Mecánica Computacional Vol. XXIV
A. Larreteguy (Editor)
Buenos Aires, Argentina, Noviembre 2005

# ITERACIÓN DE PUNTO FIJO ASPECTOS NO DETERMÍNISTICOS Y CAÓTICOS

**José H. Paganini *, Héctor E. Odstrcil *, Josué A. Núñez ***

*Centro de Investigaciones Básicas y Aplicadas (CIBA)
Facultad de Ingeniería. Universidad Nacional de Jujuy
Gorriti 237 San Salvador de Jujuy (4600) Jujuy
TE: 0388-4221582 Fax: 0388-4221582
**jhpaganini@fi.unju.edu.ar**, **heodst@yahoo.com.ar**, **jan@fi.unju.edu.ar**

*En el presente trabajo se analizan las condiciones de convergencia para algoritmos numéricos de solución de ecuaciones de una sola variable mediante iteración de Punto Fijo. Se desarrollan ejemplos a través de una función dentro de un entorno donde no se cumplen las condiciones de Lipschitz, y este hecho condiciona un comportamiento que brinda una asombrosa propiedad de las ecuaciones iterativas que consiste en su extrema sensibilidad a las condiciones iniciales que pueden brindar resultados no determinísticos y caóticos.*
*Estos análisis y desarrollos, están enmarcados dentro de las tareas de un proyecto de investigación acerca de los lenguajes de especificación y la optimización de algoritmos de cálculo numérico, formado por un grupo interdisciplinario de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional de Jujuy.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Una definición de punto fijo es la siguiente ([1] p 54): Un punto fijo de una función $g$ es un número $p$ para el cual $g(p) = p$

Los problemas de búsqueda de raíces y de punto fijo son clases equivalentes en el siguiente sentido:

Dado un problema de búsqueda de una raíz $f(p) = 0$, podemos definir una función $g$ con un punto fijo $p$ de varias maneras, una de ellas puede ser:

$$g(x) = x - f(x),$$

Entonces para $x = p$, se tiene:

$$g(p) = p - f(p), \text{ o } g(p) = p, \text{ dado que } f(p)=0, \text{ por ser raíz}$$

En otras palabras, el valor $p$ que es una raíz para $f(x)$, constituye un Punto Fijo para $g(p)$.

En el Punto Fijo la expresión $g(x) = x$ se representa como:

la intersección ente la curva $g(x)$ y la recta $y = x$

Lo arriba mencionado se visualiza en la figura 1

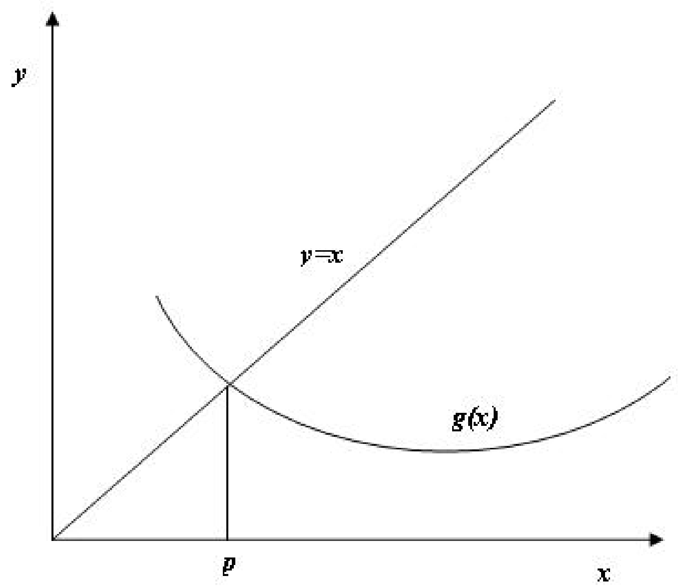


Figura 1

Entonces, se logra el Punto Fijo de g(x), o la raíz de f(x), mediante un algoritmo iterativo que consiste en partir de un valor $x_0$ a partir del cual se obtiene $g(x_0)$, luego $x_1 = g(x_0)$, y en general, $x_{i+1} = g(x_i)$, como se ilustra en la Figura 2, donde $x_2$ es aproximadamente igual a $p$.

