

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

Ricardo D. Katz - Mabel M. Tidball

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

UNIVERSIDAD DE ROSARIO, 2000-ROSARIO, ARGENTINA

August 20, 1997

ABSTRACT. Estamos interesados en este trabajo en la comparación de los diferentes métodos existentes para resolver numéricamente juegos de Perseguidor-Evasor. Hasta el momento se han estudiado varios métodos para tratar este problema y es sorprendente la diferencia existente entre las herramientas matemáticas utilizadas (ecuaciones diferenciales, teoría de viabilidad, etc.) así como entre las interpretaciones del problema (cualitativa y cuantitativa). El objetivo de este trabajo es responder al menos parcialmente preguntas tales como:

1) Cómo están relacionados estos métodos?

2) Por qué ciertas suposiciones son necesarias en un método pero no en otro?

La idea subyacente es que el entendimiento de la relación entre los distintos métodos puede ayudar a desarrollar un método que tenga las ventajas de cada uno de los mismos.

ABSTRACT. In this work we are interested in the comparison between the different existing methods to solve, numerically, pursuit-evasion games. Until now several methods to deal with this problem have been studied, and it is surprising to realize the difference that exist between the mathematical tools used as well as between the interpretations of the problem (qualitative and quantitative). The objective of this work is to answer, at least partially, to questions such as:

1) How are the different methods related?

2) Why are some hypothesis needed in one method and not in another?

The idea underlying the study is that the understanding of the relation between the different methods could help to develop a procedure having the advantage of each of them.

1. DESCRIPCIÓN DE LOS MÉTODOS

1.1. Aproximación de la solución de la ecuación de Isaacs (Interpretación cuantitativa):

El problema. Supongamos que tenemos un sistema dinámico de la forma:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t), v(t)) & t > 0 \\ y(0) = x \in \mathbf{R}^M \end{cases} \quad (1)$$

controlado por dos jugadores: Ursula cuyo control en el instante t es $u(t)$, y Víctor cuyo control en el instante t es $v(t)$. Supongamos que los controles $u(t)$ y $v(t)$ pertenecen respectivamente a conjuntos compactos U y V . Supongamos además dado un "blanco" cerrado $\tau \subset \mathbf{R}^M$ y que $f: \mathbf{R}^M \times U \times V \rightarrow \mathbf{R}^M$ es una función continua, acotada y Lipschitz en la primera variable. El objetivo de Ursula es de minimizar el tiempo de "captura", es decir $J(x, u(\cdot), v(\cdot)) = \inf\{t > 0 \mid y(t) \in \tau\}$ mientras que Víctor desea maximizar el mismo. Sea $T(x)$ la función valor inferior del juego definida en el sentido de Varaiya,

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

Roxin, Elliot y Kalton (ver [1],[2],[3]), es decir $T(x) = \inf_{\alpha \in \mathbf{A}} \sup_{v(\cdot) \in \nu} J(x, \alpha(v(\cdot)), v(\cdot))$ donde $\nu = \{v : \mathbf{R}^+ \rightarrow V \text{ medibles}\}$; $\mu = \{u : \mathbf{R}^+ \rightarrow U \text{ medibles}\}$ y $\mathbf{A} = \{\alpha : \nu \rightarrow \mu / v(t) = v^*(t), t \in [0, s] \implies \alpha[v](t) = \alpha[v^*](t), t \in [0, s]\}$ es el conjunto de estrategias no-anticipativas para el minimizador (Ursula). Si $T(x)$ es continua entonces se demuestra (ver [4],[5],[6]) que es una solución de viscosidad del siguiente problema con valor en la frontera:

$$\begin{cases} \min_{v \in V} \max_{u \in U} \{ -\langle \nabla T(x), f(x, u, v) \rangle - 1 \} = 0 & \text{si } x \in \Omega = \mathbf{R}^M - \tau \\ T(x) = 0 & \text{si } x \in \tau \end{cases}$$

Con el fin de obtener las aproximaciones a la solución como puntos fijos de ciertos operadores de contracción es muy útil la transformación de Kruzkov. En realidad buscaremos aproximaciones de la función $V(x)$ definida por:

$$V(x) = \begin{cases} 1 - \exp(-T(x)) & \text{si } T(x) < +\infty \\ 1 & \text{si } T(x) = +\infty \end{cases}$$

y entonces la siguiente proposición puede demostrarse (ver [6]):

Proposition 1. Si $T(x)$ es continua sobre $\partial\tau$, entonces $V(x)$ es la única solución de viscosidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi-Isaacs:

$$\begin{cases} V(x) + \min_{v \in V} \max_{u \in U} \{ -\langle \nabla V(x), f(x, u, v) \rangle - 1 \} = 0 & \text{si } x \in \Omega = \mathbf{R}^M - \tau \\ V(x) = 0 & \text{si } x \in \tau \end{cases} \quad (2)$$

Presentaremos a continuación dos técnicas de discretización de la ecuación 2. La primera utiliza una discretización regular en el tiempo y en el espacio (ver [8]), mientras que la segunda utiliza únicamente una discretización del espacio (ver [14]).

