

MODELAJE DE SISTEMAS MECÁNICOS DE MÚLTIPLES CUERPOS UTILIZANDO EL MÉTODO DE BOND GRAPHS

Antonio Perillo-Marcone, Carmen M. Müller-Karger

Departamento de Mecánica, Universidad Simón Bolívar, Apdo. 89000,
Caracas 1080-A, Venezuela

Jenny Montbrun-Di Filippo, Marisol Delgado

Departamento de Procesos y Sistemas, Universidad Simón Bolívar, Apdo. 89000,
Caracas 1080-A, Venezuela

RESUMEN

En este trabajo se presenta una metodología para obtener las ecuaciones dinámicas de brazos robot o cadenas cinemáticas genéricas de n grados de libertad (GDL) utilizando la técnica de Multibond Graphs. El procedimiento se basa en emplear una estructura de Bond Graph que modela cada eslabón de manera general y se repite tantas veces como el número de eslabones, aprovechando así la monotonía del sistema. Estas estructuras se unen entre sí de forma también general, y mediante la definición de un par de variables por cada unión se selecciona el tipo de vínculo que existe (articulación plana o prismática). Para comprobar la efectividad del método, se analizó un brazo robot de dos (2) GDL y se observó que las ecuaciones generadas fueron exactamente las mismas que las obtenidas a partir de otras formulaciones, tales como, el método de Newton, las ecuaciones de Lagrange, el método de Euler-Lagrange y las ecuaciones de Kane. Estas ecuaciones fueron integradas numéricamente seleccionando los valores de los parámetros del robot arbitrariamente y la respuesta graficada fue respuesta la posición, velocidad, aceleración y trayectoria de los eslabones.

ABSTRACT

This paper presents a methodology to obtain the dynamic equations of robot arms or generic n -degree-of-freedom (DOF) kinematic chains by using the Multibond Graph technique. The addressed procedure is based on utilizing a Bond Graph structure which models each link in a generic form and is repeated as many times as the number of links, exploiting that way the system's monotony. These structures are connected together also in a generic form, and through the definition of a pair of variables, the type of joint is selected (revolute or prismatic joint). In order to verify the method's effectiveness, a two (2) DOF robot arm was analyzed and the resulting equations completely matched the ones obtained from other formulations, such as, Newton method, Lagrange equations, Euler-Lagrange method and Kane's equations. These equations were numerically integrated by arbitrarily choosing the robot's parameter values and the results graphically shown were the position, velocity, acceleration and link's trajectories.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se realizó el modelaje de un brazo robot utilizando Multibond Graphs y posteriormente se llevan a cabo diversas simulaciones del sistema. La ventaja de utilizar dicha técnica para el modelaje de sistemas multidisciplinarios como lo es un brazo robot, radica en que se puede emplear para hallar el modelo mecánico, eléctrico y electrónico y finalmente de los sistemas de control, con la capacidad de entrelazar los Bond Graph y obtener un modelo completo del sistema. En este trabajo se trata únicamente el modelaje de la parte mecánica con miras a realizar el desarrollo completo en un futuro.

En el principio del desarrollo del método de Bond-Graph, su aplicación para los sistemas mecánicos fue limitada debido a la dificultad de resolver problemas tridimensionales, ya que para el momento esta técnica manejaba variables escalares exclusivamente. Luego apareció el desarrollo de los denominados *Multibond Graphs*, creados por Breedveld [1], los cuales proveen una notación gráfica mucho más reducida. Posteriormente apareció otra metodología denominada *Vector Bond Graph* que fue originada por Bonderson [2] y desarrollada por Breedveld [3,4] en una técnica de modelaje de multibond. Trabajos recientes (Allen, Ingram & Masada [5]; Farenthold & Wu [6]) introdujeron alternativas al Multibond Graph, las cuales asocian los *bonds* escalares a una base física creando algunas simplificaciones para ayudar a recobrar la utilidad del Bond Graph para problemas

multidimensionales. Posteriormente, Farenthold & Wargo [7] presentan un trabajo en el que manejan el concepto de "Vector Bonds" exclusivamente como tensores de primer orden. La metodología que allí se propone ofrece una clara ventaja sobre las técnicas de modelaje escalar debido a que simplifican sistemáticamente la topología del Bond Graph y coordinan las representaciones libres de todas las relaciones de balance de potencia, de esfuerzo y de flujo.