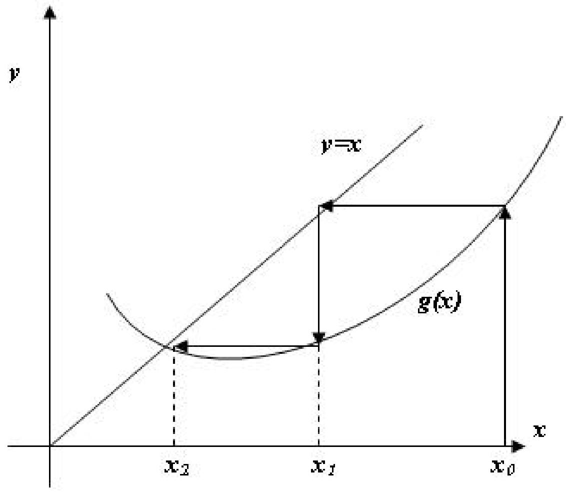


Figura 2

Un método iterativo de búsqueda de raíces de una ecuación converge a una solución única si cumple con la condición de Lipschitz, la misma es suficiente pero no necesaria, puede converger sin cumplir esta condición.

En el presente trabajo se analiza cual es el comportamiento del algoritmo al no cumplir esta condición

## 2. CONDICION DE LIPSCHITZ

Sea *g(x)* una función continua en un intervalo cerrado [a, b], tal que *g(a)* > a y *g(b)* < *b* y se cumpla que :

$$\left|\frac{g(b)-g(a)}{b-a}\right| < L<1, \textbf{(1)}$$

entonces ∃ un $\alpha$ tal que $g(\alpha) = \alpha$.

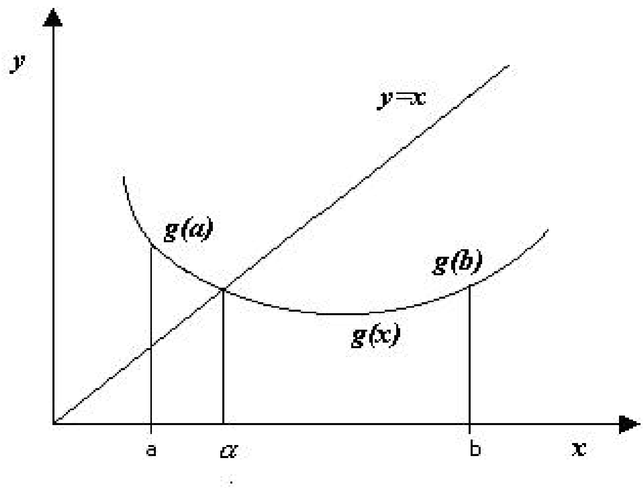


Figura 3

Ahora, si se cumple en el intervalo cerrado [a, b] que $g(a) = a$ y $g(b) = b$ entonces la expresión **(1)** deviene:

$$\left|\frac{b-a}{b-a}\right| = 1 \neq \mathrm{L}$$

con lo que no cumple la condición, y presentan dos raíces como ilustra la Figura 4. Cabe notar el hecho que se cumpla la condición de Lipschitz, significa que existe un número impar de raíces, pero esto establece que es posible lograr un intervalo conveniente [a, b] para que exista en el una sola raíz a la cual el algoritmo converge.

