

Método de Mínimos Cuadrados Móviles en la Simulación de la Topografía Corneal de un Análisis por EF de la Cirugía Refractiva.

Bioing. Fabio A. Guarnieri & Dr. Alberto Cardona.

GTM-INTEC

Güemes 3450. Santa Fe, 3000, Argentina.

email: aguarni@intec.unl.edu.ar

Abstract

Purpose: This work presents the Moving Least Square Method in order to interpolate the corneal surface after a Finite Element Analysis to obtain a topographic map in axial curvature of the anterior surface.

Materials & Methods: It was generated a point grid from a toric surface simulating an astigmatic corneal surface as the method test surface. It was tested several parameters as well as intrinsic of the method as from the problem. From data generated by the topographers Eyesys, PAR, and Orbscan, and using the program Oofelie for the FEA, we obtain the pre- and post refractive surgery simulation data set.

Results: The approximating error in axial curvature is dependent of the refinement, grid distortion, and surface astigmatism. This value is altered by the border where the approximation is not good.

Conclusions: The MLS method approximates adequately an astigmatic corneal surface from the data topographers based and non-based in Placido Disks.

1 Introducción

La Cirugía Refractiva incluye los procedimientos quirúrgicos como la Queratotomía Radial y la Fotorrefractivectomía con Láser Excimer. Estos procedimientos involucran remodelar la córnea para compensar las anomalías ópticas como el astigmatismo y la miopía.

Para evitar o disminuir el error que presentan los métodos estándar de cálculo de la Cirugía Refractiva, se desarrolló un modelo biomecánico en elementos finitos de la córnea y la cirugía [5]. Los datos de la geometría corneal son obtenidos a partir del Topógrafo corneal, inicialmente del tipo basado en discos de Placido como el EyeSys. Los resultados de la simulación eran presentados en un mapa topográfico de curvatura axial calculada a partir de la geometría deformada ajustando una circunferencia a 3 puntos alineados en un meridiano. Este método era suficientemente preciso comparado con el error intrínseco del topógrafo corneal basado en discos de Placido (<0.25 [D] dioptrías).

El topógrafo corneal basado en discos de Placido digitaliza la reflexión de anillos proyectados en ella y la imagen de la película lacrimonal de la cara anterior de la córnea. Calcula el radio de curvatura meridional en cada intersección entre los anillos (ej. 20) y meridianos (ej. 360), obteniendo aproximadamente 7200 puntos. El radio de curvatura de la zona central no es medido sino calculado. La precisión de estos equipos ha sido comparada usando superficies tóricas y esféricas [3].

Los topógrafos corneales de nuevas tecnologías, como el PAR y Orbscan, no están basados en discos de Placido. El sistema PAR [6] proyecta una grilla rectangular sobre la córnea a través de un filtro de cobalto azul. La película lacrimal es manchada con fluoresceína, causando que la grilla sea visible a una cámara de video. La imagen de video es digitalizada y así es calculada la superficie evaluando la distorsión de las líneas de la grilla. Se obtiene información tanto de la periferia corneal como del centro óptico. El sistema de Barrido de Hendidura (Orbscan) [7] se basa en la proyección secuencial de una hendidura sobre la córnea a distintos ángulos, obteniendo las reflexiones difusas de la córnea, iris y cristalino en 40 imágenes. Por triangulación son obtenidos cada punto superficial de las superficies anterior, posterior de la córnea, el iris y la superficie anterior del cristalino. Por substracción se logra la profundidad de la cámara anterior y la paquimetría completa de la córnea.

Este trabajo presenta el método de aproximación de Mínimos Cuadrados Móviles (MCM) para interpolar la superficie corneal luego de un análisis por elementos finitos y así poder obtener un mapa topográfico en curvatura axial de la superficie anterior de la córnea. La necesidad de métodos de interpolación que no necesiten grillas ordenadas como las rectangulares parte de las nuevas tecnologías de Topógrafos.

2 Superficie Tórica

Una superficie tórica es usada para simular una córnea astigmática. Ésta tiene dos curvaturas principales constantes en todo el eje.

Sea la ecuación paramétrica de una superficie tórica [1] :

$$\mathbf{x} = (R_2 + R_1 \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_1 + (R_2 + R_1 \sin \phi)(\sin \theta)\mathbf{e}_2 + (R_1 \cos \phi)\mathbf{e}_3$$

con $0 < \theta < 2\pi$, y $0 < \phi < 2\pi$.

