPHYSICAL PROSPECTING Vol. 38, pp. 999-1007, 1990.

[7] Pedersen L. B., *Interpretation of potential field data. A generalized inverse approach*, GEOPHYSICAL PROSPECTING Vol. 25, pp. 199-230, 1977.

[8] Granser H., *Convergence of iterative gravity inversion*, GEOPHYSICS Vol. 51, pp. 1146-1147, 1986.

[9] Guspí F., *Noniterative nonlinear gravity inversion*, GEOPHYSICS Vol. 58 Nº 7, pp. 935-940, 1993.

[10] Parker R. L., *The rapid calculation of potential anomalies*, GEOPHYS. J. ROY. ASTR. SOC. Vol. 31, pp. 447-455, 1973.