

CÁLCULO DO ESPALHAMENTO ELETROMAGNÉTICO DE ANTENAS REFLETORAS  
MODELADAS POR FACETAS TRIÂNGULARES

Márcio L. X. dos Santos  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
Departamento de Computação Científica  
Instituto Tecnológico de Aeronáutica  
CTA - São José dos Campos SP - 12200-900

e  
Universidade de Taubaté  
Departamento de Informática  
Taubaté - SP

Conrado S. S. Zenun  
Escola Federal de Engenharia de Itajubá  
Departamento de Matemática e Computação  
Av. BPS, 1303 - Itajubá MG - 37500-000

RESUMO

Desenvolveu-se um modelo computacional que permite obter o diagrama de radiação de antenas refletoras. A superfície refletora em estudo é modelada por facetas triangulares. A integral de radiação sobre a superfície é calculada considerando-se a somatória das integrais sobre cada triângulo. Para a densidade de corrente elétrica sobre cada triângulo utilizou-se a aproximação da ótica física. Os resultados mostram que o modelo desenvolvido é eficiente para o estudo de superfícies refletoras parabólicas, hiperbólicas, esféricas e disco circular. Resultados para o refletor parabólico são apresentados.

ABSTRACT

A computer method to calculate the radiation pattern of an arbitrary shaped electromagnetic reflector surface is presented. The method uses a piecewise decomposition of the arbitrary electromagnetic reflector surface into planar triangle facets. The radiation integral is then computed over each individual triangular facet and the overall radiation pattern obtained through vector summation of all facet contributions to the radiated field at a given point. The surface current density on any planar facet of the modelled reflector is obtained by linear interpolation of the physical optics current density approximation computed on each vertex of the individual triangle. Radiation diagrams have been computed for parabolic, hyperbolic and spherical surfaces and for circular disks. Typical results obtained for the parabolic reflectors are given. These results show that the method can be used efficiently for the analysis and design of arbitrary shaped antenna reflectors.

INTRODUÇÃO

O cálculo do espalhamento eletromagnético é utilizado principalmente no projeto de antenas refletoras. Uma antena refletora é constituída basicamente de um radiador primário, ou iluminador, que distribui energia eletromagnética e de uma superfície refletora que colima esta energia sobre uma abertura maior. Um dos modelos mais utilizados dessas antenas é o refletor parabólico alimentado no foco. São conhecidos vários modelos numéricos que empregam a discretização da superfície refletora por facetas triangulares com o intuito de se obter os parâmetros necessários para o projeto da antena [4, 6]. O modelo que foi utilizado se baseia no trabalho desenvolvido por Rabelo [3], que, entretanto, emprega outra forma de discretização da superfície em estudo. Na primeira parte deste trabalho, exemplificamos o uso de superfícies modeladas por triângulos no projeto de antenas. A seguir, apresentamos : o modelo da integral de radiação utilizado para superfícies arbitrárias, o método de Ludwig, a extensão do método de Ludwig utilizando elementos triangulares, a geometria do elemento triangular definindo as equações que nos permitem obter os parâmetros necessários em função das coordenadas do sistema esférico principal que serão utilizados no cálculo da integral de radiação sobre um elemento triangular, e com o intuito de otimizar o cálculo, aplica-se o método do simplex obtendo

equações finais numa forma mais simples. Finalmente, define-se as características do iluminador e os parâmetros utilizados nas definições das superfícies estudadas, com alguns resultados [14].

### O USO DE SUPERFÍCIES MODELADAS POR TRIÂNGULOS NO ELETROMAGNETISMO

O modelamento de superfícies por elementos triangulares tem sido empregado no cálculo de parâmetros mecânicos e elétricos de antenas refletoras e em problemas de espalhamento eletromagnético com bons resultados [3]. Os elementos triangulares ajustam-se melhor a superfícies arbitrárias do que outros elementos, sendo então mais adequadas para simular uma superfície [5]. O cálculo da deformação de antenas em satélites ocasionado pelas variações de temperatura foi feito por Chan e Raab [6]. O modelamento por triângulos também foi utilizado para o estudo de superfícies esféricas de revolução como refletores de grande abertura (725 m) para uso no espaço [12]. Albertsen e Pontoppidon [13] calcularam o diagrama de radiação de antenas de um ou dois refletores através de técnicas numéricas utilizando a aproximação da ótica física e verificaram que para modelar a borda de superfícies refletoras de contorno mais complexo, o uso de triângulos leva a resultados melhores do que os obtidos com modelamento por quadriláteros. O método dos momentos foi utilizado por Wang [4], para estudar o espalhamento eletromagnético por um corpo tridimensional de forma arbitrária cuja superfície é modelada por triângulos. Os resultados encontrados garantem que o modelamento por triângulos é mais eficiente que o modelamento por quadriláteros.