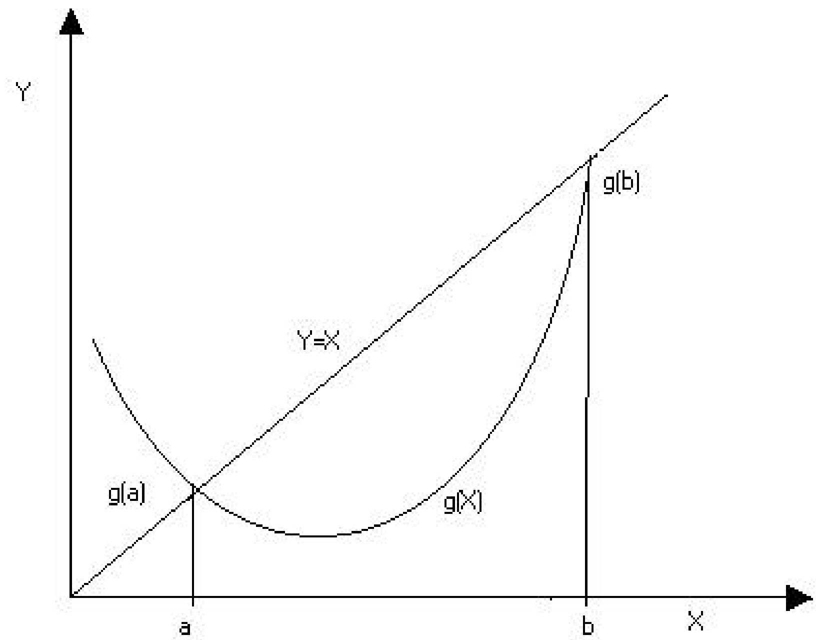


Figura 4

## 3. DESARROLLO

Tomando $g(x) = x^2 + C$, que representa una parábola, con parámetro C, se va buscar la intersección con $y = x$, variando los valores de C, siguiendo un algoritmo iterativo según el siguiente procedimiento:

a) Para un determinado valor de $\boldsymbol{C}$; tome un cierto valor inicial para $\boldsymbol{x}$.
b) Asigne a $\boldsymbol{y}$ el valor $\boldsymbol{x^2 + C}$.
c) Ahora cambie a $\boldsymbol{x}$ asignándole el nuevo valor de $\boldsymbol{y}$. Vuelva al punto b)

Podemos llamar al valor inicial de la iteración ***semilla***, a partir de la cual se genera una sucesión de valores que evolucionan hacia un ***atractor*** y la trayectoria de esta evolución recibe el nombre de ***órbita***.

Al variar $C$ obtenemos los siguientes casos:

**Caso 1:** La parábola $g(x)$ es tangente a la recta a 45º grados, como se muestra en la figura 5.

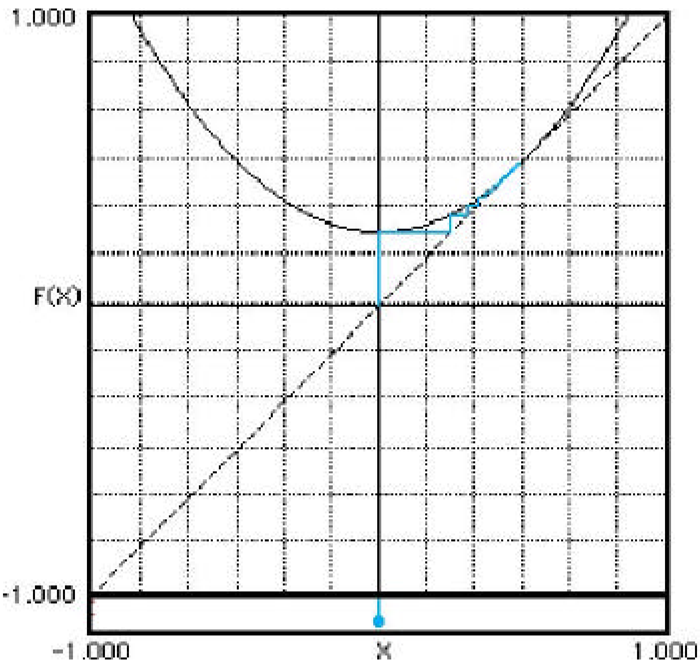

Figura 5

**Caso 2:** Se considera *C* = -3/4. Se puede notar como se aproxima al atractor desde lados opuestos después de 1000 iteraciones hay todavía un hueco visible en el centro. Las órbitas no han llegado todavía a un valor final. Figura 6.