En los sistemas mecánicos que implican movimiento en dos o tres dimensiones, siempre hay no-linealidades geométricas envueltas, las cuales, son difíciles de interpretar; y en muchos casos las ecuaciones no muestran explícitamente la estructura básica del modelo dinámico del sistema. El método aquí expuesto puede ser utilizado para manejar el modelaje de no-linealidades en las articulaciones tales como juegos y flexibilidades, además, resulta particularmente atractivo durante la fase de diseño y análisis, comparado con otros métodos alternativos, debido a que cualquier modificación del modelo del sistema puede ser fácilmente implementada sin tener la necesidad de volver a derivar el sistema de ecuaciones.

FUNDAMENTOS DE MULTIBOND GRAPHS

Para analizar un sistema es posible concentrar y separar ciertas propiedades de un objeto y describirlo como un conjunto de propiedades interrelacionadas o elementos interconectados. En este contexto la palabra sistema permite reducir el nivel de abstracción, porque es posible representar el intercambio de energía entre dos elementos a través de los enlaces de un grafo y las relaciones constitutivas de los elementos mediante los extremos del grafo. Los enlaces, que permiten el intercambio de energía entre los elementos, se denominan *multibond graphs*, y a los extremos se les llama *elementos multipuerto*.

El enfoque que se emplea propone que cada término de potencia P_i de un sistema es el producto de dos variables, un *esfuerzo* e_i y un *flujo* f_i , y la potencia total de un multibond es la suma del producto de estos términos:

$$P = \sum P_i = \sum e_i f_i = \mathbf{e}^T \mathbf{f}. \quad (1)$$

En las variables esfuerzo y flujo de un Bond Graph, está contenida la información necesaria para poder describir la dinámica de un sistema de índole mecánico. Sin embargo, cuando se habla de Multibond Graphs, la diferencia que se presenta es que las variables esfuerzo y flujo asociadas a cada multibond, son vectores de tres componentes.

Un elemento imprescindible para la construcción del multibond Graph de un robot es el *transformador*, que en este caso es una matriz de dimensión 3×3 . Este elemento transforma las variables esfuerzo y flujo como se describe a continuación:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{TF}^T \mathbf{e}_2 \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{TF} \mathbf{f}_1 \quad (2)$$

SIMULACIÓN DE UN BRAZO ROBOT DE 2 GDL

En esta sección se desarrolla el modelo dinámico de un brazo robot de dos grados de libertad (2 GDL) genérico utilizando la metodología de Multibond Graphs, desarrollada por Bos & Tiernago [8]. Se considera el modelo como genérico porque se abarcan los dos tipos más comunes de articulaciones entre los eslabones que componen el sistema. Se comparan las ecuaciones con las obtenidas por el método de Newton.

DESCRIPCIÓN DEL SISTEMA.

Se analizaron dos brazos robot como los mostrados en las figuras 1 y 2, los cuales están restringidos a describir movimientos contenidos en el plano vertical ($\mathbf{x}_0 \mathbf{y}_0$) únicamente, donde la línea de acción de la gravedad es paralela a \mathbf{y}_0 . La única diferencia que existe entre ambos, viene dada por la vinculación del segundo eslabón, y de ahora en adelante, serán referidos como Caso 1 (articulación plana) y Caso 2 (articulación prismática).

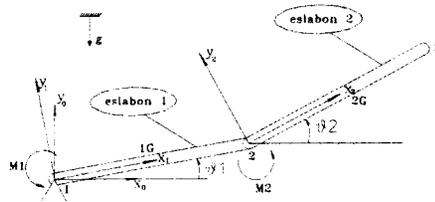


Figura 1. Brazo de robot de 2 GDL. Caso 1.