### A INTEGRAL DE RADIAÇÃO E SUA SOLUÇÃO

Dada uma superfície  $S$ , perfeitamente condutora, iluminada por uma fonte de ondas eletromagnéticas ou iluminador, situada na origem  $O$  de um sistema de coordenadas cartesianas  $X, Y, Z$ , conforme a figura 1, obtém-se o campo eletromagnético devido ao espalhamento por  $S$  no ponto de observação  $P$ , localizado na região de campo distante, conforme [2], como:

$$\vec{E}_S(P) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi R} e^{-jkR} \iint_S [\vec{J}_S - (\vec{J}_S \cdot \vec{R})\vec{R}] e^{jK\rho} \cdot \vec{R} dS \quad (1a)$$

$$\vec{H}_S(P) = \sqrt{\epsilon/\mu} \vec{R} \times \vec{E}_S(P) \quad (1b)$$

onde:

$\vec{E}_S(P)$  e  $\vec{H}_S(P)$  são, respectivamente, o campo elétrico e o campo magnético espalhado por  $S$  no ponto distante  $P$ ;  $\vec{J}_S$  é a densidade superficial de corrente elétrica sobre  $S$ ;  $\omega = 2\pi f$  é a frequência angular;

$K = 2\pi/\lambda$  é o número de onda da radiação eletromagnética e  $f$  e  $\lambda$  são, respectivamente, a frequência e o comprimento da onda.  $\mu$  e  $\epsilon$  são, respectivamente, a permeabilidade magnética e a permissividade do meio, suposto homogêneo, linear e isotrópico.

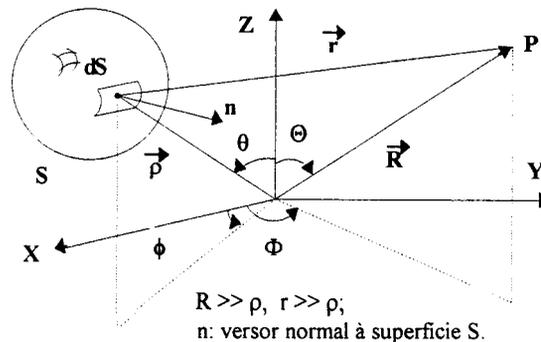


Fig. 1. Espalhamento da radiação de uma fonte pontual por uma superfície refletora  $S$ .

Conhecendo-se  $\vec{J}_S$  sobre S, as equações (1a) e (1b) podem então ser resolvidas para qualquer tipo de superfície refletora S. Um dos métodos utilizados para calcular  $\vec{J}_S$  - método da Equação Integral - utiliza a seguinte condição de contorno sobre S:

$$\vec{n} \times (\vec{E}_i + \vec{E}_S) = 0 \quad (2)$$

que leva a seguinte equação integral [2]:

$$\vec{n} \times \vec{E}_i = \frac{j}{4\pi\omega\epsilon} \int_S \vec{n} \times \left[ (\vec{J}_S \cdot \nabla) \nabla + K^2 \vec{J}_S \right] \frac{e^{-jKr}}{r} dS \quad (3)$$

Conforme [3], a solução analítica da equação (3) é, em alguns casos, impossível ou impraticável. Usa-se então métodos numéricos para resolvê-la. O método dos momentos reduz a equação integral a uma equação matricial, cuja solução fornece a densidade de corrente induzida  $\vec{J}_S$  em um conjunto de pontos sobre S.

Ainda conforme [9], este método aplica-se bem a problemas bidimensionais de espalhamento ou a problemas que envolvem superfícies de revolução se as dimensões de S forem eletricamente pequenas, menores que cerca de  $20\lambda$ . Caso contrário, o número de pontos da amostragem necessário para haver precisão aceitável do cálculo torna a solução pelo Método dos Momentos inviável computacionalmente. Outro método utilizado, chamado de Aproximação da Ótica Física ou Teoria Vetorial de Kirchhoff, ou ainda Método da Distribuição de Corrente, baseia-se na suposição de que na região de S iluminada diretamente pelo iluminador, a corrente induzida em cada ponto é igual à que seria induzida caso o campo eletromagnético do iluminador fosse refletido por um plano infinito tangente a S pelo ponto de reflexão, de acordo com a ótica geométrica (condição limite quando o comprimento de onda tende a zero). Neste caso:

$$\vec{J}_S = 2(\vec{n} \times \vec{H}_i) \quad (4)$$

e na região de sombra de S (não iluminada pelo iluminador), a corrente é suposta nula ou  $\vec{J}_S = 0$ .

