

# Métodos sin Malla para Resolver Sistemas de Ecuaciones Diferenciales en Derivadas Parciales

Gloria Simonetti

Depto. de Matemáticas, Fac. de Cs.Fís.Matem. y Naturales  
Univ. Nac. de San Luis, Chacabuco y Pedernera, 5700 San Luis

Alberto Cardona

Grupo de Tecnología Mecánica, INTEC  
Univ. Nac. del Litoral, Güemes 3450, 3000, Santa Fe

## Resumen

Se implementó un método de Galerkin libre de elementos, con un procedimiento original para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, que guarda una relación óptima entre los distintos parámetros del método. Se realizaron ejemplos con refinamiento localizado de la red de puntos en base a un indicador *a posteriori*, obteniéndose resultados apropiados de convergencia.

## Abstract

An element free Galerkin method has been implemented, with an original procedure to place points and to make the required numerical integrals, such that an optimal relation between the different method parameters is verified. Several examples with localized refinement of the points grid -based on an *a posteriori* indicator- are presented, showing appropriate convergence results.

## 1 Introducción

Nayroles [1][2][3] propone un método de aproximación para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en el que no se requiere la noción de regiones o elementos con fronteras interelementales rígidas, al cual llama *método de elementos difusos* (DEM). Para ello, reemplaza la interpolación usada en elementos finitos por aproximaciones de *mínimos cuadrados móviles* (MLS) [4]. Cada punto en el que se necesita evaluar la función o sus derivadas, es considerado como el centro de una región o *elemento difuso*. Dicho *elemento* posee tantos grados de libertad como nodos quedan dentro de esta región, llamada también *dominio de influencia*.

Nayroles simplifica el cálculo de las derivadas considerando constantes los coeficientes de las aproximaciones de mínimos cuadrados. Sin embargo, se ha demostrado que la formulación lograda no satisface el *patch test* [5]. Belytchko [6] presenta una implementación alternativa -método de *Galerkin libre de elementos* (EFG)- que incluye todos los aportes al cálculo de las derivadas e introduce el uso de multiplicadores de Lagrange para forzar las condiciones esenciales. Propone además el cálculo de las integrales por medio de cuadraturas de alto orden, logrando una mejor precisión y satisfacer el *patch test*.

Gavete et al [7] proponen un indicador *a posteriori* del error y agregan nodos buscando una distribución uniforme del error. Taylor et al [8] presentan una reseña del método de mínimos cuadrados móviles (MLS) enfatizando en la posibilidad de definir las funciones de peso de dos maneras distintas: centradas sobre los nodos o sobre el punto de evaluación. Sin embargo hacen notar que en el segundo caso se presentan ciertas dificultades para especificar aquellas funciones.

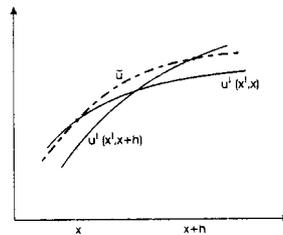


Figura 1: Evaluación de la aproximación

En este trabajo, usamos un esquema similar al presentado por Belytchko definiendo las funciones de peso centradas en los puntos de evaluación. Proponemos un procedimiento para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, guardando una relación óptima entre los distintos parámetros que influyen en el método. Realizamos un análisis del error para una serie de test numéricos en los que se presentan fuertes gradientes localizados, logrando resultados apropiados de convergencia. Finalmente, incorporamos un indicador del error del tipo del mencionado por Gavete para detectar las zonas en las que es necesario aumentar la cantidad de nodos.