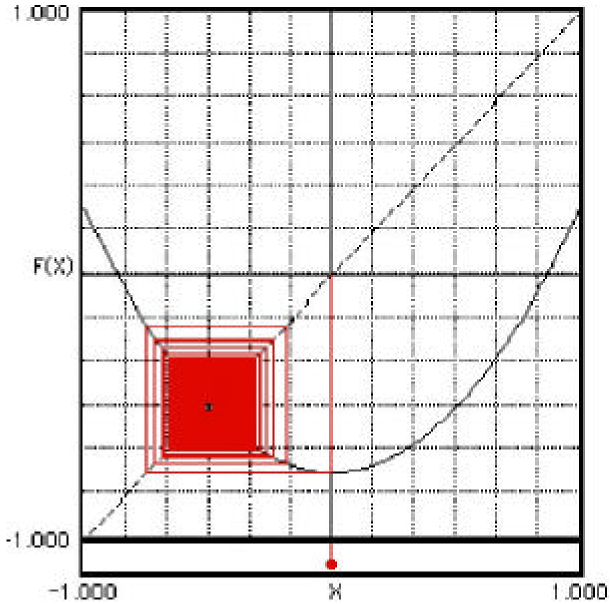


Figura 6

**Caso 3:** Para c = -13/16 las órbitas se establecen en dos ciclos alternándose entre –3/4 y –1/4, como se ve. Figura 7.

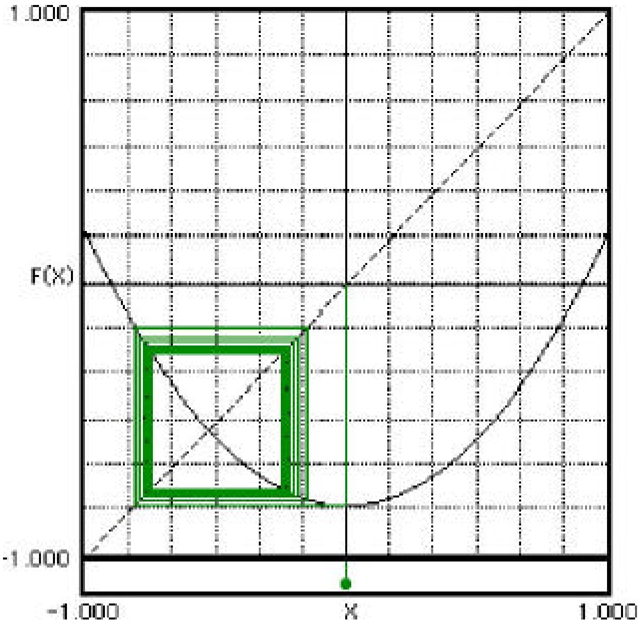


Figura 7

**Caso 4:** Aquí se ven cuatro ciclos cuando $C = -1{,}3$ las órbitas oscilan entre los valores -1,2996224637, 0,3890185483, -1,1486645691 y 0,0194302923.

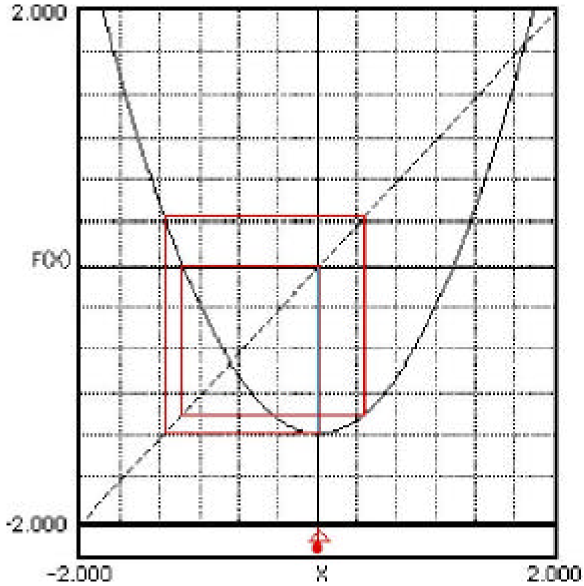


Figura 8

**Caso 5:** Estas órbitas fueron trazadas usando para el parámetro *C* el valor de $C = -1{,}4015$. aunque parece similar al diagrama anterior, las iteraciones parecen no repetirse nunca.