Este método, ao contrário do Método da Equação Integral, é tanto melhor quanto maiores as dimensões da superfície em número de comprimento de onda. Entretanto, mesmo para refletores de diâmetro pequeno ( $3-4\lambda$ ) a aproximação da ótica física fornece resultados precisos.

A equação (4) substituída na equação (1a) fornece:

$$\vec{E}_S(P) = \frac{-j\omega\mu}{2\pi R} e^{-jKR} \iint_{S_0} \left\{ (\vec{n} \times \vec{H}_i) - [(\vec{n} \times \vec{H}_i) \cdot \vec{R}] \vec{R} \right\} e^{-jK\vec{p} \cdot \vec{R}} dS \quad (5)$$

onde:

$S_0$  é a porção da superfície S iluminada pelo iluminador.

Uma análise inicial da equação (5) mostra que a função vetorial de amplitude do integrando depende da geometria da superfície  $S_0$  e dos campos que a iluminam, enquanto que a função escalar de fase do integrando depende basicamente do caminho percorrido pela radiação desde o iluminador até o ponto de espalhamento.

Vários são os métodos utilizados para calcular a equação (5), que podem ser classificados em assintóticos e numéricos, [8]. Entretanto, não existe um método que forneça o diagrama de radiação em toda a faixa angular desejada. As técnicas numéricas aplicam-se melhor à região próxima do lóbulo principal do diagrama de radiação, enquanto que as técnicas assintóticas se aplicam melhor às regiões distantes do lóbulo principal. A maior dificuldade das técnicas numéricas decorre da necessidade de calcular uma integral dupla cujo integrando é uma função rapidamente oscilante. Faz-se necessário então, para obter uma boa precisão, grande espaço de memória e muito tempo de computação. Dessa forma, quanto mais pontos de observação houver, mais computacionalmente ineficiente e lento é o processo. Das diversas técnicas de integração numérica [10], as mais empregadas são as de Gauss, Newton-Cotes e Ludwig. O método de Ludwig resolve o cálculo da integral através de domínios quadriláteros de dimensões da ordem de um comprimento de onda, reduzindo de 4 a 8 vezes o tempo de computação.

#### O MÉTODO DE LUDWIG

O método de Ludwig [1] resolve integrais duplas com integrandos rapidamente oscilantes do tipo:

$$I(X, Y) = \iint_S F(x, y) e^{jK\gamma(x, y, X, Y)} dx dy \quad (6)$$

que é do tipo das equações (1) e (5). Na equação (6)  $x$  e  $y$  representam um sistema de coordenadas genérico. Tomando-se um ponto de observação fixo qualquer  $P$  de coordenadas  $(X_p, Y_p)$  a equação (6) pode ser reescrita como:

$$I_{pq} = \int_{x_1}^{x_M} \int_{y_1}^{y_N} F(x, y) e^{jK\gamma_{pq}(x, y)} dx dy \quad (7)$$

sendo:  $x_1, x_M, y_1$  e  $y_N$  as coordenadas extremas da superfície  $S$ .

Tomando-se um elemento de área quadrilateral

$$\Delta s_{mn} = \{(x, y): x_m \leq x \leq x_{m+1}, y_n \leq y \leq y_{n+1}\}$$

a equação (7) é reescrita como:

$$I_{pqmn} = \int_{x_m}^{x_{m+1}} \int_{y_n}^{y_{n+1}} F_{mn}(x, y) e^{jK\gamma_{pqmn}(x, y)} dx dy \quad (8)$$

Ludwig faz a seguinte suposição: supondo que as dimensões físicas de  $\Delta s_{mn}$  sejam da ordem de um comprimento de onda,  $F_{mn}$  e  $\gamma_{mn}$  serão bem comportadas e de variação lenta sobre  $\Delta s_{mn}$ . Então, se  $F_{mn}$  e  $\gamma_{mn}$  forem aproximadas por funções analiticamente integráveis, a equação (7) será analiticamente integrável e poderá ser escrita na forma:

$$I_{pq} = \sum I_{pqmn} \quad (9)$$

onde:

$I_{pq}$  é dada pela equação (8) e a somatória é feita sobre todos os quadriláteros de  $\Delta s_{mn}$ .

