

**SIMULACIÓN NUMÉRICA DEL FLUJO VISCOSO 3D, EN REGIMEN LAMINAR,
SOBRE LA PALA DE UNA TURBINA EOLICA**

Ricardo A. Prado¹, Mario A. Storti² y Sergio R. Idelsohn²

¹ Departamento de Mecánica Aplicada
Facultad de Ingeniería - Universidad Nacional del Comahue
calle Buenos Aires No.1400 - (8300) Neuquén - Argentina

² Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMEC)
Güemes No.3450 - (3000) Santa Fe - Argentina

RESUMEN

Se determina el crecimiento de una capa límite tridimensional laminar desarrollada sobre la pala de una turbina eólica de eje horizontal, resolviendo numéricamente las ecuaciones de Prandtl en un sistema coordenado curvilíneo fijo a la superficie de la pala. Las ecuaciones de gobierno, representadas por un sistema acoplado de ecuaciones diferenciales no lineales, son resueltas mediante la aplicación de la técnica de las diferencias finitas, recurriendo a esquemas implícitos de segundo orden. Las ecuaciones algebraicas resultantes para las distribuciones de velocidad son resueltas iterativamente con la finalidad de desacoplarlas y linealizarlas, manteniendo el esquema tridiagonal requerido para la aplicación del algoritmo de Thomas.

ABSTRACT

The aim of the present work is to determine the development of a laminar three-dimensional boundary layer on a horizontal-axis wind turbine blade, by numerically solving the so-called Prandtl's equations in a generalized curvilinear coordinate system attached to the blade. The governing equations, a coupled system of non-linear differential equations, are numerically solved applying finite difference techniques. Second order fully implicit schemes are developed, resulting in a tridiagonal system of linearized equations that is iteratively solved applying Thomas algorithm in order to determine the velocity profiles inside the viscous layer.

INTRODUCCIÓN

El objetivo del presente trabajo es determinar el crecimiento y las distribuciones de velocidad en una capa límite tridimensional desarrollada sobre la pala de una turbina eólica de eje horizontal en rotación, resolviendo numéricamente las denominadas ecuaciones de Prandtl. Se asume que la pala es rígida, de envergadura finita, está conformada por perfiles delgados de sección constante (representados en este problema por secciones de arco circular), rota a velocidad angular constante y es embestida por un viento representado por una corriente uniforme, presentando entonces una torsión geométrica. Por simplicidad, se considera que la pala se encuentra fija, y por ende el aire está animado de un movimiento de rotación de sentido contrario al de la turbina, el cual se adiciona al movimiento de avance a través del disco del rotor. Asimismo, se ha considerado una condición de trabajo donde el desarrollo de la capa límite es exclusivamente laminar y se encuentra completamente adherida. Una vez determinado el flujo dentro de la capa límite, se puede calcular la distribución de la tensión de corte sobre las superficies de la pala, la cual, integrada, determina el término de resistencia viscosa que ha de adicionarse a la inducida (que es calculada bajo condiciones inviscidas) con la finalidad de evaluar la resistencia total de la pala. Esto tendería a una más adecuada descripción de las características aerodinámicas de la pala a los fines de su diseño y en la mejora en la determinación de los parámetros de funcionamiento de la turbina eólica.

FORMULACIÓN ANALÍTICA

En la siguiente formulación, se establece un sistema coordenado representado por una terna ortogonal definida por (X, Y, Z) , solidaria al cubo de la pala, donde $Z(+)$ coincide con la dirección del viento incidente, $X(+)$ se ubica a lo largo del borde de ataque de la pala, y donde $Y(+)$ resulta a partir de la definición de una terna cartesiana derecha. En este sistema, denominado *global*, los versores se denominan $\{\hat{e}_x; \hat{e}_y; \hat{e}_z\}$. En el sistema global el aire describe un movimiento combinado de rotación y traslación con respecto a la pala, la cual se considera fija. Por otra parte, para el desarrollo de la capa límite sobre la pala, es conveniente utilizar un nuevo sistema coordenado, adherido a la superficie de la misma, denominado *local*, representado por (x, y, z) . Este sistema coordenado curvilíneo no resulta necesariamente ortogonal, siendo definido por las bases $\{\bar{g}_1; \bar{g}_2; \bar{g}_3\}$. En este sistema local, los versores se definen por $\{\hat{e}_1; \hat{e}_2; \hat{e}_3\}$, o de manera equivalente, por $\{\hat{e}_z; \hat{e}_x; \hat{e}_y\}$.