Rotamos 90° en el eje x y trasladamos por el eje z hasta que el borde externo de la superficie coincida con el origen, obteniendo

$$\mathbf{x} = (R_1 \cos \phi)\mathbf{e}_1 + (R_2 + R_1 \sin \phi)(\cos \theta)\mathbf{e}_2 + [(R_2 + R_1 \sin \phi)(\sin \theta) - R_1 - R_2]\mathbf{e}_3$$

Si consideramos una sección elíptica del toroide con R_x y R_y , equivalente a los diámetros vertical y horizontal de la córnea, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= R_x \cos \alpha \\ y &= R_y \sin \alpha \\ z &= \left(R_2 + R_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{R_1^2}} \right) \sqrt{1 - y^2} \left(R_2 + R_1 \sqrt{1 - \frac{x^2}{R_1^2}} \right)^{-2} - R_2 - R_1 \end{aligned}$$

Las curvaturas principales son $\kappa_1 = 1/R_1$ y $\kappa_2 = 1/(R_2 + R_1)$ para $0 < \phi < \pi$.

Calculamos la primera y segunda derivada en la dirección radial z_r y z_{rr} , y así obtener la curvatura axial con la fórmula:

$$\kappa = \frac{z_{rr}}{(1 + z_r^2)^{3/2}} = \frac{1}{\rho} \quad (2.1)$$

3 Método de Mínimos Cuadrados Móviles

Este método es una variante de Método de Mínimos Cuadrados, el cual en vez de minimizar una suma de desviaciones cuadradas, asocia pesos en cada desviación, dependiendo éste de la distancia de los puntos de la grilla a los puntos a calcular.

Sea una superficie en el espacio con coordenadas (x_i, y_i, z_i) . Consideramos las proyecciones de los puntos de la superficie esparcidos en el plano $\{\mathbf{x}_i\} = \{(x_i, y_i)\}$, con $i = 1, 2, \dots, n$, donde n es el número de puntos en la superficie. Si la coordenada z_i es el valor de una función en cada punto \mathbf{x}_i , encontramos una función aproximante como

$$u(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m a_j(\mathbf{x})b_j(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$$

donde a_j son los coeficiente a determinar, b_j son polinomios, con $j = 1, 2, \dots, m$, y $m \leq n$, tal que u es ζ^1 y $u(\mathbf{x}_i) = z_i$. En nuestro caso elegimos $b_j(\mathbf{x})$ como polinomios de grado 2 (cuadrático), como una situación de compromiso entre precisión y tiempo computacional. Así $m = \frac{1}{2}(2+1)(2+2) = 6$ y $b(\mathbf{x}) = [1, x, y, x^2, xy, y^2]$.

Se desea, para un buen ajuste de la función aproximante, minimizar el funcional dado como la suma de desviaciones al cuadrado asociando pesos en cada desviación, dependientes de \mathbf{x} . Para cada \mathbf{x} tenemos

$$E_x(u) = \sum_{i=1}^n w_i(\mathbf{x})(u(\mathbf{x}_i) - z_i)^2$$

Para obtener los coeficientes $a_j(\mathbf{x})$ resolvemos el siguiente sistema de ecuaciones

$$\frac{\partial E_x}{\partial a_i} = 0$$

Si desarrollamos estas condiciones obtenemos

$$\frac{\partial E_x}{\partial a_i} = \sum_{i=1}^n 2w_i[\mathbf{b}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x}) - z_i]b_j(\mathbf{x}_i) = 0$$

$$\sum_{i=1}^n w_i \mathbf{b}^T(\mathbf{x}_i)\mathbf{a}(\mathbf{x})b_j(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^n w_i b_j(\mathbf{x}_i)z_i$$

En forma matricial, definimos una matriz $m \times n$ $\mathbf{B} = (b_j(\mathbf{x}_i))$ y la matriz diagonal $n \times n$ $\mathbf{W}(\mathbf{x}) = (w_i(\mathbf{x}))$, el vector $m \times 1$ $\mathbf{a} = (a_j)$ y el vector $n \times 1$ $\mathbf{f} = (z_i)$, tenemos

$$\mathbf{B}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{f} \quad (3.1)$$

Estas ecuaciones tiene solución única y pueden ser resueltos por métodos estandar siempre y cuando la matriz $\mathbf{B}\mathbf{W}(\mathbf{x})\mathbf{B}^T$ no sea singular.