A aproximação linear de  $F_{mn}$  e  $\gamma_{mn}$  por funções lineares é feita como:

$$F_{mn}(x, y) \cong a_{mn} + b_{mn}(x - x_m) + c_{mn}(y - y_n) \quad (10)$$

$$\gamma_{mn}(x, y) \cong \alpha_{mn} + \beta_{mn}(x - x_m) + \zeta_{mn}(y - y_n) \quad (11)$$

Os coeficientes  $a_{mn}, b_{mn}, c_{mn}, \alpha_{mn}, \beta_{mn}, \zeta_{mn}$  são obtidos pelo método dos mínimos quadráticos ajustando-se o melhor quadrilátero plano aos valores da função nos vértices de  $\Delta s_{mn}$ .

### EXTENSÃO DO MÉTODO DE LUDWIG

A superfície de integração  $S$  será discretizada em elementos triangulares planos de dimensão finita sobre os quais se supõe uma distribuição simples das funções de amplitude  $F(x, y)$  e fase  $\gamma(x, y)$ , definida pelos valores dessas funções nos vértices de cada elemento.

Conhecendo-se os valores das funções  $F(x, y)$  e  $\gamma(x, y)$  nos vértices de cada elemento triangular e supondo que em seu interior,  $F$  e  $\gamma$  sejam aproximadas por funções integráveis analiticamente, contínuas de elemento para elemento, a equação (6) pode ser escrita na forma:

$$I(X, Y) = \sum_t I_t(X, Y)$$

onde:

$$I_t(X, Y) = \iint_{S_t} F_t(x, y) e^{jK\gamma_t(x, y, X, Y)} dx dy \quad (12)$$

sendo que a somatória em  $t$  estende-se a todos os elementos triangulares  $S_t$ .

### GEOMETRIA DO ELEMENTO TRIANGULAR

O elemento triangular genérico  $T_g$ , de vértices  $V_1, V_2, V_3$ , será definido em um sistema principal de coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$ , conforme a figura 2:

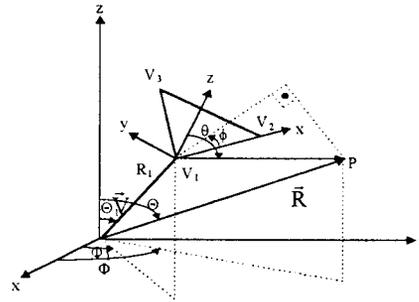


Fig. 2. Geometria do elemento triangular.

O sistema de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ , com origem no vértice  $V_1$ , está associado a  $T_g$ . Definimos também o sistema principal de coordenadas esféricas  $(R, \Theta, \Phi)$  associado ao sistema principal de coordenadas cartesianas  $(X, Y, Z)$ , e o sistema local de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$  associado ao sistema local de coordenadas cartesianas  $(x, y, z)$ .  $P$  é um ponto qualquer de observação exterior ao triângulo, isto é,  $r \cong R$  e  $r \gg R_1$ . Dessa forma podemos obter as relações entre os sistemas de coordenadas necessárias para a solução da integral de radiação.

### INTEGRAL DE RADIAÇÃO SOBRE UM ELEMENTO TRIANGULAR

A figura 3 mostra o elemento genérico triangular  $T_g$  e os sistemas de coordenadas principais e locais e um iluminador situado na origem que ilumina o elemento  $T_g$ . No ponto de observação distante  $P$ , considerando  $R_1 \ll R$  e  $kR \gg 1$ , o campo elétrico espalhado por  $T_g$  pode ser calculado através da integral de radiação dada pelas equações (1) ou (5).

A componente na direção radial ( $\vec{R}$ ) do campo elétrico, na região de campo distante é desprezível. A componente na direção  $\vec{H}$  ( $\vec{H} = \vec{\Theta}$  ou  $\vec{H} = \vec{\Phi}$ ) é dada por:

$$E_{SH}(P) = \vec{H} \cdot \vec{E}_S(P) = -\frac{j\omega\mu}{4\pi R} e^{-jkR} \vec{H} \cdot \iint_{T_g} \vec{J}_S e^{jk\vec{r} \cdot \vec{R}} dx dy \quad (13)$$

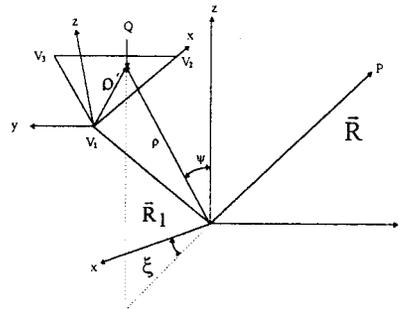


Fig. 3. Espalhamento pelo elemento triangular.