El sistema de ecuaciones que gobiernan el flujo estacionario, incompresible, isotérmico y tridimensional, en régimen laminar, de un fluido newtoniano de viscosidad cinemática ν y densidad ρ constantes, están representadas por la ecuaciones de conservación de la masa y de la cantidad de movimiento,

$$\bar{\nabla} \cdot (\bar{V}) = 0 \quad (\bar{V} \cdot \bar{\nabla})\bar{V} + \frac{1}{\rho} \bar{\nabla} p - \nu \nabla^2 \bar{V} = 0 \quad (1)$$

donde \bar{V} y p denotan, respectivamente, el campo de velocidades y el de presiones. El campo de velocidades puede describirse tanto en el sistema global como en el local, resultando

$$\bar{V} = U \hat{e}_x + V \hat{e}_y + W \hat{e}_z = w \hat{e}_1 + u \hat{e}_2 + v \hat{e}_3 = w \hat{e}_z + u \hat{e}_x + v \hat{e}_y \quad (2)$$

donde (U, V, W) representan las componentes del vector velocidad del aire en el espacio ortogonal cartesiano y (u, v, w) representan las componentes físicas en el sistema curvilíneo $\{1, 2\}$, con versores

$$\hat{e}_i = \frac{\bar{g}_i}{\sqrt{g_{ii}}} = \frac{\bar{g}_i}{h_i} \quad (3)$$

En particular, z representa la coordenada según envergadura, dirigida hacia la punta de pala, x representa la coordenada local según cuerda, a lo largo del arco del perfil, e y denota la coordenada dirigida desde la superficie de la pala hacia el fluido. Así, la superficie de la pala de radio en punta B , compuesta por perfiles de arco circular de longitud S , cuerda c , máxima ordenada h y radio de curvatura R , resulta definida por

$$\begin{cases} X_s = z \\ Y_s = 2R \sin(\theta/2) \cos \beta \\ Z_s = 2R \sin(\theta/2) \sin \beta \end{cases} \quad (4)$$

donde

$$\theta = \frac{x}{R} \quad \beta = \varphi(z) + \frac{1}{2}(\theta^* - \theta) \quad \frac{\theta^*}{2} = \arcsin \left[\left(\frac{h}{c} + \frac{c}{4h} \right)^{-1} \right] \quad \varphi(z) = \arctan \left(\frac{U_0}{\Omega z} \right) \quad (5)$$

Por su parte, $\varphi(z)$ representa la torsión geométrica de la pala, siendo U_0 la velocidad del viento sobre el disco barrido por la turbina eólica. Dicha velocidad resulta menor que la velocidad de la corriente libre de aire, U_∞ .

En el caso de secciones de pala conformadas por perfiles delgados de arco circular, resultan las siguientes componentes covariantes del tensor métrico

$$\begin{cases} g_{11} = (h_1)^2 = 1 + 4R^2 (\varphi')^2 \sin^2(\theta/2) \\ g_{22} = (h_2)^2 = 1 \\ g_{33} = (h_3)^2 = 1 + R^2 (\varphi')^2 \sin^2 \theta \\ g_{12} = g_{21} = -2R \varphi' \sin^2(\theta/2) \\ g_{13} = g_{31} = g_{23} = g_{32} = 0 \end{cases} \quad g = g_{33} [g_{11} g_{22} - (g_{12})^2] = (g_{33})^2 \quad (6)$$

El sistema de ecuaciones de gobierno (1) es simplificado imponiendo la hipótesis de Prandtl para el flujo en la capa límite [3]. Las ecuaciones resultantes son transformadas para llevarlas al sistema curvilíneo [4]. Por otra parte, en el sistema curvilíneo se definen las coordenadas adimensionales (ξ, η, ζ) que incorporan una transformación del dominio con el fin de resolver las ecuaciones discretizadas sobre una malla 3D que mejor se adapte al comportamiento físico de la solución dentro de la región viscosa y, simultáneamente, generen un dominio computacional regular [4].