Método de discretización Tiempo-Espacio (Método I). Este método de discretización se realiza en dos pasos. En el primer paso la ecuación de Isaacs 2 es aproximada por una ecuación de Isaacs discreta (en tiempo). Esto se obtiene discretizando en tiempo, con paso $h > 0$, el sistema dinámico 1 (h es el parámetro de discretización del tiempo), es decir que dicho sistema dinámico se aproxima por el siguiente sistema dinámico discreto en tiempo:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + h f(x_n, u_n, v_n) & u_n \in U, v_n \in V, n \in \mathbf{N}_0 \\ x_0 = x \in \mathbf{R}^M \end{cases}$$

En forma análoga al problema continuo se define la función valor inferior $N_h(x)$ para el juego de tiempo discreto y utilizando la transformación de Kruzkov se define $V_h(x)$. Con argumentos de programación dinámica se demuestra (ver [7]) el siguiente teorema:

Theorem 2. La función $V_h(x)$ es la única solución acotada de

$$\begin{cases} V_h(x) = \sup_{v \in V} \inf_{u \in U} \{ e^{-h} V_h(x + h f(x, u, v)) \} + 1 - e^{-h} & \text{si } x \in \Omega = \mathbf{R}^M - \tau \\ V_h(x) = 0 & \text{si } x \in \tau \end{cases} \quad (3)$$

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

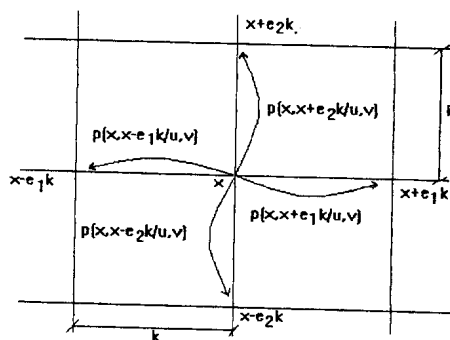


Figure 2:

Entonces la ecuación discreta que aproxima a la ecuación de Isaacs 2 es:

$$V_k(x) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \left\{ r^k(x, u, v) + \beta^k(x, u, v) \left(\sum_{y \in \Omega^k} p(x, y / u, v) V_k(y) \right) \right\} \quad (5)$$

$$r^k(x, u, v) = \frac{k}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)| + k} \quad \text{si } x \in \Omega^{ok} ; \quad r^k(x, u, v) = 0 \quad \text{si } x \in \partial\Omega^k$$

$$\beta^k(x, u, v) = \frac{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)| + k} \quad \text{si } x \in \Omega^k$$

Si $x \in \Omega^{ok}$ y $\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)| \neq 0$ entonces $p(x, x + k e_j / u, v) = \frac{f_j^+(x, u, v)}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}$;

$p(x, x - k e_j / u, v) = \frac{f_j^-(x, u, v)}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}$; $p(x, y / u, v) = 0$ para cualquier otro $y \in \Omega^k$

donde: $f_j^+(x, u, v) = \sup \{0, f_j(x, u, v)\}$; $f_j^-(x, u, v) = \sup \{0, -f_j(x, u, v)\}$

Si $x \in \partial\Omega^k$ o $\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)| = 0$ entonces $p(x, x / u, v) = 1$ y $p(x, y / u, v) = 0 \quad \forall y \neq x$

Convergencia de los métodos de discretización. La técnica para probar la convergencia de las soluciones de las ecuaciones discretas 4 y 5 a la solución del pro-