La función peso disminuye monótonicamente con la distancia. Esto provoca que la superficie tienda a cada punto de la grilla.

Este método genera un sistema de ecuaciones en cada punto a calcular. Para reducir el costo computacional el grado de los polinomios debe ser bajo.

A. Calculando curvatura en superficies con MCM

Recordando que u está definido en cada \mathbf{x} por

$$u(\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T(\mathbf{x})\mathbf{a}(\mathbf{x})$$

Para encontrar la derivada parcial de u en la dirección de r , diferenciamos como un producto para obtener

$$u_r = \mathbf{b}_r^T \mathbf{a} + \mathbf{b}^T \mathbf{a}_r$$

Diferenciando una vez más en la misma dirección, obtenemos la segunda derivada

$$u_{rr} = \mathbf{b}_{rr}^T \mathbf{a} + 2\mathbf{b}_r^T \mathbf{a}_r + \mathbf{b}^T \mathbf{a}_{rr}$$

Debido a que $\mathbf{b}(\mathbf{x})$ son funciones simples sus derivadas no acarrearán problema. Las derivadas de $\mathbf{a}(\mathbf{x})$ son obtenidas diferenciando la forma matricial 3.1 en la dirección radial r a ambos lados logrando

$$\mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{B}^T \mathbf{a} + \mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T \mathbf{a}_r = \mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{f}$$

Reordenando obtenemos \mathbf{a}_r

$$\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T \mathbf{a}_r = \mathbf{B}\mathbf{W}_r(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \mathbf{a})$$

$$\mathbf{a}_r = (\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T)^{-1} \mathbf{B}\mathbf{W}_r(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \mathbf{a})$$

Diferenciando de nuevo obtenemos \mathbf{a}_{rr}

$$\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T \mathbf{a}_{rr} = \mathbf{B}\mathbf{W}_{rr}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \mathbf{a}) - \mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{B}^T \mathbf{a}_r - \mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{W} \mathbf{a}_r$$

$$\mathbf{a}_{rr} = (\mathbf{B}\mathbf{W}\mathbf{B}^T)^{-1} (\mathbf{B}\mathbf{W}_{rr}(\mathbf{f} - \mathbf{B}^T \mathbf{a}) - \mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{B}^T \mathbf{a}_r - \mathbf{B}\mathbf{W}_r \mathbf{W} \mathbf{a}_r)$$

Una vez que la primera y segunda derivadas de la función aproximante u en la dirección radial r son obtenidas, calculamos la curvatura axial κ y el radio de curvatura ρ como

$$\kappa = \frac{u_{rr}}{(1 + u_r^2)^{3/2}} = \frac{1}{\rho}$$

4 Resultados

A. Eligiendo la función de peso

Si d es la distancia Euclídea entre el punto interpolado \mathbf{x} y el punto dato \mathbf{x}_i , dado por

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i) = \sqrt{(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2}$$

entonces la función de peso dependerá de d

$$w_i(\mathbf{x}) = w(d(\mathbf{x}, \mathbf{x}_i))$$

Se desea una función de peso que satisfaga:

- $w \rightarrow \infty$ cuando $d \rightarrow 0$, y $w \rightarrow 0$ cuando $d \rightarrow \infty$.

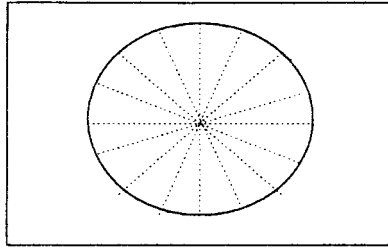


Figure 1: Grilla de Discos de Placido para el cálculo de la Curvatura Axial.

Función de peso	rms [%mm]	mean [%mm]	std [%mm]
$w_1(d) = e^{-\alpha d^2}$	2.4710	0.8889	0.4536
$w_2(d) = \frac{1}{d^2 - \varepsilon}$	30.8276	14.6667	11.7727
$w_2(\text{first 4 rings})$	1.0408	0.2222	0.1380
$w_3(d) = \frac{e^{-\alpha d^2}}{d^2 - \varepsilon}$	0.7120	-0.1319	0.1481

Table 1: Test de funciones de peso

- $w = 0$ para $|d| > r$ (interpolación local),
- Precisión numérica y visual al interpolar cuando $d = 0$.