Finalmente, se formulan las siguientes ecuaciones diferenciales escalares [4], donde las componentes del gradiente de presión resultan ser las impuestas por el flujo inviscido sobre la capa límite,

Ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{1}{h_2 S} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{k_2}{h_2} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \frac{k_3}{h_3} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{k_1}{h_1} \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1 B} \frac{\partial w}{\partial \zeta} + u K_{20} + w K_{10} = 0 \quad (7)$$

Ecuación para la cantidad de movimiento según cuerda:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 S} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \left(w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial u}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1 B} \frac{\partial u}{\partial \zeta} - \frac{1}{h_2 S} \frac{u_{NV}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 B} \frac{w_{NV}}{\partial \zeta} + \\ + (ww - w_{NV} w_{NV}) K_{112} + (uw - u_{NV} w_{NV}) K_{122} + (uu - u_{NV} u_{NV}) K_{222} - \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Ecuación para la cantidad de movimiento según envergadura:

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_2 S} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \left(w \frac{k_1}{h_1} + u \frac{k_2}{h_2} + v \frac{k_3}{h_3} \right) \frac{\partial w}{\partial \eta} - \frac{1}{h_1 B} \frac{\partial w}{\partial \zeta} - \frac{1}{h_2 S} \frac{w_{NV}}{\partial \xi} + \frac{1}{h_1 B} \frac{w_{NV}}{\partial \zeta} + \\ + (ww - w_{NV} w_{NV}) K_{111} + (uw - u_{NV} w_{NV}) K_{121} + (uu - u_{NV} u_{NV}) K_{221} - \frac{(k_3)^2}{g_{33}} \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial \eta^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

donde

$$\begin{cases} \xi = \xi(x) = \frac{x}{S} & \left\{ \begin{array}{l} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \eta \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{array} \right. \\ \eta = \eta(x, y, z) = \frac{y}{f(x, z)} = \frac{y}{C_1 + C_2 \sqrt{1 + (a_0 z)^2}} & \\ \zeta = \zeta(z) = 1 - \frac{z}{B} & \zeta_0 = \frac{r_{cubo}}{B} \end{cases} \quad (10)$$

$$k_1 = \frac{\partial \eta}{\partial z} \quad k_2 = \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad k_3 = \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{1}{f(\xi, \zeta)} \quad (11)$$

$$K_{10} = \frac{g_{33}}{g} \left\{ \left[1 - \frac{g}{g_{33}} \frac{1}{(h_1)^2} \right] \frac{\partial h_1}{\partial z} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} \right\} \quad K_{20} = \frac{g_{33}}{g} \left\{ -g_{12} \frac{\partial g_{12}}{\partial x} + h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad (12)$$

$$K_{111} = \frac{g_{33}}{g} g_{12} \left\{ \frac{g_{12}}{(h_1)^2} \frac{\partial h_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{1}{h_1} \frac{\partial g_{12}}{\partial z} \right\} \quad K_{112} = \frac{g_{33}}{g} h_2 \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial z} - h_1 \frac{\partial h_1}{\partial x} - \frac{g_{12}}{h_1} \frac{\partial h_1}{\partial z} \right\} \quad (13)$$

$$K_{121} = \frac{g_{33}}{g} \left\{ h_1 \left[1 + \left(\frac{g_{12}}{h_1} \right)^2 \right] \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad K_{122} = -2 \frac{g_{33}}{g} g_{12} \left\{ \frac{\partial h_1}{\partial x} \right\} \quad (14)$$

$$K_{221} = \frac{g_{33}}{g} h_1 \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right\} \quad K_{222} = -\frac{g_{33}}{g} g_{12} \left\{ \frac{\partial g_{12}}{\partial x} \right\} \quad (15)$$