O vetor  $\vec{p}$ , que tem origem no iluminador e vai até o ponto de espalhamento sobre  $T_g$  é dado por:

$$\vec{p} = \vec{R}_1 + \vec{\rho} \quad (14)$$

onde:

$\vec{R}_1$  é o vetor posição do vértice  $V_1$  e  $\vec{\rho}' = x\hat{x} + y\hat{y}$  é o vetor que vai do vértice  $V_1$  ao ponto de espalhamento sobre  $T_g$ .

Substituindo a equação (14) na equação (13) teremos:

$$E_{SH}(P) = \frac{-j\omega\mu}{4\pi R} e^{-jk(R - \vec{R}_1 \cdot \hat{R})} \hat{H} \iint_{T_g} \vec{J}_S e^{jk\vec{\rho}' \cdot \hat{R}} dx dy \quad (15)$$

onde:

$$\vec{R}_1 \cdot \hat{R} = R_1 [\text{sen } \Theta \text{ sen } \Theta_1 \cos(\Phi - \Phi_1) + \cos \Theta \cos \Theta_1] \quad (16)$$

$$\vec{\rho}' \cdot \hat{R} = a_p(\Theta, \Phi)x + b_p(\Theta, \Phi)y \quad (17)$$

sendo que:

$$a_p(\Theta, \Phi) = (a_1 \cos \Phi + b_1 \text{sen } \Phi) \text{sen } \Theta + c_1 \cos \Theta \quad (18)$$

$$b_p(\Theta, \Phi) = (a_2 \cos \Phi + b_2 \text{sen } \Phi) \text{sen } \Theta + c_2 \cos \Theta \quad (19)$$

Os parâmetros  $a_1$ ,  $b_1$ ,  $c_1$ ,  $a_2$ ,  $b_2$  e  $c_2$  são dados pela relação de transformação do sistemas de coordenadas cartesianas principal para o local.

Conforme a aproximação da ótica física, a densidade superficial de corrente  $\vec{J}_S$  é dada por:

$$\vec{J}_S = 2(\hat{n} \times \vec{H}_i) \quad (20)$$

onde:

$\hat{n}$  é a normal ao elemento  $T_g$ , e  $\vec{H}_i$  é o campo magnético gerado pelo alimentador, incidente sobre  $T_g$ .

Supondo que  $\vec{E}_i$  e  $\vec{H}_i$  satisfaçam as seguintes relações de campos distantes (pois estamos supondo que o alimentador se acha suficientemente afastado de  $T_g$ ), teremos:

$$\vec{H}_i = \sqrt{\epsilon/\mu} \hat{\rho} \times \vec{E}_i \quad (21)$$

$$\vec{E}_i(\rho, \psi, \xi) = [E_\psi(\psi, \xi)\hat{\psi} + E_\xi(\psi, \xi)\hat{\xi}] \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad (22)$$

onde:

$(\rho, \psi, \xi)$  são as coordenadas do ponto de espalhamento no sistema principal de coordenadas esféricas.

Substituindo as equações (21) e (22) na equação (20) teremos:

$$\vec{J}_S = 2\sqrt{\epsilon/\mu} \hat{z} \times [E_\psi(\psi, \xi)\hat{\xi} - E_\xi(\psi, \xi)\hat{\psi}] \frac{e^{-jk\rho}}{\rho} \quad (23)$$

Como:

$$\hat{\xi} = -\text{sen } \xi \hat{X} + \cos \xi \hat{Y}$$

$$\hat{\psi} = \cos \psi \cos \xi \hat{X} + \cos \psi \text{sen } \xi \hat{Y} - \text{sen } \psi \hat{Z}$$

teremos, utilizando as relações de transformação do sistema de coordenadas cartesianas local para o principal que:

$$\vec{J}_S = 2\sqrt{\epsilon/\mu} [A(x, y)\hat{x} + B(x, y)\hat{y}] e^{-jk\rho} \quad (24)$$

sendo que:

$$A(x, y) = -\frac{1}{\rho} [a_2 \alpha(\psi, \xi) + b_2 \beta(\psi, \xi) + c_2 \delta(\psi, \xi)] \quad (25)$$

e

$$B(x, y) = \frac{1}{\rho} [a_1 \alpha(\psi, \xi) + b_1 \beta(\psi, \xi) + c_1 \delta(\psi, \xi)] \quad (26)$$