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

blema continuo 2 (ec. de Isaacs) es la misma y ya fue utilizada en [7]. La demostración se realiza bajo la hipótesis de que la función valor del problema original es continua y que el blanco τ es la clausura de un conjunto abierto, cuya frontera $\partial\tau$ es una superficie Lipschitz (ver [8] y [14]). La idea de la demostración es probar que el límite superior $V^*(x) = \limsup_{n \rightarrow +\infty} W_n(y)$ (resp. lím. inferior) de una apropiada sucesión de soluciones aproximantes $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una subsolución de viscosidad (resp. supersolución de visc.) de la ecuación continua 2. Luego un teorema de comparación para las soluciones de viscosidad de dicha ecuación (ver [7],[15]) nos conduce a la conclusión de que la sucesión de soluciones aproximantes $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge (unif. sobre compactos) a la solución de viscosidad de la misma ecuación, es decir a $V(x)$ (ver [8] [14]). Para el método I la demostración se realiza (ver [8]) utilizando como sucesión $\{W_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ de soluciones aproximantes a $\{V_{k_n}^{h_n}\}_{n \in \mathbb{N}}$ donde la sucesión de parámetros h_n y k_n verifican la condición $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{k_n}{h_n} = 0$. Esto significa que k_n debe tender a cero mucho más "rápido" que h_n y entonces es necesario tomar un gran número de puntos en la grilla (es decir achicar "mucho" k) cuando se desea mejorar la discretización en el tiempo (achicar h) para obtener así una buena aproximación. Esta observación no es "favorable" para el método I pues trabajar con un gran número de puntos en la grilla no resulta "bueno" numéricamente. Sin embargo demostraremos que la condición anterior no es necesaria para la convergencia del método I.

1.2. Aproximación de los conjuntos de captura (Interpretación cualitativa).

Los métodos que describiremos a continuación no intentan resolver la ecuación de Isaacs ni de aproximar a la función valor del juego, sino que intentan aproximar algunos subconjuntos del espacio de estados que poseen cierta propiedad cualitativa. Los dos métodos que trataremos en esta sección han sido desarrollados en forma completamente separada y con herramientas matemáticas muy diferentes, pero como veremos, en realidad estos métodos están estrechamente relacionados. También veremos que estos métodos pueden utilizarse para obtener aproximaciones a la función valor del juego (con lo cual a pesar del enfoque cualitativo de los mismos, se pueden obtener a partir de ellos resultados cuantitativos).

Teoría de Viabilidad (Método III). Consideremos nuevamente el sistema dinámico 1. En este caso supondremos dado un blanco abierto $\tau \subset \mathbf{R}^M$, al cual Ursula pretende que el sistema ingrese, mientras que Víctor desea que el sistema permanezca en el conjunto cerrado $K = \mathbf{R}^M - \tau$ (notemos que aquí existe una diferencia con los métodos I y II en donde por hipótesis el blanco τ era un conjunto cerrado de \mathbf{R}^M). Estamos interesados en estudiar al conjunto de victoria discriminante para Víctor, es decir, al conjunto de condiciones iniciales $x \in K$ para las cuales existe una estrategia no-anticipativa β para Víctor, tal que para todo control $u(\cdot) \in \mu$ elegido por Ursula, la solución de:

$$\begin{cases} y'(t) = f(y(t), u(t), \beta[u(t)]) & t > 0 \\ y(0) = x \end{cases}$$

permanece en K para todo $t > 0$ (es decir: $y(t) \in K \quad \forall t > 0$). Este conjunto recibe también el nombre de núcleo discriminante de K por f y se representa por $Disc_f(K)$. Consideremos ahora el sistema dinámico discreto:

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n, u_n, v_n) & u_n \in U \quad y \quad v_n \in V \quad \forall n \in \mathbf{N}_0 \\ x_0 = x \in \mathbf{R}^M \end{cases} \quad (6)$$

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

Podemos definir el conjunto de victoria discriminante discreto para Víctor (análogo al conjunto de victoria en el caso continuo) como el conjunto de puntos $x \in K$ para los cuales existe una estrategia $\tilde{v}(\cdot, \cdot) : \mathbf{R}^M \times U \rightarrow V$ tal que para toda sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}_0} \in U^{\mathbf{N}_0}$ la solución $\{x_n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ de

$$\begin{cases} x_{n+1} = g(x_n, u_n, \tilde{v}(x_n, u_n)) & n \in \mathbf{N}_0 \\ x_0 = x \in \mathbf{R}^M \end{cases}$$

permanece en K (es decir: $x_n \in K \quad \forall n \in \mathbf{N}_0$). Sea $G(x, u) = \bigcup_{v \in V} g(x, u, v) \quad \forall x \in \mathbf{R}^M, \forall u \in U$. Entonces este conjunto recibe el nombre de núcleo discriminante discreto de K por G y se representa por $\overrightarrow{Disc}_G(K)$. La siguiente proposición nos proporciona un método para calcular $\overrightarrow{Disc}_G(K)$ (ver [12]).