Las condiciones de contorno del sistema de ecuaciones (7) a (9) resultan:

- en $(\eta = 0)$, se impone la condición de no deslizamiento sobre la superficie de la pala, indicando que no existe velocidad relativa entre la misma y el aire, (16),
- en $(\eta = 1)$, suficientemente lejos de la superficie de la pala, el flujo debe ajustarse a los resultados provenientes de la teoría inviscida, (17),

$$\begin{cases} u(\xi, 0, \zeta) = 0 \\ v(\xi, 0, \zeta) = 0 \\ w(\xi, 0, \zeta) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases} \quad (16)$$

$$\begin{cases} u(\xi, 1, \zeta) = u_{NV}(\xi, \zeta) = F_u [U_{NV}(X, Y, Z), V_{NV}(X, Y, Z), W_{NV}(X, Y, Z)] \\ w(\xi, 1, \zeta) = u_{NV}(\xi, \zeta) = F_w [U_{NV}(X, Y, Z), V_{NV}(X, Y, Z), W_{NV}(X, Y, Z)] \end{cases} \quad \begin{cases} 0 \leq \xi \leq 1 \\ 0 \leq \zeta \leq 1 - \zeta_0 \end{cases} \quad (17)$$

donde U_{NV} , V_{NV} y W_{NV} representan las componentes de la velocidad del flujo inviscido sobre la pala, en el sistema coordenado global, (X, Y, Z) . Las velocidades u_{NV} y w_{NV} denotan, respectivamente, las componentes del vector velocidad del flujo inviscido, \vec{V}_{NV} , según las direcciones definidas por las coordenadas de la superficie de la pala, (x, z) o (ξ, ζ) , en el sistema curvilíneo local.

RESOLUCIÓN NUMÉRICA

Las ecuaciones (7) a (9) se discretizan mediante el empleo de diferencias finitas, haciendo uso de esquemas implícitos (fully implicit) de segundo orden. Las ecuaciones en diferencias se reordenan de manera de formularse como sistemas tridiagonales en cada componente de velocidad incógnita, con el fin de utilizar el algoritmo de Thomas [5] en su resolución. Así,

$$\{A_1\}u_{j+1,k}^{i+1} + \{D_1\}u_{j,k}^{i+1} + \{B_1\}u_{j-1,k}^{i+1} = \{E_1\} \quad \text{de (8)}$$

$$\{A_2\}w_{j+1,k}^{i+1} + \{D_2\}w_{j,k}^{i+1} + \{B_2\}w_{j-1,k}^{i+1} = \{E_2\} \quad \text{de (9)} \quad (18)$$

$$\{A_3\}v_{j+1,k}^{i+1} + \{D_3\}v_{j,k}^{i+1} + \{B_3\}v_{j-1,k}^{i+1} = \{E_3\} \quad \text{de (7)}$$

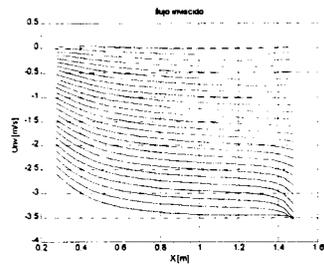
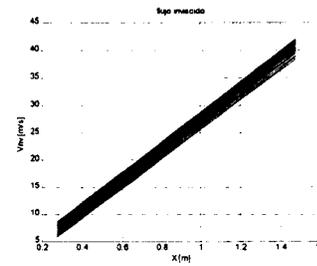
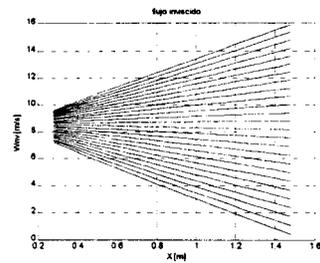
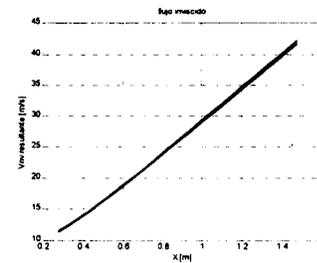
Lógicamente, dadas las características no lineales y de acoplamiento de las ecuaciones que conforman al sistema (18), dichas ecuaciones son linealizadas y, consecuentemente, resueltas iterativa y secuencialmente con el fin de ajustar los coeficientes de sus respectivos términos no lineales. Por otra parte, en la presente representación discretizada del dominio computacional, se han considerado 100 estaciones de cálculo según cuerda (i) y según envergadura (k), y 800 según la variable adimensional η , (j), la cual es una medida del espesor de la capa límite.