Los brazos estudiados están compuestos por dos eslabones rígidos que fueron modelados como barras homogéneas. La barra vinculada a tierra recibe el nombre de eslabón 1 y la otra eslabón 2.

En el Caso 1, el eslabón 1 está vinculado a tierra por medio de una articulación plana ideal (punto 1), en la cual se imparte un torque sobre dicho eslabón suministrado por el motor M_1 fijo a tierra. Los eslabones 1 y 2 están vinculados entre sí a través de otra articulación plana ideal (punto 2), donde se encuentra el motor M_2 solidario al eslabón 1. Éste último actúa directamente sobre el eslabón 2 y es el responsable del movimiento relativo entre ambos elementos.

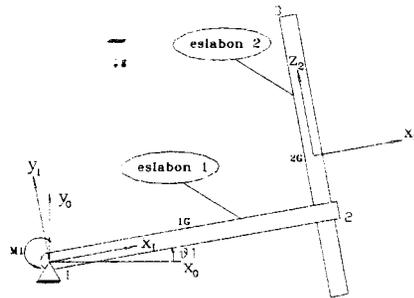


Figura 2. Brazo de robot de 2 GDL. Caso 2.

En el Caso 2, la vinculación a tierra del eslabón 1 es la misma que la del brazo del Caso 1, siendo la diferencia entre este robot con respecto al anterior, el vínculo entre los dos eslabones que lo componen. Este vínculo es una articulación prismática ideal que permite solamente que el eslabón 2 describa un movimiento relativo de traslación con respecto al eslabón 1. Por lo tanto, el motor allí ubicado (punto 2) es traslacional, es decir, aplica una fuerza sobre el eslabón 2 en la dirección del eje z_2 .

MODELAJE POR BOND GRAPHS

En la figura 3 se muestra el Multibond Graph que describe la dinámica del brazo robot de dos grados de libertad para los casos 1 y 2.

En el Bond Graph se observa que la sumatoria de los esfuerzos que llegan a la unión 1 asociada a la inercia I_1 , representa físicamente la suma de los momentos externos e inerciales que actúan sobre el eslabón 1, con respecto al punto 1, siendo los momentos externos los siguientes:

- e_1 = la fuente de esfuerzo Se_1
- e_6 = el peso del eslabón 1
- e_{13} = las fuerzas del vínculo entre los dos eslabones
- e_8 = el momento de reacción del motor 2.

y los momentos inerciales son:

- e_7 = término de Coriolis ($\Omega \times I \bullet \Omega$) más el producto de la inercia por la aceleración angular absoluta del cuerpo ($I \bullet \alpha$).
- e_4 = el producto entre la masa del elemento y la aceleración del centro de masas.

El motor que produce el movimiento relativo entre los eslabones 1 y 2 puede ser rotacional o traslacional, por lo que se colocan ambas fuentes (Se_{2r} y Se_{2t}), y para definir cuál de ellos es el que va a ser utilizado, se emplean las variables auxiliares r_i y t_i que funcionan como "switches" dependiendo del tipo de articulación

El análisis del eslabón 2 es análogo al anterior, ya que la estructura de Bond Graph utilizada para el eslabón 1 es repetitiva para cada componente del brazo robot.

Los enlaces que aparecen dibujados en líneas punteadas representan una señal puramente cinemática, es decir, no son elementos que transportan energía, no afectan la dinámica del sistema, y por el contrario contienen simplemente la información necesaria para el cálculo de la velocidad (movimiento y trayectoria) del extremo final del brazo, que por lo general es de gran interés para este tipo de estudio, por lo tanto, estos enlaces no afectan la dinámica del sistema.