Proposition 3. Sea K un conjunto cerrado y $G(\cdot, \cdot) : \mathbf{R}^M \times U \rightarrow \mathbf{R}^M$ una función semicontinua superior con valores que son conjuntos compactos. Entonces el núcleo discriminante discreto de K por G existe y está dado por: $\overrightarrow{Disc}_G(K) = \bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} K_n$ donde

$$\begin{cases} K_0 = K \\ K_{n+1} = \{x \in K_n / \forall u \in U \quad g(x, u) \cap K_n \neq \emptyset\} & n \in \mathbf{N}_0 \end{cases}$$

La importancia de los núcleos discriminantes discretos está dada por la siguiente proposición (ver [12]):

Proposition 4. Supongamos que $f : \mathbf{R}^M \times U \times V \rightarrow \mathbf{R}^M$ es una función l -Lipschitziana y M -acotada y además que $F(x, u) = \bigcup_{v \in V} f(x, u, v)$ es un conjunto convexo $\forall x \in \mathbf{R}^M, \forall u \in U$. Entonces $\lim_{h \rightarrow 0^+} \overrightarrow{Disc}_{G_h}(K) = Disc_f(K)$ donde el límite es en el sentido de Painlevé-Kuratowski y donde $G_h(x, u) = x + hF(x, u) + \frac{M}{2} l B h^2 \quad \forall x \in \mathbf{R}^M, \forall u \in U$ (B bola unitaria)

Esta última proposición nos dice que podemos aproximar el conjunto de victoria discriminante para Víctor por conjuntos de victoria discriminante discreto para Víctor del sistema discreto (en tiempo) δ utilizando apropiadas funciones g .

Zonas de captura y ecuación de Isaacs (Método IV). Este último método se aplica a juegos de perseguidor-evasor discretos en tiempo (ver [13]).

Consideremos el sistema dinámico discreto (en tiempo) δ y sea $\tau \subset \mathbf{R}^M$ un blanco cerrado dado. Definamos como en el método anterior $G(x, u) = \bigcup_{v \in V} g(x, u, v)$. El método está

basado en la idea de Pontryagin de ir construyendo las zonas de captura W_n en donde "Ursula alcanza a Víctor" (es decir el sistema ingresa al blanco) en n pasos. Estas zonas de captura se obtienen entonces recursivamente de la siguiente manera:

$$\begin{cases} W_0 = \tau \\ W_{n+1} = \{x \in \mathbf{R}^M / \exists u \in U \quad G(x, u) \subset W_n\} & \forall n \in \mathbf{N}_0 \end{cases}$$

Por otro lado se define una sucesión $\{u_n\}_{n \in \mathbf{N}_0}$ de funciones de \mathbf{R}^M en \mathbf{R} de la siguiente manera:

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

$$w_{n+1}(x) = \min_{u \in U} \max_{v \in V} w_n(g(x, u, v)) + c(x) \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$$

$$\text{donde } w_0(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \tau \\ \infty & \text{si } x \notin \tau \end{cases} \quad \text{y } c(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \notin \tau \\ 0 & \text{si } x \in \tau \end{cases}$$

Si definimos $w(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} w_n(x)$ entonces se puede demostrar con argumentos clásicos de programación dinámica (ver [13]) que $w(x)$ es el "min-max" número de pasos necesarios para que el estado del sistema ingrese al blanco si la posición inicial es x ($w(x)$ es solución de la ecuación de Isaacs estacionaria). El siguiente teorema (demostrado en [13]) establece la relación entre el método de las zonas de captura y la ecuación de Isaacs estacionaria.

Theorem 5. Sea $x \in \mathbb{R}^M$.

- i) Si $x \notin \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} W_k$ entonces $w_n(x) = \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}_0$ (no capturable).
- ii) Si $x \in \bigcup_{k \in \mathbb{N}_0} W_k$, sea n el menor entero tal que $x \in W_n$. Entonces el primer $k \in \mathbb{N}_0$ que verifica que $w_k(x) \neq \infty$ es n y $\forall p \in \mathbb{N}$ se cumple: $w_n(x) = w_{n+1}(x) = \dots = w_{n+p}(x)$.

Notemos que este teorema establece un lazo entre la interpretación cuantitativa del problema (cálculo de la función valor a través de la ecuación de Isaacs estacionaria) y la interpretación cualitativa del mismo (calcular las zonas de captura).