EJEMPLO

A modo de ejemplo, se determina el desarrollo de una capa límite laminar tridimensional y estacionaria sobre una pala de cuerda constante, con la geometría y condiciones de trabajo definidas a continuación,

cuerda, $c = 0,125$ m	velocidad no perturbada del viento, $U_\infty = 12,0$ m/s
razón $h/c = 0,050$	velocidad del viento en el rotor, $U_0 = 8,4$ m/s
radio de pala en la raíz, $r_{cabo} = 0,25$ m	velocidad angular de la turbina, $\Omega = 28$ s ⁻¹
radio de pala en la punta, $B = 1,50$ m	$C_1 = 0,0001$ m
envergadura de la pala, $b = 1,25$ m	$C_2 = 0,0107$ m ^{1/2}
densidad del aire, $\rho = 1,2$ kg/m ³	viscosidad cinemática del aire, $\nu = 1,5 \cdot 10^{-5}$ m ² /s

Las figuras 1 a 4 muestran las distribuciones de velocidad sobre la pala obtenidas bajo consideraciones de flujo inviscido, en el sistema (X, Y, Z) , habiendo sido determinadas mediante la aplicación del denominado método de los paneles [6]. Para el cálculo de estas distribuciones de velocidad se ha discretizado la superficie de la pala en $25 \times 25 = 625$ paneles. Mediante las transformaciones entre las bases global y local, dichas distribuciones son reformuladas a componentes según las direcciones (x, z) del sistema curvilíneo, es decir, (u_{NV}, w_{NV}) con el fin de ser introducidos en las ecuaciones (8) y (9) como términos del gradiente de presión impuesto sobre la capa viscosa y como condiciones de contorno sobre el borde superior del dominio físico, (17).

Figura 1: distribución de U_{NV} Figura 2: distribución de V_{NV} Figura 3: distribución de W_{NV} Figura 4: distribución de $|\tilde{V}_{NV}|$