## 2 Formulación del método

Sea  $\tilde{u}$  la aproximación a una cierta función  $u$  dentro de un dominio  $\Omega$ ,

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = \sum_i \varphi_i(\mathbf{x}) u_i \quad (1)$$

Consideremos un conjunto de nodos  $\{\mathbf{x}_i\}$ , y un conjunto de puntos de integración  $\{\mathbf{q}_j\}$ , estos últimos distribuidos en una estructura sencilla de celdas o regiones de integración en el dominio  $\Omega$ . Genéricamente, llamaremos *punto de evaluación* a un punto  $\mathbf{x}$  del dominio en el que se requiera evaluar la función de forma. Este puede pertenecer, por lo tanto, a cualquiera de los conjuntos mencionados anteriormente. Llamaremos  $\Omega_x$  al *dominio de influencia de  $\mathbf{x}$* , en tanto  $\mathbf{x}$  será considerado el *centro* de  $\Omega_x$ .

Sea  $u^\ell$  la aproximación local de mínimos cuadrados móviles de la función  $u$  en  $\Omega_x$ , definida en la forma siguiente

$$u^\ell(\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x}) = \sum_{j=1}^m p_j(\mathbf{x}^\ell) a_j(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}^\ell) \mathbf{a}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x}^\ell \in \Omega_x$$

donde  $\mathbf{p}^T(\mathbf{x})$  es una base completa de polinomios,  $m$  es la dimensión de la base usada ( $m = 3$  si la aproximación es lineal, en tanto  $m = 6$  en el caso cuadrático) y  $p_j(\mathbf{x}^\ell)$  es el monomio  $j$ -ésimo de  $\mathbf{p}(\mathbf{x}^\ell)$ .

Nótese que en la aproximación local móvil  $u^\ell(\mathbf{x}^\ell, \mathbf{x})$  usamos un doble sistema coordinado: el primero para significar el carácter local de la aproximación en tanto que el segundo indica el punto en el que se está calculando la función aproximante (ver figura 1). La función aproximante  $\tilde{u}(\mathbf{x})$  será igual al valor de la aproximante local evaluada en el centro :

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u^\ell(\mathbf{x}, \mathbf{x}) \quad (2)$$

Los coeficientes  $a_j(\mathbf{x})$  se obtienen minimizando la expresión

$$J(\mathbf{a}(\mathbf{x})) = \sum_i^n w_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}) \left[ \mathbf{p}^T(\mathbf{x}_i) \mathbf{a}(\mathbf{x}) - u_i \right]^2 \quad (3)$$

donde  $n$  es la cantidad de nodos en  $\Omega_{\mathbf{x}}$ ;  $u_i$  es el valor de  $u(\mathbf{x}_i)$  y  $w_{\mathbf{x}}$  es la función de peso asociada al punto  $\mathbf{x}$ .  $J(\mathbf{a}(\mathbf{x}))$  puede ser vista como una distancia entre la aproximación local buscada y la función.

El sistema que resulta de imponer las condiciones para obtención del mínimo, puede escribirse:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (4)$$

de donde

$$\mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (5)$$

Definiendo:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}(\mathbf{x}_1) & \mathbf{p}(\mathbf{x}_2) & \dots & \mathbf{p}(\mathbf{x}_n) \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{W}(\mathbf{x}) = \text{Diag}(w_1, w_2, \dots, w_n)$$

expresamos las matrices del sistema, como:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \mathbf{W}(\mathbf{x}) \mathbf{P}^T \quad , \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}) = \mathbf{P} \mathbf{W}(\mathbf{x})$$

Nótese que  $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ , dependen del punto  $\mathbf{x}$  a través de la matriz diagonal de funciones de peso  $\mathbf{W}(\mathbf{x})$ , y que la matriz  $\mathbf{P}$  es constante. Luego, puede verse que resolver el sistema (4) resulta equivalente a resolver el sistema rectangular

$$(\mathbf{W}(\mathbf{x})^{1/2} \mathbf{P}^T) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \mathbf{W}(\mathbf{x})^{1/2}$$

por mínimos cuadrados.