Se sugiere una función

$$w(d) = \frac{e^{-\alpha d^2}}{d^2 + \varepsilon}$$

para $d \leq r$, donde

α : grado de atenuación

ε : para controlar el overflow

r : radio de soporte ($w = 0$ cuando $d > r$)

Testeamos la función de peso comparando el error entre un mapa de curvatura axial de un toro, calculado matemáticamente por 2.1, y un mapa de curvatura axial del mismo toro, pero calculado con el método de MCM en una grilla de datos de discos de Placido como la de la figura 1.

En la siguiente tabla mostramos la raíz media cuadrática (rms=root mean square), el promedio(mean) y la desviación estandar(std) del error o diferencia entre los dos mapas de curvatura para diferente funciones de peso elegidas.

En la siguiente tabla mostramos la función de peso elegida con diferente grados de atenuación.

α de $w_3(d) = \frac{e^{-\alpha d^2}}{d^2 - \varepsilon}$	rms [%mm]	mean [%mm]	std [%mm]
$\alpha = 2 * cdd$	0.6719	-0.1875	0.0823
$\alpha = 4 * cdd$	inest.	inest.	inest.
$\alpha = 6 * cdd$	inest.	inest.	inest.
$\alpha = 10 * cdd$	0.8660	0.4028	0.3831

Table 2: Grado de atenuación α of $w_3(d) = \frac{e^{-\alpha d^2}}{d^2 + \varepsilon}$.

número de puntos en la ventana	rms [%mm]	mean [%mm]	std [%mm]
8	201.1525	47.2880	195.7372
10	5.4622	0.3683	5.4592
16	5.4622	0.3683	5.4592
20	5.4622	0.3683	5.4592

Table 3: Número mínimo óptimo de puntos dentro de la ventana α of $w_3(d) = \frac{\epsilon - \alpha d^2}{d^2 + \epsilon}$

Astigmatismo/ cilindro[D]	Poder dióptrico de ejes principales[D]	radios de curvatura de ejes principales (mm)
0.00	43.25 x 43.25	7.80 x 7.80
1.00	43.25 x 44.25	7.80 x 7.62
3.00	43.25 x 46.25	7.80 x 7.29
5.00	43.25 x 48.25	7.80 x 6.99
7.00	43.25 x 50.25	7.80 x 6.71

Table 4: Error dióptrico con el astigmatismo

También mostramos el radio óptimo de soporte r ($w = 0$ cuando $d > r$). Elegimos un r tal que haya un mínimo número de puntos incluidos dentro de la ventana o nube limitada por el radio de soporte. En realidad elegimos una ventana cuadrada con r como la longitud del lado. Testeamos el número óptimo de número de puntos dentro de la ventana cuadrada calculando el error de la curvatura axial obteniendo los siguientes resultado en la tabla:

Finalmente elegimos 10 como número mínimo óptimo de puntos dentro de la ventana.

B. Test del grado de astigmatismo

Cambiando el radio interno y externo de la superficie tórica simulamos superficies corneales con diferentes grados de astigmatismo. En la tabla 4 mostramos el cilindro del astigmatismo (curvatura en dioptrías del eje más curvo menos el más plano), el poder dióptrico de los ejes principales y su valor en radios de curvatura.

En la figura 2 se grafica el astigmatismo en dioptrías vs. el rms, mean y std del error porcentual entre un mapa de curvatura axial de un toro, calculado matemáticamente de las ecuaciones tóricas con 2.1, y un mapa de curvatura axial del mismo toro, calculado con el método de MCM en una grilla de datos partiendo de los discos de Placido.

Notamos un pequeño aumento en el rms al incrementar el grado de astigmatismo, pero en todos los casos el valor fue menor al admisible dado por el error del instrumento de medición (4% [mm]).

Si comparamos el resultado anterior con el resultado de utilizar el cálculo de la curvatura axial ajustando una circunferencia dados 3 puntos alineados en un meridiano, obtenemos los siguientes resultados dados distintos grados de astigmatismo en la tabla 5:

Observamos que este método es mejor que el método de MCM pero está restringido a grillas regulares con puntos alineados, como lo están en los topógrafos basados en discos de Placido.