e

$$\alpha(\psi, \xi) = - [E_\psi(\psi, \xi) \text{sen } \xi + E_\xi(\psi, \xi) \cos \psi \cos \xi] \quad (27)$$

$$\beta(\psi, \xi) = E_{\psi}(\psi, \xi) \cos \xi - E_{\xi}(\psi, \xi) \cos \psi \sin \xi \quad (28)$$

$$\delta(\psi, \xi) = E_{\xi}(\psi, \xi) \sin \psi \quad (29)$$

Dessa forma a equação final que fornece o campo espalhado é dada por :

$$E_{SH}(P) = \frac{-j}{\lambda R} e^{-jK(R - \bar{R}_1 \cdot \hat{R})} \hat{H} \cdot (I_x \hat{x} + I_y \hat{y}) \quad (30)$$

onde:

$$I_x = \iint_{T_g} A(x, y) e^{jK(a_p x + b_p y - \rho)} dx dy \quad (31)$$

e

$$I_y = \iint_{T_g} B(x, y) e^{jK(a_p x + b_p y - \rho)} dx dy \quad (32)$$

sendo que  $\bar{R}_1 \cdot \hat{R}$ ,  $a_p$ ,  $b_p$ ,  $A(x, y)$  e  $B(x, y)$  são fornecidos, respectivamente, pelas equações (16), (18), (19), (25) e (26).

fazendo  $\hat{H} = \hat{\Theta}$  e  $\hat{H} = \hat{\Phi}$ , teremos:

$$E_{S\Theta}(P) = \frac{-j}{\lambda R} e^{-jK(R - \bar{R}_1 \cdot \hat{R})} (x_{\Theta} I_x + y_{\Theta} I_y) \quad (33)$$

$$E_{S\Phi}(P) = \frac{-j}{\lambda R} e^{-jK(R - \bar{R}_1 \cdot \hat{R})} (x_{\Phi} I_x + y_{\Phi} I_y) \quad (34)$$

Dessa forma, o problema se reduz ao cálculo dos integrais  $I_x$  e  $I_y$  para cada ponto de observação. Seja então as aproximações :

$$F(x, y) = A' + B'x + C'y \quad (35)$$

$$\gamma(x, y) = a' + b'x + c'y \quad (36)$$

onde os coeficientes  $A'$ ,  $B'$ ,  $C'$ ,  $a'$ ,  $b'$  e  $c'$  são dados por:

$$A' = F_1; \quad B' = (F_2 - F_1) \cdot x_2; \quad C' = [F_3 - F_1 + (F_1 - F_2)x_3/x_2]/y_3; \quad a' = \gamma_1; \quad b' = (\gamma_2 - \gamma_1)/x_2; \\ c' = [\gamma_3 - \gamma_1 + (\gamma_1 - \gamma_2)x_3/x_2]/y_3$$

sendo que:

$F_1$ ,  $F_2$  e  $F_3$  são os valores de  $F(x, y)$  nos vértices  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ ; e

$\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  e  $\gamma_3$  os valores de  $\gamma(x, y)$ , (Fig. 2).

### O MÉTODO DO SIMPLEX

Para definir as coordenadas de área considere a figura 4. Nela,  $O$  é a origem do sistema de coordenadas cartesianas genéricas  $(u, v)$ .  $V_1$  é a origem de um sistema de coordenadas cartesianas retangulares  $(x, y)$  associado a  $T_g$ .  $Q$  é um ponto qualquer no interior do triângulo de lados  $l_1$ ,  $l_2$  e  $l_3$  opostos, respectivamente, aos vértices  $V_1$ ,  $V_2$  e  $V_3$ .  $S_i$  é a área do triângulo de vértice em  $Q$  e base  $l_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ .  $\epsilon_i$  é o ângulo  $V_2 \hat{V}_1 V_3$ . O triângulo  $T_g$  é denominado de simplex bidimensional de área  $S_T$ .

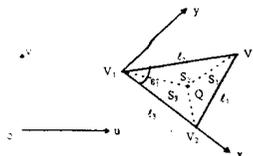


Fig. 4. Definição do Simplex.

As coordenadas de área  $s_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) do ponto Q interior a  $T_g$  são definidas por:

$$s_i = S_i/S_g, \quad i = 1, 2, 3 \quad (37)$$

As coordenadas de área são linearmente dependentes e obedecem a relação:

$$\sum_{i=1}^3 s_i = 1 \quad (38)$$

Para obtermos as relações entre coordenadas sobre um simplex, representamos na figura abaixo um simplex genérico.