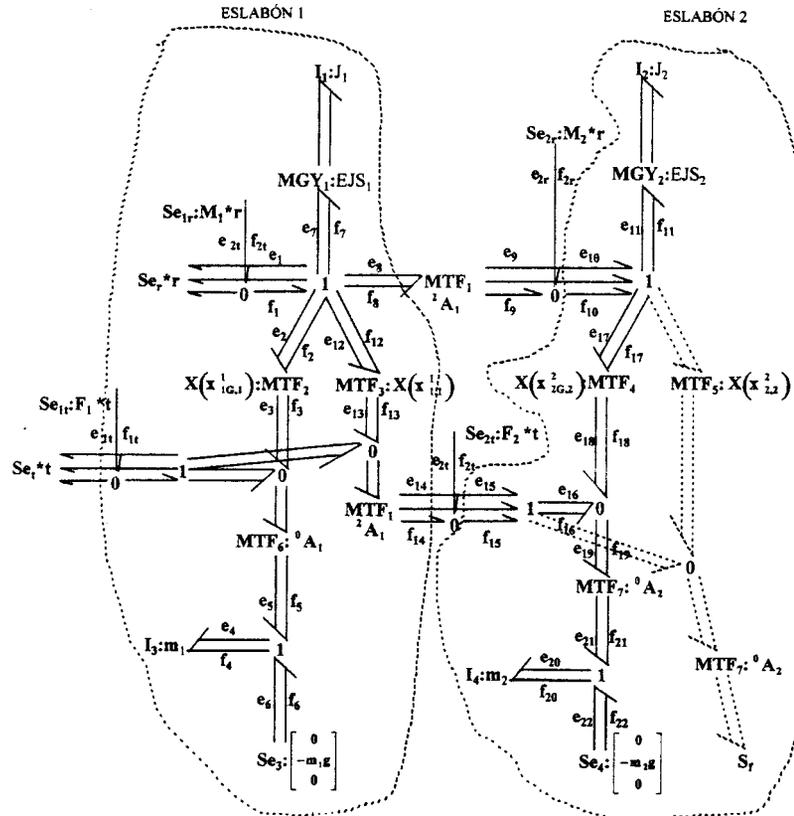


Figura 3. Bond Graph Dinámico de un Robot de 2 GDL.

Cabe destacar que en el caso de que a este robot se le quiera agregar un tercer cuerpo o una carga en el extremo del mismo, las líneas punteadas pasarían a ser líneas continuas y la forma de modelar la conexión entre el segundo y el tercer eslabón sería completamente análoga a la conexión entre el primero y el segundo.

Basándose en este esquema, la construcción del modelo de un robot de un mayor número de eslabones, significa simplemente repetir una estructura básica de cada cuerpo y unir las entre sí adecuadamente, lo que representa un proceso sistemático y sencillo.

Aún cuando no se ha mencionado, la información cinemática de cada parte del robot, es también posible obtenerla a partir del Bond Graph pues la determinación de la velocidad de cualquier punto en un instante de tiempo es análogo al cálculo de las fuerzas, ya que a cada esfuerzo, está asociado un flujo. Por ejemplo, el flujo

f_1 , representa la velocidad angular absoluta del eslabón 1 ($f_1 = f_2 = f_7 = f_8 = f_{12}$), el flujo f_3 es la velocidad del centro de masas del eslabón 1, y f_{13} es la velocidad del extremo del mismo cuerpo, y por analogía se puede saber lo que representan físicamente el resto de las variables.

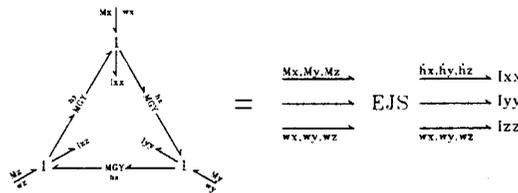


Figura 4. Estructura de Euler (EJS).

Las fuerzas giroscópicas que actúan entre estas velocidades vienen representadas por el girador modulado MGY , y se calculan por medio de la ecuación de Euler:

$$\bar{M} = \frac{d\bar{H}}{dt} = \frac{\delta\bar{H}}{\delta t} + \bar{\omega} \times \bar{H} \quad (3)$$

El Bond Graph que describe estas ecuaciones es una estructura conocida denominada Unión de Euler (EJS) y está representada en la Figura 4

En cada unión 1 del Multibond Graph se sigue el principio de D'Alembert, que dice que la sumatoria de fuerzas externas menos la suma de fuerzas inerciales es igual a cero:

$$\sum F^{ext} - \sum F^{inercial} = 0 \quad (4)$$

OBTENCIÓN DE ECUACIONES A PARTIR DE LOS BOND GRAPHS

Una vez elaborado el modelo por Bond Graph se generan las ecuaciones dinámicas del sistema para ambos casos.