Volviendo a la ecuación (2), podemos reemplazar la expresión hallada para los parámetros  $\mathbf{a}(\mathbf{x})$  en ésta y escribir:

$$\tilde{u}(\mathbf{x}) = u^{\ell}(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{a}(\mathbf{x}) = \underbrace{\mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{B}(\mathbf{x})}_{\Phi(\mathbf{x})} \mathbf{u} = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad (6)$$

donde la matriz  $\Phi(\mathbf{x})$  contiene el conjunto de funciones de forma  $\varphi_i$ , definidas por:

$$\varphi_i(\mathbf{x}) = \mathbf{p}^T(\mathbf{x}) \mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}) \mathbf{p}(\mathbf{x}_i) w_i$$

cuando el nodo  $i$ -ésimo cae dentro del dominio de influencia  $\Omega_{\mathbf{x}}$ . Fuera de éste,  $\varphi_i(\mathbf{x}) = 0$ . La función de peso  $w_{\mathbf{x}}$  determina el grado de regularidad de las funciones de forma. Si  $w_{\mathbf{x}}$  posee soporte compacto,  $\varphi_i(\mathbf{x})$  posee también soporte compacto. El gráfico 2 muestra una función de forma típica para una distribución regular de nodos, obtenida usando como función de peso exponencial descripta más adelante en (7).

La derivada  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial x} = \varphi_{i,x}$  (de manera análoga  $\varphi_{i,y}$ ), se obtiene por diferenciación

$$\Phi_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}_{,x}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}_{,x}$$

Usando las identidades  $\mathbf{A}_{,x}^{-1} = -\mathbf{A}^{-1} \mathbf{A}_{,x} \mathbf{A}^{-1}$ ;  $\mathbf{A}_{,x} = \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x} \mathbf{P}^T$  y  $\mathbf{B}_{,x} = \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x}$  obtenemos

$$\Phi_{,x}(\mathbf{x}) = \mathbf{p}_{,x}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} + \mathbf{p}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \mathbf{W}_{,x} [\mathbf{I} - \mathbf{P}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B}]$$

La función de peso usada en la aproximación de mínimos cuadrados juega un papel primordial. Ella es la que establece el carácter local de la aproximación de mínimos cuadrados. La manera

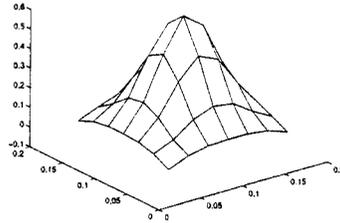


Figura 2: Función de forma típica para una función de peso exponencial

de elegirla es variada. Debe ser una función positiva dentro del dominio de influencia y nula en el borde y fuera del mismo. En general se usan funciones simétricas. Estudios recientes muestran que se requieren funciones con continuidad al menos un orden mayor al de las derivadas presentes en el funcional.

Numerosos autores trabajan con una función exponencial de peso  $w_{\mathbf{x}}$ , que depende de la distancia al centro de  $\Omega_{\mathbf{x}}$  y está definida de la siguiente manera :

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \frac{\epsilon(\|\mathbf{z}\|/r_x)^2 - \epsilon(r_m/r_x)^2}{1 - \epsilon(r_m/r_x)^2} & \text{si } \|\mathbf{z}\| < r_m \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{z}\| \geq r_m \end{cases} \quad (7)$$

El radio de influencia  $r_m$  y el parámetro de decaimiento  $\epsilon$  pueden variar punto a punto, en tanto  $r_x = \kappa r_m$ , con  $0 < \kappa < 1$ . Al disminuir el radio de influencia, se incrementa el carácter local de la aproximación y en general, mejora la precisión; pero, se debe cuidar de no superar cierto límite por debajo del cual la matriz  $\mathbf{A}$  se vuelve singular (o muy mal condicionada). Nótese que la función (7) es una exponencial trasladada y escalada, a efectos de verificar la continuidad de la función en el borde de  $\Omega_{\mathbf{x}}$ . En la práctica, hemos obtenido resultados de calidad similar usando simplemente:

$$w_{\mathbf{x}}(\mathbf{z}) = \begin{cases} \epsilon(\|\mathbf{z}\|/r_x)^2 & \text{si } \|\mathbf{z}\| < r_m \\ 0 & \text{si } \|\mathbf{z}\| \geq r_m \end{cases}$$