Astigmatismo/cilindro[D]	rms [%mm]	mean [%mm]	std [%mm]
0.00	< 0.01	< 0.01	< 0.01
1.00	< 0.01	< 0.01	< 0.01
3.00	< 0.01	< 0.01	< 0.01
5.00	0.0833	0.0069	0.0833
7.00	0.1443	0.0208	0.1433

Table 5: Error dióptrico con el astigmatismo

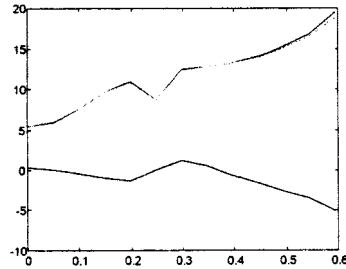


Figure 2: Error en curvatura axial con distorsión de grilla.

C. Distorsión de la grilla

Deseamos saber la performance del método de MCM cuando los puntos a calcular se localizan a una determinada distancia de los puntos dato.

Desde una grilla rectangular, creamos una grilla distorsionada de los puntos a calcular para determinar el error porcentual de la curvatura axial con respecto a una superficie tórica.

La figura 5 muestra el error mínimo cuando la distorsión de la grilla es cero, como sería de esperar.

Cuando la distorsión de la celda de la grilla es tal que coincide con el centro de la celda de la grilla de puntos datos el error cae como se ve en la figura. En la siguiente figura eliminamos el borde de la grilla para eliminar el efecto de mala precisión cuando calcula los puntos cerca del borde. Esto resulta en un efecto más pronunciado cuando coinciden los centros de la grilla de puntos dato y la grilla distorsionada

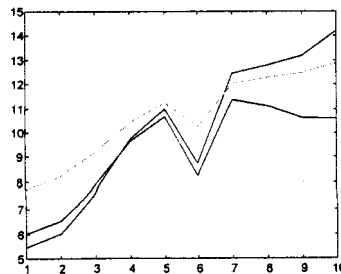


Figure 3: Error en curvatura axial con distorsión de grilla sin el borde.

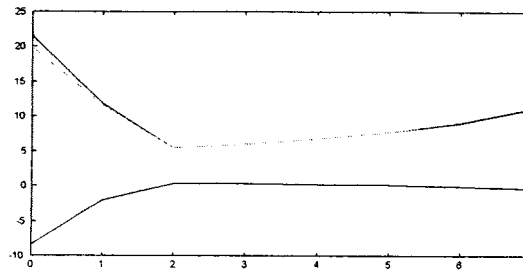


Figure 4: Error en curvatura axial vs número de hileras eliminadas del borde.

de puntos a calcular.

Si comparamos los valores del error para una grilla rectangular y para una grilla de discos de Placido con igual cantidad de puntos dato como en la figura. Notamos que el error mínimo de la grilla rectangular es mayor que el error máximo en la grilla de discos de Placido. Esto puede ser explicado por el hecho de que en la grilla de discos de Placido los puntos están más concentrados disminuyendo la distorsión en la grilla de puntos y los puntos dato están más cerca de los puntos a calcular.

D. Efecto del borde

Para una grilla rectangular testeamos el efecto del borde donde la precisión de la aproximación es mala. En la siguiente figura mostramos el error porcentual de la curvatura axial comparado con una superficie tórica eliminando hileras en la periferia de la grilla.

----- *mean*
 *rms*
 ----- *std*

Encontramos que eliminado 2 hileras del borde es suficiente para lograr buenos resultados.

E. Refinamiento de la grilla

Dada una grilla de puntos dato rectangular, la refinamos agregando 10 hileras cada vez para calcular el error de la curvatura axial comparándola con la superficie tórica. En la figura mostramos que el error disminuye con el refinamiento de la grilla. Esperamos que para una grilla real de puntos dato provenientes de un topógrafo sea muy buena debido a la gran cantidad de puntos (3000-7000).

F. Comparación con otros métodos de interpolación de superficies

Debido a la necesidad de que los puntos dato estén esparcidos sin orden regular, los métodos de interpolación con polinomios no fueron considerados.

Realizamos una comparación con el método de interpolación de superficies por splines que satisface la ecuación biarmónica [2], en el cual la superficie interpolante es una combinación lineal de las funciones de Green centradas en cada punto dato.

Comparamos el error de la coordenada z de ambos métodos en milímetros usando la distorsión de una grilla rectangular de puntos dato como parámetro.