CASO 1

El sistema de ecuaciones diferenciales que define la dinámica de este sistema se obtiene realizando la sumatoria de los esfuerzos en las dos uniones "1" ubicadas en la parte superior del Bond Graph del sistema, lo cual representa la sumatoria de momentos sobre los eslabones 1 y 2, obteniéndose así las ecuaciones (5) y (6) donde las variables en estudio son el movimiento (desplazamiento, velocidad y aceleración) angular absoluto de los dos eslabones.

$$-M_1 + \frac{1}{3}L_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}L_1 m_1 \cos(\theta_1)g + M_2 - \frac{1}{2}L_1 L_2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) + L_1 m_2 \cos(\theta_1)g + L_1^2 m_2 \ddot{\theta}_1 + \frac{1}{2}L_1 L_2 m_2 \ddot{\theta}_2 \cos(\theta_2 - \theta_1) = 0 \quad (5)$$

$$M_2 - \frac{1}{3}L_2^2 m_2 \ddot{\theta}_2 + \frac{1}{2}L_2^2 m_2 \dot{\theta}_2^2 \sin(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2}L_2 m_2 \dot{\theta}_1 \cos(\theta_2 - \theta_1) - \frac{1}{2}L_2 m_2 \cos(\theta_2)g = 0 \quad (6)$$

- donde: $m_1, m_2 \dots$ Masa de los eslabones 1 y 2, respectivamente.
- $L_1, L_2 \dots$ Longitud de los eslabones 1 y 2, respectivamente.
- $M_1, M_2 \dots$ Momentos suministrados por los motores en los puntos 1 y 2, respectivamente.
- $\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1 \dots$ Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares absolutos del eslabón 1.
- $\theta_2, \dot{\theta}_2, \ddot{\theta}_2 \dots$ Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares absolutos del eslabón 2.

CASO 2

El sistema de ecuaciones diferenciales que define la dinámica de este sistema se obtienen realizando la sumatoria de los esfuerzos en la unión tipo 1 ubicada en la parte superior izquierda del Bond Graph del sistema, que es equivalente a hacer la sumatoria de momentos sobre el eslabón 1; y la sumatoria de esfuerzos en la unión "1" más cercana a la fuente Se_{2b} , lo que representa la sumatoria de fuerzas sobre el eslabón 2. Se obtienen las ecuaciones (7) y (8), cuyas variables en estudio son el movimiento (desplazamiento, velocidad y aceleración) angular absoluto del eslabón 1 y el desplazamiento del eslabón 2 relativo al eslabón 1.

$$M_1 - \frac{1}{3}L_1^2 m_1 \ddot{\theta}_1 - \frac{1}{2}L_1 m_1 \cos(\theta_1)g - \frac{1}{12}L_2^2 m_2 \ddot{\theta}_1 - 2Z_{2G} m_2 V_2 \dot{\theta}_1 - Z_{2G}^2 m_2 \ddot{\theta}_1, \dots \quad (7)$$

$$-Z_{2G} m_2 \dot{\theta}_1^2 L_1 + Z_{2G} m_2 \sin(\theta_1)g - L_1 Fe = 0$$

$$Fe - \cos(\theta_1)m_2g - (L_1\ddot{\theta}_1 + A_2 - Z_{2G}\dot{\theta}_1)m_2 = 0 \quad (8)$$

donde: $Fe \dots$ Fuerza externa impartida por el motor ubicado en el punto 2.

$\theta_1, \dot{\theta}_1, \ddot{\theta}_1, \dots$ Desplazamiento, velocidad y aceleración angulares absolutos del eslabón 1.

$Z_{2G}, V_2, A_2 \dots$ Desplazamiento, velocidad y aceleración del centro de masas del eslabón 2, relativa al eslabón 1.