2. RELACIÓN ENTRE LOS MÉTODOS

2.1. Métodos I y II. En esta sección estudiaremos la relación entre los métodos I y II. En primer lugar, notemos que la ecuación 5 del método II puede escribirse de la forma:

$$V_k(x) = \max_{v \in V} \min_{u \in U} \left\{ \left(1 + \frac{k}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|} \right)^{-1} \left(\sum_{y \in \Omega^k} p(x, y / u, v) V_k(y) \right) + \frac{\frac{k}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}}{1 + \frac{k}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}} \right\}$$

la cual es "similar" a la ecuación 4 del método I, si tenemos en cuenta que $(1+h)^{-1} \cong e^{-h}$ y $\frac{h}{1+h} \cong 1 - e^{-h}$ y donde $\frac{k}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}$ cumple el rol de h en la ecuación 4. A pesar de

que este razonamiento no es preciso el mismo nos conduce a hacer el siguiente planteo: En [8] la condición:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{h_n} = 0 \quad (7)$$

es necesaria para demostrar la convergencia del método I. Sin embargo, con el razonamiento anterior, esta condición no se verifica para el método II pues $\frac{k_n}{h_n} = \frac{k_n}{\frac{k_n}{\sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|}} = \sum_{i=1}^M |f_i(x, u, v)|$ y a pesar de esto el método II converge a la solución de nuestro problema (ver [14]). Nos preguntamos entonces: Es la condición 7 una condición necesaria para la convergencia del método I, o es simplemente una condición técnica para hacer

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

la demostración de la convergencia más simple?. La respuesta a esta pregunta es que la condición 7 en realidad no es necesaria para la convergencia del método I, y esto será consecuencia de los siguientes teoremas en donde relacionamos a los dos métodos.

Theorem 6. Sea $V_k^h(x)$ la solución de la ecuación 4 (método I) y $V_k(x)$ la solución de la ecuación 5 (método II). Entonces $\lim_{h \rightarrow 0} V_k^h(x) = V_k(x)$

Notemos que este teorema nos dice que el método II puede interpretarse como el caso límite del método I cuando el paso h de la discretización en el tiempo del método I tiende a cero. El próximo teorema nos proporciona una cota para $\|V_k^h - V_k\|$ en función de h y k .

Theorem 7. Sea $V_k^h(x)$ la solución de la ecuación 4 (método I) y $V_k(x)$ la solución de la ecuación 5 (método II) para todo $h > 0$ y $k > 0$. Entonces para cada $k > 0$ existe una constante $C_k > 0$ tal que: $\|V_k^h - V_k\| \leq C_k h \quad \forall h > 0$.

Las constantes C_k del teorema anterior tienen la propiedad no deseable de tender a infinito cuando k tiende a cero. Sin embargo, podemos encontrar una constante $C > 0$ (independiente de k y h) tal que $C_k \leq C \cdot (\frac{1}{k})$ para todo $k > 0$. Entonces obtenemos la acotación $\|V_k^h - V_k^h\| \leq C \cdot (\frac{1}{k})$ a partir de la cual se puede probar que la condición 7 no es necesaria para la convergencia del método I.

2.2. Métodos III y IV. Aunque los métodos III y IV han sido desarrollados en forma completamente separada y con herramientas matemáticas diferentes, los mismos están estrechamente relacionados como veremos a continuación. Consideremos nuevamente el sistema dinámico discreto 6 y sea $\tau \subset \mathbf{R}^M$ un blanco abierto (para estar bajo las hipótesis del método III de la teoría de Viabilidad). Definamos $K = \mathbf{R}^M - \tau$ y $G(x, u) = \bigcup_{v \in V} g(x, u, v) \quad \forall u \in U, \forall x \in \mathbf{R}^M$. Sean entonces K_n los conjuntos definidos en el método III de manera tal que: $\overline{Disc_G(K)} = \bigcap_{n \in \mathbf{N}_0} K_n$ y sean W_n los conjuntos de captura definidos en el método IV. Se demuestra entonces el siguiente teorema que relaciona a ambos métodos:

Theorem 8. Sean K_n y W_n los conjuntos definidos arriba. Entonces $K_n = CW_n = \mathbf{R}^M - W_n \quad \forall n \in \mathbf{N}_0$

Recordemos (método IV) que a partir del cálculo de los conjuntos de captura W_n se podían obtener aproximaciones a la función valor del juego. Por esto, y teniendo en cuenta el teorema que acabamos de enunciar, los conjuntos K_n también pueden utilizarse con dicho fin. Esta conclusión no es tan evidente al estudiar el método III.