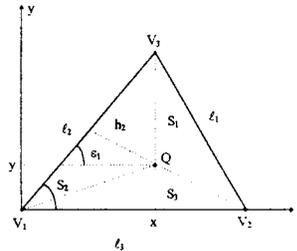


Fig. 5. Definição das coordenadas num simplex.

Do triângulo  $V_1 V_2 Q$  temos:

$$S_g = \frac{\ell_3 \cdot \ell_2 \cdot \text{sen} \varepsilon_1}{2} \quad (39)$$

e então obtém-se o elemento de área, conforme abaixo:

$$dS_{T_g} = 2S_g ds_1 ds_2 \quad (40)$$

Assim, equações como as (31) e (32) podem ser reescritas resultando em:

$$I = 2S_g \int_0^1 \int_0^{1-s_1} F(s_1, s_2) e^{j\gamma(s_1, s_2)} ds_1 ds_2 \quad (41)$$

onde:

$$F(s_1, s_2) = A + Bs_1 + Cs_2 \quad (42)$$

$$\gamma(s_1, s_2) = a + bs_1 + cs_2 \quad (43)$$

sendo:

$$A = F_3 \quad (44a)$$

$$B = F_1 - F_3 \quad (44b)$$

$$C = F_2 - F_3 \quad (44c)$$

$$a = \gamma_3 = K[\ell_2(a_p \cos \varepsilon_1 + b_p \sin \varepsilon_1) - \rho_3] \quad (44d)$$

$$b = \gamma_1 - \gamma_3 = -K\rho_1 - a \quad (44e)$$

$$c = \gamma_2 - \gamma_3 = K(a_p \ell_3 - \rho_2) - a \quad (44f)$$

onde:

$F_1, F_2$  e  $F_3$  são os valores da função  $F$  nos vértices  $V_1, V_2$  e  $V_3$  e  $\gamma_1, \gamma_2$  e  $\gamma_3$  os valores da função  $\gamma$ .

A equação (41), com as aproximações dadas pelas equações (42) e (43), pode ser calculada analiticamente.

#### CÁLCULO DOS DIAGRAMAS DE RADIAÇÃO DE SUPERFÍCIES REFLETORAS COM ILUMINADOR NO FOCO

O cálculo numérico da integral de radiação, desenvolvido neste capítulo, pode ser aplicado a qualquer tipo de superfície refletora. Como também foi desenvolvido um modelo genérico de triangulação de superfícies 2D e

3D, aplicou-se o modelo numérico da integral de radiação à superfícies parabólicas, circulares, hiperbólicas e esféricas. A literatura apresenta vários resultados ou diagramas de radiação [2, 3, 7, 8, 11, 12], para estes tipos de superfície. Comparando-se estes resultados com os obtidos valida-se o modelo desenvolvido que poderá ser utilizado no projeto de antenas com superfícies arbitrárias. A figura 6 mostra o sistema superfície refletora e iluminador.

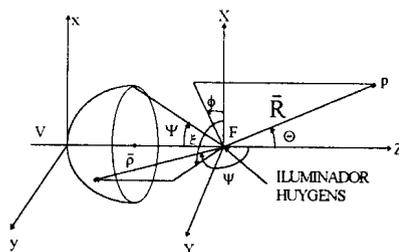
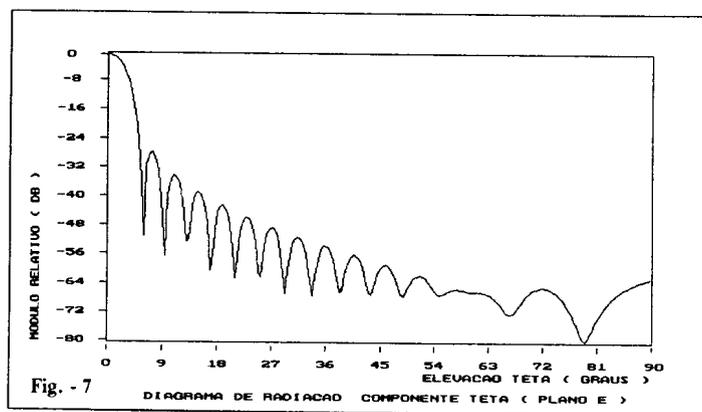


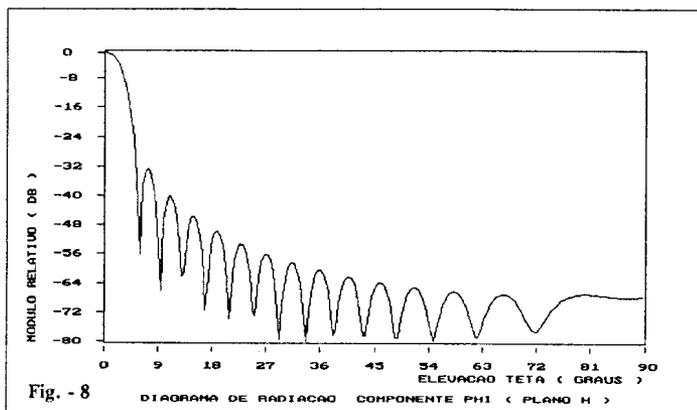
Fig. 6 - Sistema iluminador - refletor.