Cabe destacar que en ambos casos, las ecuaciones obtenidas fueron comparadas con las generadas a partir de métodos tradicionales (Newton, ecuaciones de Lagrange, Kane [9]), y ambas coinciden en su totalidad.

SIMULACIÓN

Para resolver este sistema de ecuaciones, primero se desacoplan las ecuaciones y se utiliza un método numérico para integrarlas. En esta oportunidad se utilizó el método de Runge Kutta de 4º Orden, obteniéndose los resultados presentados en las figuras 5 a la 8.

Dado que las ecuaciones generadas por Multibond Graphs en los casos 1 y 2 son idénticas a las obtenidas utilizando el método de Newton, se presenta la simulación de las ecuaciones sólo para el caso 1.

Al realizar las simulaciones de las ecuaciones mencionadas, se obtuvieron las gráficas de los desplazamientos, velocidades y aceleraciones angulares absolutas de ambos eslabones con respecto al tiempo

(figuras 5, 6 y 7), así como la trayectoria de los puntos dos y tres del brazo (figura 8). Para la simulación de las ecuaciones se utilizaron los parámetros que se presentan en la tabla 1, donde el parámetro "t" utilizado en el motor M_2 es el tiempo, y L_i es la longitud desde la articulación $i-1$ hasta el centro de masas del eslabón i .

TABLA I							
#	α	a	θ	d	m_i	L_i [m]	M_i [Nm]
1	0	0	0	0	1	5	0
2	0	L_1	0	0	2	5	$10 \sin(\pi t)$

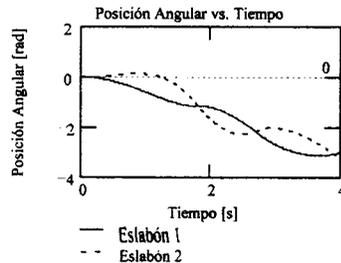


Figura 5. Posición Angular vs. Tiempo

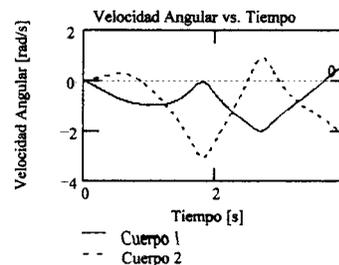


Figura 6. Velocidad Angular vs. Tiempo.

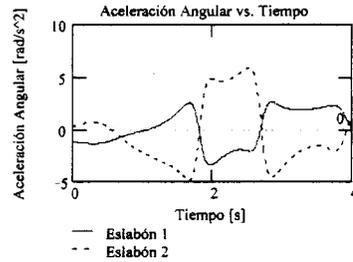


Figura 7. Aceleración Angular vs. Tiempo.

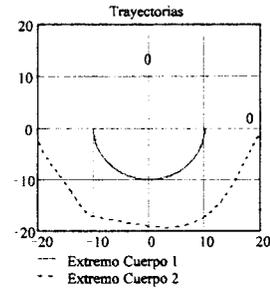


Figura 8. Trayectorias de los Extremos de Cada Eslabón (Puntos 2 y 3).

ANÁLISIS DE RESULTADOS

En las gráficas 5, 6 y 7 se puede apreciar que los elementos del brazo experimentan velocidades y aceleraciones fluctuantes, lo cual era de esperarse, debido a que el tipo de motor seleccionado proporciona un par que varía sinusoidalmente con el tiempo. Además, se observa que efectivamente la velocidad y la aceleración se comporta como la primera y segunda derivada del desplazamiento.

Por otra parte, si en la figura 8 se analizan las trayectorias de los puntos 2 y 3 del robot, se tiene un comportamiento consistente con la configuración física del brazo, observándose que el punto 2 se mueve estrictamente sobre una circunferencia y el punto 3 describe una trayectoria tal que la distancia al punto 1 es siempre inferior o igual a la máxima posible ($L_1 + L_2$).