2.3. Métodos I y IV. Relacionaremos la técnica de discretización en el tiempo de la ecuación de Isaacs 2 dada al estudiar el método I con los conjuntos de captura W_n definidos en el método IV. Consideremos nuevamente el sistema dinámico discreto (en tiempo):

$$\begin{cases} x_{n-1} = x_n + h f(x_n, u_n, v_n) = g_h(x_n, u_n, v_n) & u_n \in U, v_n \in V, n \in \mathbf{N}_0 \\ x_0 = x \in \mathbf{R}^M \end{cases} \quad (8)$$

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

el cual es una discretización en el tiempo del sistema dinámico 1 utilizando la técnica de Euler con paso $h > 0$. Sea $\tilde{N}_h(x)$ la función valor superior de este juego y $G_h(x, u) = \bigcup_{v \in V} g_h(x, u, v) = \bigcup_{v \in V} x + h f(x, u, v) \quad \forall u \in U, \forall x \in \mathbb{R}^M$. Sean W_n^h los conjuntos de captura correspondientes a G_h como estaban definidos en el método IV. El siguiente teorema vincula a los dos métodos

Theorem 9. Si $x \in W_n^h - W_{n-1}^h$ entonces $\tilde{N}_h(x) = n$

3. CONCLUSIONES

Como resultado de la sección anterior podemos obtener las siguientes conclusiones:

- 1) El método II puede interpretarse como el caso límite del método I cuando el paso h de la discretización del tiempo del mismo tiende a cero.
- 2) La condición $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k_n}{h_n} = 0$ no es necesaria para la convergencia del método I.
- 3) Aunque los métodos III y IV fueron desarrollados en forma completamente separada y con herramientas matemáticas diferentes los mismos están estrechamente relacionados pues calculan subconjuntos del espacio de estados que son complementarios.
- 4) Tanto el método III como el método IV pueden utilizarse para obtener aproximaciones a la función valor del juego a pesar del enfoque cualitativo de los mismos.

REFERENCES

- [1] Elliot R. J. and Kalton N. J., The existence of value in differential games, Mem. Amer. Math. Soc. 126, 1972.
- [2] Roxin E., Axiomatic approach in diferencial games, J. Optim.. Th. Appl., pp 153-163.
- [3] Varaiya P. P., On the existence for solution to a differential game, SIAM J. Control 5, pp 153-162, 1967.
- [4] Evans L. C., Souganidis P. E., Differential games and representation formulas for solutions Hamilton-Jacobi equation, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984), 773-797.
- [5] Ishii H., A boundary value problem of the Dirichlet type for Hamilton-Jacobi equations, Ann S. Norm. Sup. Pisa (IV) 16 (1989), 105-135.
- [6] Ishii H. Perron's method for Hamilton-Jacobi equations, Duke Math. J. 55 (1987) 369-384.
- [7] Bardi M. and Soravia P., Approximation of differential games of pursuit-evasion by discrete times games, Differential Games-Developments in modeling and computation. R. P. Härmäläinen H. K. Ehtamo Eds, Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol 156, Springer-Verlag 1991.
- [8] Bardi M., Falcone M. and Soravia P., Fully discrete schemes for the value function of pursuit-evasion games. Advances in dynamic games and applications, T. Basar, A. Haurie Eds, Birkhauser, pp 89-105, 1994.
- [9] Aubin J. P. (1989) Victory and defeat in differential games, Lecture notes in Control and Information Sciences, Vol. 121. pp. 337-347, Springer-Verlag, New York, Berlin, 1989.

COMPARACIÓN DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA JUEGOS

- [10] Cardaliaguet P. (submitted) The target problem for nonanticipative strategies.
- [11] Quincampoix M. (1991) Playable Differential Games, *J. Math. Analysis and Appl.* Vol. 161, N.1, pp 194-211.
- [12] Cardaliaguet P., Quincampoix M., Patrick Saint-Pierre, Some algorithms for differential games with two players and one target (1993).
- [13] Laporte V., Nicolas J. M., Bernhard P., About the resolution of discrete pursuit games and its applications to naval warfare.
- [14] Pourtallier O., Tidball M., Approximation of the Value Function for a Class of differential Games with Target, Preprint Volume to the sixth international symposium on dynamic games and applications, St - Jovite, Québec, Canada, July 1994.
- [15] Bardi M., Soravia P., On the minimum time problem for smooth target, preprint Università di Padova 1989.