O vértice V do refletor está na origem do sistema de coordenadas cartesianas (x, y, z) associado ao refletor. As coordenadas dos vértices dos triângulos gerados pelo modelo de triangulação são transformadas para o sistema de coordenadas cartesianas (X, Y, Z), posicionando-se assim o alimentador no foco da superfície.

## RESULTADOS

Estudou-se as superfícies de revolução da parábola, esfera, hipérbole e disco circular. Os resultados do cálculo do espalhamento são mostrados no plano E e no plano H. No plano E é mostrado o componente  $\Theta$  do módulo relativo. No plano H também é mostrado o componente  $\Phi$  do módulo relativo. As figuras 7 e 8 mostram os diagramas obtidos da superfície parabólica considerando os seguintes parâmetros:  $D = 0,406$  m ( $15 \lambda$ );  $F/D = 0,433$ ;  $H = 0,586$  m;  $F = 11,075$  Ghz;  $A_b = 14,5$  dB;  $n = 2$ ;  $R_{pd} = 100,0$  m;  $\Delta\theta = 0,5$ ;  $\theta_{max} = 90^\circ$   $G_o = 6,0$ ;  $\lambda = 0,027$  m.





#### BIBLIOGRAFIA

- [1] LUDWIG, A.C. - Computation of Radiation Patterns Involving Numerical Double Integration - IEEE Trans. Antennas Propagat., Vol. AP-16. p. 767-769, November 1968.
- [2] SILVER, S. Microwave Antenna Theory and Design. New York, McGraw-Hill, 1ª Edição, 1949.
- [3] RABELO, N.R. - Cálculo Numérico do Diagrama de Radiação de Antenas Refletoras Modeladas por Facetas Triangulares Planas (Tese de Mestrado), INPE, 1986.
- [4] WANG, J.J.H. Numerical Analysis of Three-Dimensional Arbitrarily-Shaped Conducting Scatterers by Trilateral Surface Cell Modelling. Radio Sciences, Vol. 13, p. 947-952, Nov. 1978.
- [5] ZIENKIEWICZ, O.C. The Finite Element Method, London, McGraw-Hill, 1988.
- [6] CHAN, K.K. and RAAB, B. Surface-Current Analysis of Distorted Reflector Antennas. IEE Proc. Vol. 128, nº 4, p. 206-212, Aug. 1981.
- [7] JONES, E.M.T. Paraboloid Reflector and Hyperboloid Lens Antennas. I.R.E. Transactions-Antennas and Propagation, AP-2, p. 119-127, July 1954.
- [8] MIRANDA, C.A.I. Teoria Assintótica de Espalhamento de Refletores Axialmente Simétricos - Tese de Mestrado - INPE - 2404-TDL/89.
- [9] TANNER, R.L. and ANDREASEN, M.G. Numerical Solution of Electromagnetic Problems. IEEE Spectrum, p. 53-61, September 1967.
- [10] LESSON, H.A., RUSCH, V.T. and SCHJAER-JACOBSEN, H. On Numerical Evaluation of Two-Dimensional Phase Integrals - IEEE Transactions on Antennas and Propagation, p. 714-717, September, 1975.
- [11] ISRAEL, G.V. and MITTRA, R. - A New Series Representation for the Radiation Integral with Application to Reflector Antennas. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol.-AP-25, nº 5, p. 631-641, September, 1977.
- [12] AGRAWAL, P.K., ANDERSON, M.S. and GARD, M.F. Preliminary Design of Large Reflectors with Flat Facets. IEEE Transactions on Antennas and Propagation, vol. Ap-29, nº 4, p. 688-694, July, 1981.
- [13] ALBERTSEN, N.C. and PONTOPPÍDON, K. Pattern Prediction Methods for High Performance Single and Dual Reflector Antennas. Copenhagen, Tica APS-5-101.02, Nov. 1979.
- [14] A cópia completa deste trabalho pode ser solicitada aos autores.