### 3 Aplicación a la ecuación del calor

La *formulación variacional* de la ecuación de transmisión del calor en un dominio  $\Omega$  de frontera  $\Gamma$  se escribe:

Hallar  $u \in H^1(\Omega)$ ,  $\lambda \in H^0(\Gamma_u)$  tal que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \nabla \delta u \cdot \nabla u \, d\Omega - \int_{\Omega} \delta u \, f \, d\Omega - \int_{\Gamma_g} \delta u \, \bar{g} \, d\Gamma - \\ - \int_{\Gamma_u} \delta \lambda (u - \bar{u}) \, d\Gamma - \int_{\Gamma_u} \delta u \, \lambda \, d\Gamma = 0 \quad \forall \delta u \in H^1(\Omega), \\ \delta \lambda \in H^0(\Gamma_u) \end{aligned} \quad (8)$$

Los multiplicadores de Lagrange son usados para imponer las condiciones de borde esenciales. Resolvemos este problema en forma discreta. Para ello, construimos los campos  $u$  y  $\delta u$  usando las funciones de interpolación obtenidas por mínimos cuadrados móviles

$$u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u} \quad ; \quad \delta u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \delta \mathbf{u}$$

sobre el interior del dominio  $\Omega$ , en tanto que sobre la porción de frontera  $\Gamma_u$  aproximaremos  $\lambda$  y  $\delta\lambda$  en la forma :

$$\lambda(s) = \mathbf{N}(s) \boldsymbol{\lambda} \quad ; \quad \delta\lambda(s) = \mathbf{N}(s) \delta\boldsymbol{\lambda}$$

donde  $\mathbf{N}(s)$  es un conjunto de funciones de interpolación de Lagrange apropiadas y  $s$  es la longitud de arco a lo largo de la frontera  $\Gamma_u$ . Las integrales sobre el interior del dominio  $\Omega$  y sobre la frontera se realizarán en forma numérica, usando cuadraturas de Gauss. La formulación (8) conduce al sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{b} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

donde las matrices están definidas por:

$$\begin{aligned} \mathbf{K} &= \int_{\Omega} \nabla \Phi^T \nabla \Phi \, d\Omega & ; & \quad \mathbf{G} = - \int_{\Gamma_u} \Phi^T \mathbf{N} \, d\Gamma \\ \mathbf{f} &= \int_{\Omega} \Phi^T f \, d\Omega + \int_{\Gamma_g} \Phi^T \bar{g} \, d\Gamma & ; & \quad \mathbf{b} = - \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{u} \, d\Gamma \end{aligned}$$

Hallados los valores de los coeficientes  $\mathbf{u}$ , obtenemos la solución usando  $u(\mathbf{x}) = \Phi(\mathbf{x}) \mathbf{u}$ .

## 4 Subdivisión del dominio

Para realizar el análisis, debemos generar: (i) un conjunto de nodos, en donde expresaremos las incógnitas del problema; y (ii) un conjunto de celdas de integración, de las que nos valdremos para realizar las integrales expresadas en la sección anterior.

La distribución de los puntos y las celdas en el dominio puede ajustarse para seguir las variaciones del campo incógnita, tratando de mejorar la aproximación en zonas en donde se presenten fuertes gradientes en la solución. Para que el proceso sea efectivo, los cambios en la densidad de nodos, deben ir acompañados de una mejora en la calidad de la integración numérica. Además, se deben ajustar apropiadamente los parámetros que regulan la forma de las funciones de peso. Se ha observado experimentalmente que las variaciones de densidad de nodos deben ser graduales, por cuanto cambios bruscos deterioran fuertemente la calidad de la aproximación.