En lugar de eso caen dentro de bandas. Los ajustes minúsculos en las condiciones iniciales dan las órbitas que son obviamente diferentes. En $C = -1{,}4$, la órbita tenía un período de 32.

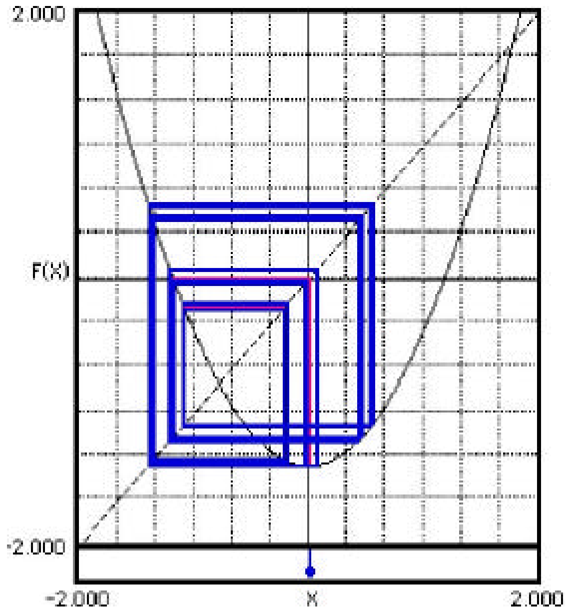


Figura 9

**Caso 6:** Este es un caso típico de caos. Dando al parámetro C un valor de $C$ = -1,8, la órbita cubre todos los infinitos valores posibles en el entorno (-2, 2).

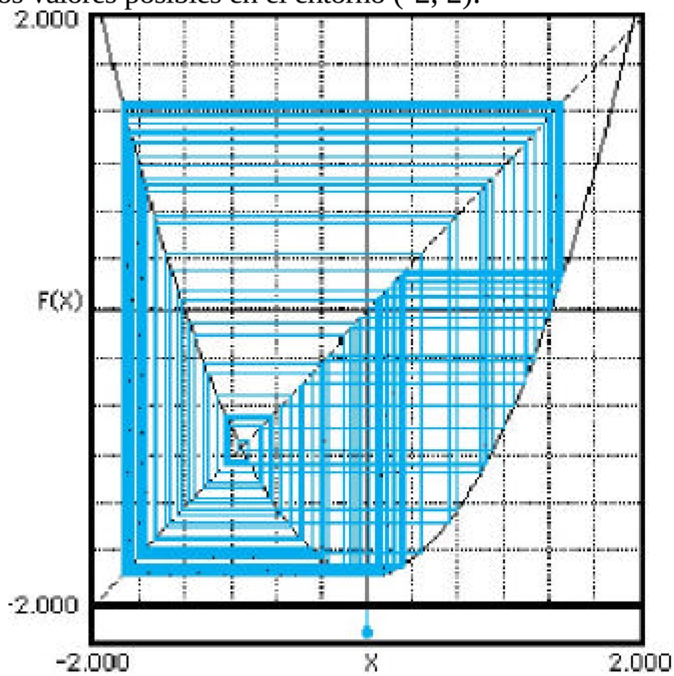


Figura 10

## 4. DIAGRAMA DE BIFURCACION

Lo observado en las figuras, desde la 5 a la 10 sirve para obtener un diagrama de bifurcaciones, que se construye, haciendo variar el parámetro $C$ y con cada nuevo valor de $C$, hacer correr muchas veces (del orden de 1.000) el algoritmo iterativo de Punto Fijo con:

$$g(x) = x^2 + C; \quad y = x$$

y luego considerar un número apropiado de los últimos valores (del orden de treinta); al suponer que ese gran número de iteraciones el algoritmo convergería a un valor.

Sin embargo, en estos casos, el comportamiento de los últimos números puede ser tal que coincidan, en cuyo caso se dice que existe un solo atractor, o las cantidades tiendan a dos valores, cuatro, etc., que constituirán otros tantos atractores o inclusive al caso que los números "convergan" a infinitos atractores, que es el caso en el que estamos en presencia de caos.