CONCLUSIONES

Las ecuaciones de movimiento para un brazo robot genérico o cualquier secuencia de eslabones unidos entre sí, por medio de cualquier combinación de articulaciones prismáticas o de revolución, ha sido desarrollado utilizando la técnica de Bond Graph con la notación de Denavit-Hartenberg. [10]

Se utilizó el concepto de Multibond Graph para la simplificación del modelo en tres dimensiones. Se generó un Bond-Graph genérico que describe cada eslabón de un brazo robot independientemente si este es transnacional o rotacional, haciendo uso de variables auxiliares r_i y t_i que hacen la función de "switches" de manera que se activan o desactivan (valor uno o cero, respectivamente) dependiendo del tipo de articulación.

La técnica de Bond Graph permite la utilización de un software que se encuentra en el mercado que obtienen las ecuaciones y simulan el sistema a partir de los grafos. En este caso se obtuvieron las ecuaciones analíticamente para compararlas con las ecuaciones obtenidas por otros métodos. Se encontró que las ecuaciones generadas a partir del Bond Graph son idénticas a las obtenidas por las ecuaciones de Kane y por los métodos más tradicionales como Newton-Euler y Lagrange.

Se puede concluir que el uso de Bond Graph para este tipo de sistemas es muy adecuado pues se aprovecha la monotonía del sistema y puede crearse fácilmente el modelo de un brazo robot de un mayor número de grados de libertad, tan solo repitiendo la estructura diseñada en este trabajo, sin tener que hallar las ecuaciones del sistema.

El brazo robot representa un sistema mixto en cuanto a los subsistemas mecánicos, eléctricos, y electrónicos que involucra. El modelo obtenido puede ser fácilmente acoplado con los modelos de las otras disciplinas aprovechando la universalidad de la técnica de Bond Graph.

REFERENCIAS

- [1] **Breedveld, P.C.**, *Proposition for an Unambiguous Vector Bond Graph Notation*, ASME Journal of Dynamic System, Measurement, and Control, Vol. 104, 1982, pp. 267-270.
- [2] **Bonderson, L.S.**, *Some Applications of Bond Graphs to One-Dimensional Multipower Distributed System*, Ph.D. dissertation, Massachusetts, Institute of Technology, Cambridge, Mass, 1972.
- [3] **Breedveld, P.C.**, *Physical System Theory in Terms of Bond Graphs*, Ph.D. Dissertation, University of Twente, Enschede, the Netherlands, 1984.
- [4] **Breedveld, P.C.**, *Multibond Graph Elements in Physical Systems Theory*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, 1985, N° 1/2, pp. 1-36.
- [5] **Allen, R.R., Ingram, M.E., Masada G.Y.**, *Bond Graph Representation of Thermomechanical Processes in Thermoviscoelastic Continua, Network Thermodynamic, Heat and Mass Transfer in Biotechnology*, ASME, Vol. 5, 1987, pp.43-49.
- [6] **Faheruthold, E.P., and Wu, A.**, *Bond Graph Modeling of Continuous Solids in Finite Strain Elastic-Plastic Deformation*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control Vol. 110, 1986, pp.284-287.
- [7] **Faheruthold, E.P., and Wargo, J. D.**, *Vector Bond Graph Analysis of Mechanical Systems*, ASME Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control Vol. 113, 1991, pp. 344-353.
- [8] **Bos, A. M., and Tiernago, J. L.**, *Formula Manipulation in the Bond Graph Modelling and Simulation of Large Mechanical Systems*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 319, 1985, N° 1/2, pp. 51-65.
- [9] **Müller-Karger C.M, Touwsend M.**, *Dynamical Equations of Generalized Chains and Robot Arms: Automated Modeling Via Kane's Equations*, Dynamics Systems and Control Division's Proceedings. International Mechanical Engineering Congress, Atlanta, Georgia, 1996.
- [10] **Denavit, J., and Hartenberg, R. S.**, *A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanisms Based on Matrices*, J. App. Mech., Vol.77, 1955, pp.215-221.
- [11] **Karnopp, D.**, *Formula Manipulation in the Bond Graph Modelling and Simulation of Large Mechanical Systems*, Journal of the Franklin Institute, Vol. 306, 1978, N° 2, pp. 165-181.