El esquema que seguimos para obtener una distribución apropiada de nodos y celdas, consiste en dividir el dominio en forma recursiva, siguiendo una estructura de tipo *quadtree* (ver figura 3). Los nodos se ubican en los vértices de las celdas. Las integrales se resuelven mediante la regla de integración de Gauss-Legendre, utilizando en todos los casos  $2 \times 2$  puntos de integración por celda. El tamaño de las celdas, se define a través de una función  $h_{opt}(\mathbf{x})$  de forma tal que:

$$h_{celda} \leq \min_{\mathbf{x} \in celda} h_{opt}(\mathbf{x})$$

El radio de influencia  $r_m$  se determina en forma similar, haciendo que dependa de la función  $h_{opt}$ , en la forma  $r_m = C h_{opt}(\mathbf{x})$ .

## 5 Indicador de error

Para cada nodo  $\mathbf{x}$  usamos como indicador de error una estimación de la norma de la derivada segunda en el punto, por el radio de la nube al cuadrado. Esta medida claramente es consistente con la medida de error obtenida a partir de la expansión de Taylor. Definimos:

$$Er(\mathbf{x}) = \frac{r_x^2}{n_x} \sum_{\mathbf{x}_i \in \Omega_x} \frac{\|\nabla u(\mathbf{x}) - \nabla u(\mathbf{x}_i)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_i\|}$$

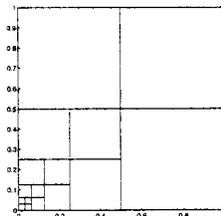


Figura 3: Subdivisión de celdas

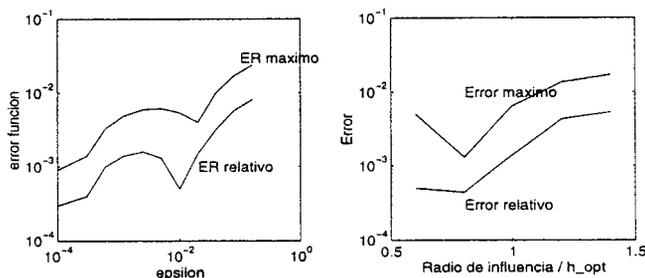


Figura 4: Variación del error en función del parámetro de decaimiento (izq) y con el radio de influencia (der.)

donde  $n_x$  es la cardinalidad de  $\Omega_x$ , y  $r_x$  el radio de  $\Omega_x$ . Luego escalamos esta medida dividiendo por su promedio sobre el dominio:

$$Ind(\mathbf{x}) = \frac{Er(\mathbf{x})}{Er_{med}}$$

donde  $Er_{med} = \text{mean}_{\mathbf{x} \in \Omega}(Er(\mathbf{x}))$ . Una distribución de puntos óptima será aquella para la cual el valor del indicador así determinado se encuentra lo más próximo posible a 1.

## 6 Ejemplos

### 6.1 Ejemplo 1

El primer ejemplo numérico es un ejemplo simple de conducción de calor en el cuadrado unitario [3], en el cual se toma el término fuente

$$f(x, y) = 8\pi^2 \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$$

y condiciones de borde mixtas homogéneas  $u = 0$  para  $0 < x < 1, y = 0, 1$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  para  $0 < y < 1, x = 0, 1$ . La solución analítica del problema es  $u(x, y) = \cos(2\pi x) \sin(2\pi y)$ . En este ejemplo usamos una distribución de nodos igualmente espaciados. Primeramente, sobre una red de  $17 \times 17$  nodos, analizamos el comportamiento del error en la solución aproximada para distintos valores del parámetro de decaimiento  $\epsilon$  (figura 4). Se calcularon dos medidas de error:

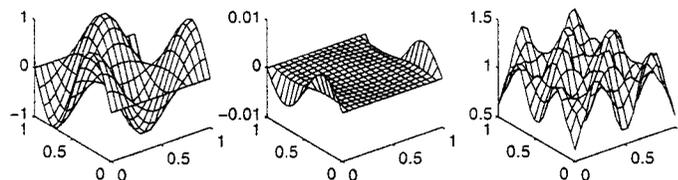


Figura 5: Gráfica de la solución aproximada (izq.) junto a la distribución del error (cent.) y del indicador (der.)