En la figura 10 se observa que hasta valores de $C$ superiores a -0,7 el algoritmo converge a un Punto Fijo. A partir de -0,75 y para valores inferiores aparecen bifurcaciones por las cuales el algoritmo es no determinístico y cerca de -1,4 con valores de $C$ decrecientes se torna caótico.

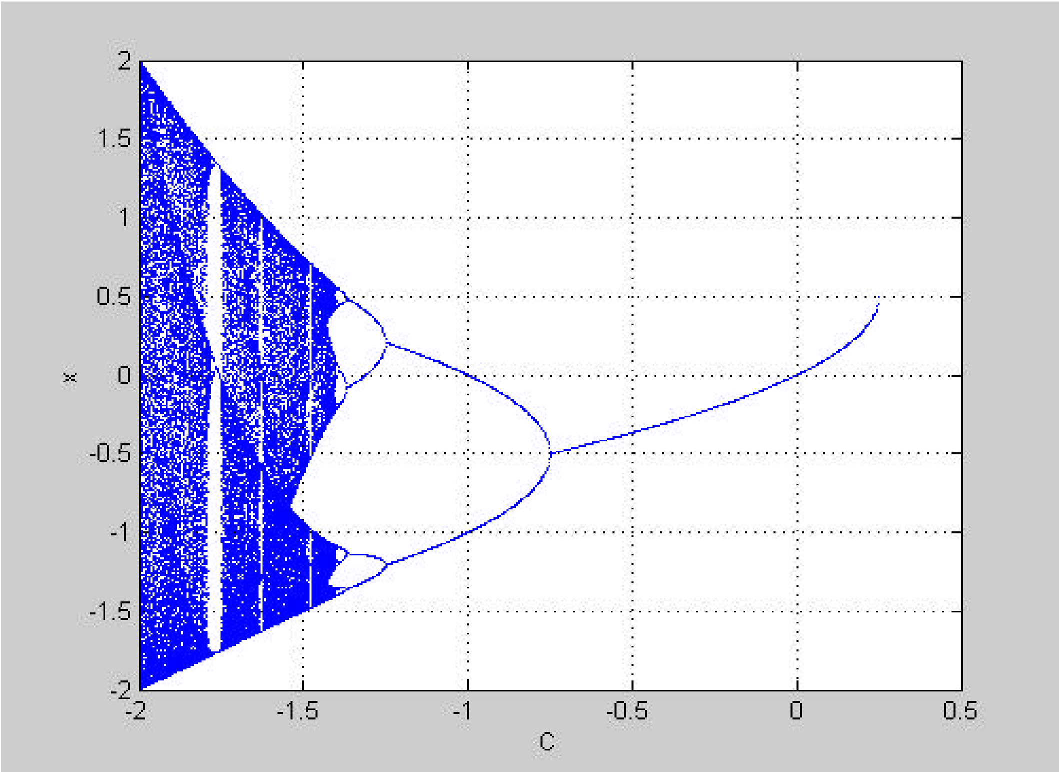


Figura 11

## 5. CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS

El presente trabajo pretende ser un aporte al estudio y análisis de la búsqueda de raíces de ecuaciones mediante el empleo de algoritmos de Punto Fijo.

Se extrae una conclusión importante en el hecho de que el algoritmo puede converger a atractores que no necesariamente son la raíz de la función, cuando no se cumple la condición de Lipschitz.

A su vez el presente puede servir de base para el análisis de algoritmos de punto Fijo, más complejos como el de Newton.

## 6. REFERENCIAS

[1] Richard L. Burden y J. Douglas Faires, Análisis Numérico 1998 International Thomson Editores.

[2] Carlos E. D'attellis, Introducción a los sistemas no lineales de control y sus aplicaciones primera edición 1992 AADECA.

[3] Daniel Kaplan, Leon Glass, Understanding Nonlinear Dynamics. 1995 Springer Velag.

[4] Steven Chapra Raymond P. Canale, Métodos Numéricos para ingenieros, con aplicaciones en computadoras personales, 1988 Mac Graw Hill.