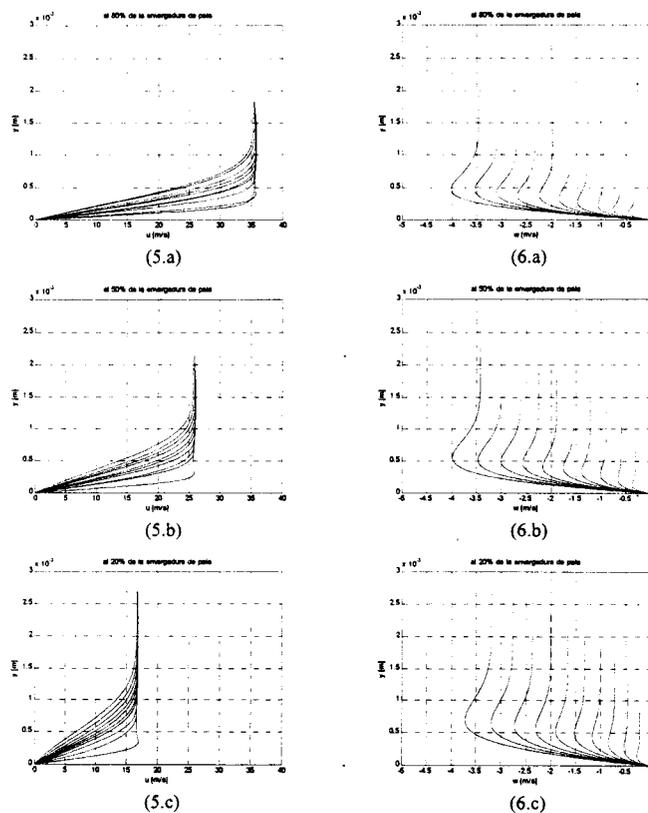
RESULTADOS Y CONCLUSIONES

Las figuras 5 y 6 muestran las distribuciones de las componentes de velocidad según cuerda, u , y según envergadura, w , dentro de la capa viscosa, para diferentes estaciones, a saber: (a) 80%, (b) 50% y (c) 20% de la envergadura de pala medida desde su raíz. Asimismo, se han representado los perfiles para 10 estaciones igualmente espaciadas a lo largo de la coordenada x medida desde el borde de ataque hacia el borde de fuga de la pala. Estas distribuciones corresponden a las velocidades relativas a una pala torsionada y con curvatura, la cual se considera fija en el espacio.

Las figuras 5 muestran las evoluciones espaciales de los perfiles de velocidad según cuerda, u . Se observan el decremento de las pendientes de los perfiles y el incremento de los espesores de la capa viscosa, tanto a medida que el aire fluye hacia el borde de fuga, cuanto desde punta de pala hacia la raíz. Este efecto resulta incrementado en proximidades de la raíz de la pala, dado que la misma es una zona de relativas bajas velocidades. Más aún, de considerarse perfiles delgados con una mayor curvatura (es decir, una mayor relación h/c), se observarían hacia la raíz amplias zonas de flujo separado como consecuencia de una combinación de gradientes adversos y bajas velocidades relativas.

Un modelo de interés, conceptualmente próximo al caso aquí considerado, es el denominado problema de Bödewadt [8,9], que estudia el campo fluidodinámico viscoso generado por un flujo rotatorio en proximidad de un disco fijo. En ese problema, el flujo exterior rotante establece un gradiente radial de presión que, al actuar en las proximidades del disco -donde las velocidades son relativamente bajas-, causa un flujo radial dirigido hacia el eje de rotación, que es denominado *flujo secundario*. Dicho efecto es asimismo observado, como era de esperarse de un problema semejante, en las soluciones numéricas representadas en las figuras 6 para la velocidad según envergadura, w .

Determinados los perfiles de velocidad, se calcula el efecto integrado de las tensiones viscosas sobre las superficies, con el fin de obtener las fuerzas viscosas resultantes sobre la pala [7]. Estas últimas se adicionan a las obtenidas de la aplicación del método de los paneles para el flujo inviscido, lográndose así un modelo más realista para el cálculo de las cargas aerodinámicas actuantes sobre una turbina eólica.



Figuras 5: perfiles de u en diferentes estaciones

Figuras 6: perfiles de w en diferentes estaciones

REFERENCIAS

- [1] Malvern L.E., *Introduction to the mechanics of a continuous medium*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1969).
- [2] Aris R., *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J. (1962).
- [3] Schlichting H., *Teoría de la capa límite*, Ediciones URMO (1972).
- [4] Prado R.A., Storti M.A. and Idelsohn S.R., *Development of Laminar, Three-Dimensional Boundary Layers on Rotating Blades*, Computational Methods in Engineering'99, Edited by P.M. Pimenta, R.M.L.R.F. Brasil and E.S. Almeida Neto, Sao Paulo, Brasil (1999).
- [5] Anderson D.A., Tannehill J.C. and Pletcher R.H., *Computational Fluid Mechanics and Heat Transfer*, Hemisphere Publishing Corporation, McGraw-Hill Book Company (1984).
- [6] Prado R.A., Idelsohn S.R. y Storti M.A., *Modelización del flujo inviscido alrededor de la pala de un aerogenerador mediante el método de los paneles*, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol. 14.4, 439-459 (1998).
- [7] Prado R.A., Storti M.A. and Idelsohn S.R., *Evaluación de la resistencia viscosa en régimen laminar, en palas de turbinas eólicas*, MECOM 99, Mendoza (1999).
- [8] White F.M., *Viscous Fluid Flow*, Second Edition, McGraw-Hill, Inc. (1991).
- [9] Panton R.L., *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons (1984).