el error máximo en el dominio, y una medida del error relativo, calculado por la expresión:

$$e_{rel}(u) = \frac{1}{\|u\|_{\infty}} \frac{1}{Nn} \sum_{x_i} |\tilde{u} - u| \quad (10)$$

donde  $Nn$  es el número total de nodos de la discretización. Cabe mencionar que Nayroles informa un error 10 veces mayor al aquí obtenido, para una red de puntos y parámetros de definición de la función de peso similares a los nuestros.

La figuras 5 y 6, muestran la solución aproximada y sus derivadas calculadas para un valor de  $\epsilon = 0.01$ , junto a la distribución del error. Se puede observar que éste se concentra en las fronteras en donde se impone la condición de tipo Neumann. Se ve además que el indicador oscila en valores próximos a 1.

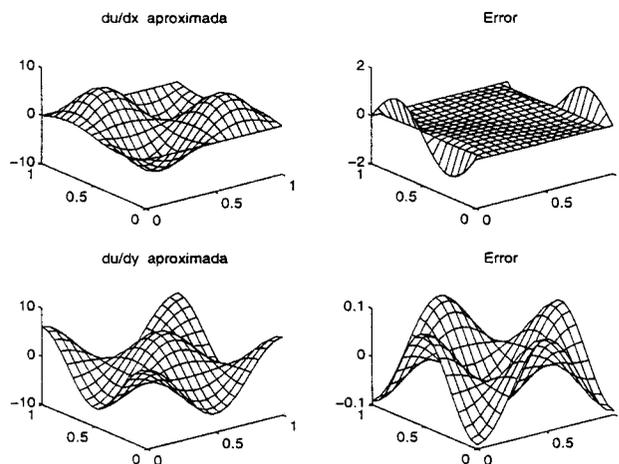


Figura 6: Gráfica de las derivadas aproximadas, junto a la distribución del error.

Un aspecto importante a considerar es la cantidad de nodos que quedan dentro de la nube y que intervienen en el proceso de obtener la aproximación local. Esta cantidad está fijada en forma indirecta por el valor del radio de influencia  $r_m$ . La figura 4 muestra cómo disminuye el error al

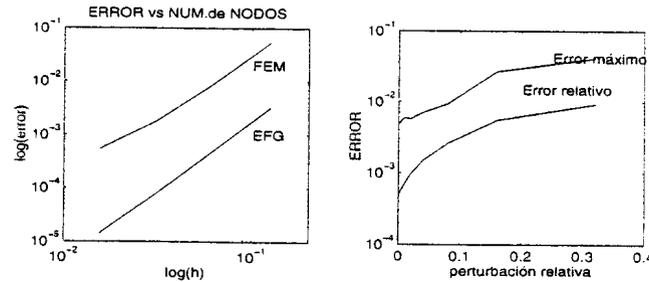


Figura 7: Variación del error en función del espaciado entre nodos (izq.) y con la perturbación de la posición de los nodos respecto del equiespaciado

disminuir  $r_m$ , hasta un valor límite por debajo del cual el mal condicionamiento de la matriz  $\mathbf{A}$  hace que la precisión del cálculo se deteriore. En el análisis usamos  $r_m = 0.6 * h_{opt}(x)$ , con lo cual ingresaron aproximadamente 4 nodos por nube.

La tasa de convergencia en función del espaciado entre nodos para este ejemplo fue aproximadamente 2.6. La figura 7 muestra el comportamiento del error comparado con el error para una solución lograda usando elementos finitos triangulares lineales.