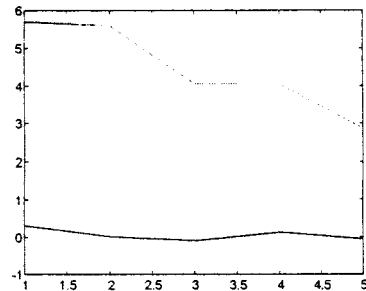


Figure 5: Refinamiento de la grilla.

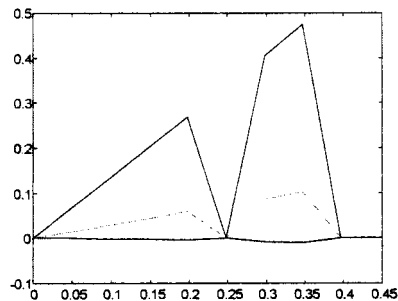


Figure 6: Curva de error de la coordenada z entre el MCM y el basado en splines con distorsión de grilla.

Encontramos mal condicionamiento de la matriz $BW(x)B^T$ en algunos valores de distorsión. En la figura 9 graficamos la curva de error sin tener en cuenta el mal condicionamiento en esos valores.

Notamos una similar aproximación del método de MCM sin tener en cuenta el mal condicionamiento.

5 Conclusiones

Se presentó el método de Mínimos Cuadrados Móviles para interpolar una superficie tórica simulando una superficie astigmática donde los puntos están esparcidos en el plano y evitar la triangulación o mallado de la superficie.

Se presentaron distintos tipos de grilla de puntos como por anillos concéntricos (Eyesys) y grilla rectangular (PAR). Se encontró que a igualdad de número de puntos en la grilla el de anillos concéntricos era más preciso debido a la concentración de puntos.

Se realizó un estudio de optimización de los parámetros propios del método como el tipo de función de peso, el grado de atenuación, el número de puntos en la nube, y el refinamiento de la grilla.

También se estudió el efecto del borde lo que provocó que para la precisión deseada era conveniente aumentar el número de puntos en el borde.

Se estudió la precisión trasladando la grilla de puntos a calcular sobre la grilla de datos y así determinar cuánto varía el grado de aproximación alejándonos de cada centro de la nube.

Comparando el método de MCM a otro método de interpolación de superficies con puntos esparcidos en el plano, como el de interpolación por spline biarmónico, notamos una mejor aproximación del método de MCM al aproximar la coordenada z de la superficie tórica.

Utilizando este método nos permite independizarnos del tipo de topógrafo para adquirir la geometría corneal. Además podemos realizar un mapa topográfico del resultado de la simulación empleando curvaturas medias, tangentes, y locales, y no solamente axiales.

El método de mínimos cuadrados móviles puede ser usado para resolver las ecuaciones diferenciales que aparecen en el modelo biomecánico de la córnea y la Cirugía Refractiva evitando el mallado característico del método de elementos finitos. Este método es el llamado Punto Finito [8].

References

1. Differential Geometry, Theory and Problems, Martin M. Lipschutz, McGraw-Hill. Book Company.
2. David T. Sandwell, Biharmonic spline interpolation of GEOS-3 and SEASAT altimeter data, Geophysical Research Letters, 2, 139-142, 1987.
3. Greivenkamp J.E., Mellinger M.D., Snyder R.W., Schwiegerling J.T., Lowman A.E., Miller J.M. Comparison of Three Videokeratoscopes in Measurement of Toric Test Surfaces. J. Refract. Surg. Vol 12, 2, 229-239, 1996.
4. Curve and Surface Fitting. An Introduction, Peter Lancaster and Kęstutis Šalkauskas, Academic Press, 1986.
5. Proyecto Final de la Carrera de Bioingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos, Fabio A. Guarnieri. *Modelo Biomecánico del Ojo para Diseño Asistido por Computadora de la Cirugía Refractiva* (1993).
6. Michael W. Belin, Intraoperative raster photogrammetry- The PAR Corneal Topography System. J. Cataract Refractive Surg. Vol 19, Supplement, 1993.
7. Theory of Orbteck, web page in <http://www.orbtek.com/theory.html>
8. A Finite Point Method in Computational Mechanics. Applications to Convective Transport and Fluid Flow. E. Oñate, S. Idelsohn, O.C. Zienkiewicz, and R.L. Taylor. Int. J. Numer. Methods Eng., 39, 3839-3866 (1996).