Se estudió a continuación la sensibilidad del método frente a perturbaciones en las posiciones de los nodos respecto de la grilla de integración. La figura 7 muestra cómo es afectado el error cuando se aplican perturbaciones aleatorias a las posiciones de los nodos. El tamaño de las perturbaciones está expresado como factor del espaciado entre nodos. Vemos que el esquema muestra buenas características de estabilidad. Igual comportamiento se observó para las derivadas.

## 6.2 Ejemplo 2

El segundo ejemplo considerado presenta un fuerte gradiente en la solución en la zona central del dominio. El dominio de definición es nuevamente el cuadrado unitario, y las condiciones de borde mixtas homogéneas  $u = 0$  para  $0 < x < 1, y = 0, 1$ ;  $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$  para  $0 < y < 1, x = 0, 1$ . El término fuente es ahora :

$$f(x, y) = \left( -2ky(1-y) + (ky(1-x)(1-y) - kxy(1-y))^2 \right. \\ \left. - 2kx(1-x) + (kx(1-y)(1-x) - kxy(1-x))^2 \right) \frac{e^{kxy(1-x)(1-y)}}{1 - e^{k/16}}$$

resultando la solución exacta  $u(x, y) = (1 - e^{kxy(1-x)(1-y)}) / (1 - e^{k/16})$ .

La división recursiva del dominio permite refinar las regiones que requieren mayor cantidad de puntos, simplemente ajustando la función generadora. Al mismo tiempo se actualiza la estructura de celdas de integración. En todas las celdas hemos usado cuatro puntos de Gauss. Utilizamos el indicador de error a posteriori, aumentando la cantidad de puntos en la zona en donde éste muestra valores altos. Lo hemos aplicado a este ejemplo para dos valores del parámetro  $k$  ( $k = 200$  y  $k = 1000$ ).

Primeramente, se realizó para el caso  $k = 1000$  un análisis con una distribución uniforme de puntos con espaciado  $1/16$ . Los resultados se muestran en la figura 8, junto a la distribución del indicador de error. A partir de estos resultados, decidimos un primer nivel de refinamiento agregando nodos en la región  $0.25 \leq x \leq 0.75, 0.25 \leq y \leq 0.75$ . Los resultados logrados con esta

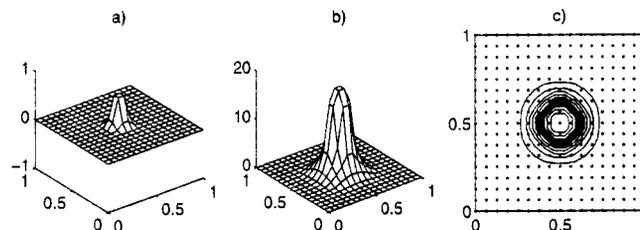


Figura 8: Solución aproximada e indicador de error (vista y planta) para una distribución regular de puntos ( $k=1000$ ).

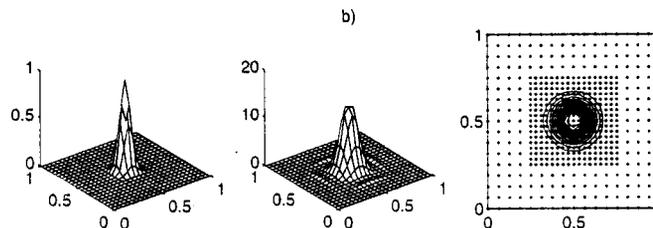


Figura 9: Solución aproximada e indicador de error (vista y planta) para el primer grado de refinamiento ( $k=1000$ ).

distribución de puntos, se muestran en la figura 9, junto a la nueva distribución del indicador de error. En base a ésta, decidimos un segundo nivel de refinamiento aumentando la densidad de puntos en la región  $3/8 \leq x \leq 5/8$ ,  $3/8 \leq y \leq 5/8$ . La tabla 1 nos muestra los errores obtenidos en cada caso para la función, con un total acuerdo con las predicciones del indicador a posteriori. Las derivadas presentaron igual comportamiento.

Posteriormente, se analizó el caso  $k = 200$ . Es interesante destacar que cuando se emplearon los refinamientos determinados para el caso anterior, no llevaron a una disminución efectiva del error en el cálculo. En cambio, cuando se decidió el refinamiento siguiendo las variaciones del indicador de error ahora calculado, los resultados obtenidos respondieron en la forma apropiada. El primer cálculo realizado sobre una grilla uniforme, mostró la necesidad de refinamiento en la zona  $1/8 \leq x \leq 7/8$ ,  $1/8 \leq y \leq 7/8$ , en tanto en base al segundo cálculo decidimos refinar en la zona  $0.25 \leq x \leq 0.75$ ,  $0.25 \leq y \leq 0.75$  (ver tabla 2).

	$17 \times 17$	Refin. 1	Refin. 2
$e_{rel}(u)$	$9.7882 \times 10^{-4}$	$6.1578 \times 10^{-4}$	$3.954 \times 10^{-4}$
$\ u - \tilde{u}\ _{\infty}$	0.0134	0.013	0.003

Tabla 1: Error en el cálculo de la función para el caso  $k = 1000$

	$17 \times 17$	Refin. 1	Refin. 2
$e_{rel}(u)$	$9.809 \times 10^{-4}$	$3.739 \times 10^{-4}$	$2.156 \times 10^{-4}$
$\ u - \tilde{u}\ _{\infty}$	0.0106	0.0030	$5.918 \times 10^{-4}$

Tabla 2: Error en el cálculo de la función para el caso  $k = 200$ 

## 7 Conclusiones

Se implementó el método de Galerkin libre de elementos, proponiendo un procedimiento para la ubicación de puntos y realización de las integrales numéricas requeridas, en el cual se guarda una relación óptima entre los distintos parámetros que influyen en el método. Realizamos una serie de experiencias numéricas, analizando el error para diferentes juegos de parámetros que influyen en el método. Los ejemplos fueron construidos buscando forzar al método mediante la presencia de fuertes gradientes localizados en la solución.

Se lograron resultados apropiados de convergencia para las distintas situaciones ensayadas. Mediante un indicador de error, se logró predecir apropiadamente las zonas del dominio en donde se requiere refinamiento para disminuir el error en la solución aproximada.

El método se mostró extremadamente sensible a la variación de parámetros en forma independiente. En efecto, las experiencias realizadas mostraron la necesidad de mantener una relación apropiada entre el radio de influencia, distancia entre nodos y la distribución de puntos para integración numérica. La propuesta seguida en este trabajo, busca fijar relaciones apropiadas a respetar entre todos ellos, guardando un grado suficiente de flexibilidad y sin perder el objetivo primordial de liberar al usuario de establecer una noción de malla.

## Referencias

- [1] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. La méthode des éléments diffus. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 313, Serie II:133-138, 1991.
- [2] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. L'approximation diffuse. *C.R. Acad. Sci. Paris*, 313, Serie II:293-296, 1991.
- [3] B. Nayroles, G. Touzot, and P. Villon. Generalizing the finite element method: Diffuse approximation and diffuse element. *Comput. Mechanics*, 10:307-318, 1992.
- [4] P. Lancaster and K. Salkauskas. Surfaces generated by moving least squares methods. *Mathematics of Computation*, 37:141-158, 1981.
- [5] Y. Krongauz and T. Belytschko. A Petrov-Galerkin diffuse element method (PG DEM) and its comparison to EFG. *Comput. Mechanics*, 19:327-333, 1997.
- [6] T. Belytschko, Y.Y. Lu, and L. Gu. Element-free Galerkin methods. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 37:229-256, 1994.
- [7] L. Gavete, S. Falcón, and A. Ruiz. Some results on the diffuse approximation using Galerkin methods. *Numerical Methods in Engineering '96*, pages 499-505, 1996.
- [8] R. L. Taylor, O. C. Zienkiewicz, E. Oñate, and S. Idelsohn. Moving least square approximations for the solution of differential equations. 1996.